

## **METODOLOGÍA UTILIZADA EN UN TRABAJO SOBRE VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA**

Inés del Carmen Plasencia Cruz  
Rosa María Güemes Artilles  
José Ángel Dorta Díaz  
M<sup>o</sup> Candelaria Espinel Febles  
Universidad de La Laguna

### **RESUMEN**

*Este artículo describe las razones que nos llevaron a elegir una metodología cualitativa —el estudio de casos— como metodología fundamental en la investigación, cuyo propósito era construir explicaciones sobre el uso que el alumnado de 8º de E.G.B. (13 a 15 años), en un centro y en un aula determinada, hace de las imágenes mentales cuando resuelve y da sentido a problemas matemáticos, y analizar si el papel de la profesora tiene proyección en esa actividad matemática. Ordenar con precisión y rigor todos los instrumentos utilizados en la recogida de la información y dar explicaciones de cómo se han llevado a cabo los análisis es el objetivo prioritario de este trabajo.*

### **ABSTRACT**

*This paper tells us about the reasons which guided us to choose a qualitative methodology —case studies— as a fundamental methodology in our research which purposes were as*

---

E-mail: [incruz@ull.es](mailto:incruz@ull.es)  
[jadorta@ull.es](mailto:jadorta@ull.es)  
[mespinel@ull.es](mailto:mespinel@ull.es)

*follows: (a) to enquire whether two 8th grade pupils (in a school and at a determined classroom) made use of mental images or not when they solved mathematical problems, or when they had to find a meaning for the mathematical questions they were asked, and also, (b) to analyze the role played by the teacher in this mathematical activity. To arrange all the elements used in getting the information and to give answers about the way that the analysis have been done is the most important aim of this article.*

**Keywords:** *qualitative methodology: case studies, mathematics teaching, imagery, visualization.*

## INTRODUCCIÓN

Toda investigación, en términos generales, constituye un proceso de indagación de un hecho o conjunto de hechos; un proceso en el cual, mediante la utilización de técnicas y procedimientos específicos se persigue el conocimiento. Ello parece sencillo, pero es lógico pensar que la particularidad de cada caso nos conduce a explicar cuáles son las técnicas y procedimientos adecuados para que dicha investigación nos conduzca a plantear, las categorías, concepciones y relaciones que creemos nos pueden permitir, en el proceso de conocimiento, alcanzar un determinado saber. Saber que guarda relación con la metodología, cuya elección para este estudio ha estado condicionada por sus objetivos, porque somos conscientes que los métodos de investigación deben estar en relación con los objetos que se quieren estudiar y no a la inversa. **Observar, conocer y analizar la interpretación que los protagonistas de este estudio —profesorado y alumnado— daban a los conocimientos matemáticos era nuestra meta, centralizando nuestra investigación en el uso que hacían de las imágenes mentales y de la visualización en su actividad matemática.**

Aunque uno de los focos de nuestra investigación, fundamentalmente, tiene que ver con las imágenes mentales (construcciones internas), serán la observación y el análisis del trabajo de los estudiantes y de la profesora, las representaciones externas que hacen cuando, un alumno habla y escribe mientras resuelve un problema o cuando una profesora explica, lo que nos permitirá dar razón e interpretar, siguiendo nuestra propia manera de dar sentido a esas acciones, los procesos de pensamiento y los caminos en que «nuestro» alumnado y «su» profesora dan sentido a los conceptos e ideas matemáticas.

En el proceso de nuestra investigación se desarrolló una relación con cada participante en el estudio con el propósito de saber, por un lado, cómo el profesorado hace su trabajo, cómo relaciona sus pensamientos con sus acciones, qué importancia da al pensamiento visual, y, por otro, cómo su alumnado hace uso del pensamiento visual en las tareas matemáticas.

Para poder llevar a cabo lo anteriormente descrito, optamos por ser parte del mundo escolar, vivir durante las horas del horario académico con las personas que formarían parte de nuestro estudio, experimentando a su lado el fruto de sus actividades matemáticas. Nuestra idea era que al formar parte del mundo escolar, empezaríamos a vislumbrar aspectos de la realidad escolar que no se nos ocurrirían «a priori» y que podrían ser importantes.

Básicamente, el objeto de la investigación en el ámbito educativo, se centra en descubrir lo que acontece cotidianamente en las aulas, aportando datos lo más significativos posible, los cuales, después de ser interpretados, sirvan para comprender e intervenir lo más adecuadamente posible en las clases, en nuestro caso, clases de matemáticas, y siempre con el fin de contribuir a la mejora de su enseñanza y aprendizaje (Goetz, J.P. y LeCompte, M.D., 1988).

## **ELECCIÓN DE LOS CASOS: LA PROFESORA**

La profesora fue seleccionada de la siguiente manera: Durante el curso académico 1992 se impartió un curso de Didáctica de las Matemáticas, dirigido a los maestros de escuelas unitarias de la zona norte de la isla de Tenerife. El curso fue organizado por la Consejería de Educación del Gobierno de Canarias y tuvo una duración de 32 horas. Durante el curso se tuvo la oportunidad de contactar con el profesorado que estaba interesado en mejorar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en sus clases. Cuando terminó el curso se siguió manteniendo contactos profesionales con algunos de estos profesores.

Una de ellos, concretamente la coordinadora del curso, nos pareció una persona interesante por su gran preocupación por la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y su disposición a la innovación curricular en la fase interactiva en el aula o lo que es lo mismo en la práctica. Pensamos que lo que sucediese en sus clases podía ser relevante para nuestro estudio.

Una vez que contactamos con ella, le informamos de nuestro proyecto y se le explicó que, con el fin de llevarlo a cabo, la investigadora de este trabajo asistiría a sus clases como observadora, tomaría notas durante el desarrollo de las mismas y le haría algunas entrevistas para recoger información acerca de sus ideas sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático.

Desde el primer momento la profesora se mostró dispuesta a colaborar en todo lo que fuese necesario y no ofreció ninguna resistencia a que una persona extraña entrase en su clase.

## **LOS ESTUDIANTES**

Es obvio, asimismo, que una vez seleccionada la profesora, deberíamos inevitablemente elegir a sus alumnos, concretamente a los de octavo de E.G.B., ya que queríamos aproximarnos a las edades estudiadas por algunos de los investigadores de Florida State University, con los que la primera autora de este trabajo tuvo contacto durante su estancia en U.S.A. en el año escolar 1993-94. Nuestra idea era tomar sus resultados como referencia y hacer un estudio comparativo, si fuese posible.

La clase de octavo de E.G.B: estaba compuesta de 6 niños y 12 niñas, de edades comprendidas entre los 13 y los 16 años. De entre ellos se realizó una selección a partir del test WSAT (Wheatley Spatial Ability Test), que permitió elegir a los estudiantes con los que trabajaríamos más profundamente y a los que les realizaríamos las entrevistas clínicas. Describiremos y analizaremos el test WSAT posteriormente.

## INSTRUMENTOS UTILIZADOS EN LA RECOGIDA DE INFORMACIÓN

La siguiente tabla muestra los instrumentos que fueron utilizados en esta investigación.

Test WSAT	
Observaciones del desarrollo de las clases de Matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- registradas en un cuaderno de campo durante el desarrollo de las mismas</li> <li>- transcripción inmediata</li> </ul>
Documentos de planificación de la instrucción	<ul style="list-style-type: none"> <li>- entregados por la profesora durante la recogida de información</li> </ul>
Entrevistas formales a la profesora	<ul style="list-style-type: none"> <li>- planificadas</li> <li>- grabadas en cassette</li> <li>- transcripción inmediata</li> </ul>
Entrevistas informales a la profesora	<ul style="list-style-type: none"> <li>- no planificadas</li> <li>- registradas en un cuaderno de campo en el momento de realizarse o más tarde</li> </ul>
Observaciones durante la asistencia a reuniones de evaluación y otras reuniones de profesores	<ul style="list-style-type: none"> <li>- registradas en un cuaderno de campo después de las observaciones</li> </ul>
Entrevistas clínicas a los estudiantes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- planificadas</li> <li>- grabadas en cassette y en vídeo</li> <li>- transcripción inmediata</li> </ul>
Exámenes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- entregados por la profesora</li> </ul>
Cuadernos de los estudiantes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- entregados por los estudiantes</li> </ul>

## DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS INSTRUMENTOS EMPLEADOS

Describiremos y analizaremos, ahora con más extensión, cada uno de los instrumentos usados con el fin de describir, con más detalle, el proceso total que se siguió para recoger los datos.

Hay que resaltar que el análisis de los datos recogidos a través de los diferentes instrumentos se realizó, en general, en dos momentos diferentes: Un primer análisis, que llamaríamos informal, surgió durante la recogida de la información. Fruto de las reflexiones diarias de la investigadora, surgió un primer listado de ideas, conjeturas, intuiciones y preguntas sobre lo que se estaba produciendo en la escuela. El análisis más formal se hizo una vez que se terminó el trabajo de campo y se transcribieron las observaciones y las entrevistas, momento en que se profundizó y estudió con detenimiento la información.

## Test Wsat

El instrumento que utilizamos para seleccionar a los estudiantes que serían los casos de estudio, fue el test WSAT. Este test se eligió de entre los diferentes test que existen para medir la habilidad espacial de los estudiantes porque era uno de los test utilizados en los estudios realizados en Florida State University (U.S.A.) que queríamos utilizar como referencia (Brown & Wheatley, 1990; Brown & Presmeg, 1993; Brown, 1993; Solano & Presmeg, 1995).

El test WSAT fue diseñado por el profesor Dr. Grayson Wheatley (1978), es un test de papel y lápiz que consta de 100 ítems y cuyo fin es medir la habilidad espacial de los estudiantes para rotar figuras en dos dimensiones. Para su realización se da a los estudiantes una figura que aparece en la parte izquierda de la página. Ellos deben decidir entonces si esta figura coincidirá con cada una de las cinco figuras que aparecen a continuación, después de haberlas girado en el plano.

## Análisis del Wsat

Los test realizados se analizaron a mano, ya que eran pocos estudiantes, utilizando la fórmula:

puntuación obtenida =  $n^{\circ}$  de respuestas correctas  $-(1/2)$   $n^{\circ}$  de respuestas incorrectas.

Dado que sólo hay dos posibles respuestas para cada ítem, este procedimiento de puntuación contiene una sanción para corregir la adivinación. La puntuación obtenida por esta fórmula está en función de las respuestas correctas, y los ítems no contestados no figuran directamente en el resultado de la puntuación.

Después que se pasó el test y los datos fueron analizados, elegimos seis estudiantes como casos, para hacer un estudio cualitativo en el que analizar en profundidad el uso o no que hacían de sus imágenes en la actividad matemática y la relación de las imágenes con su competencia en Matemáticas.

Se siguieron dos criterios para seleccionar a los estudiantes, uno de ellos estuvo basado en las puntuaciones del test y el otro en el hecho de que hubiera el mismo número de chicas que de chicos con el fin de examinar si el género tenía alguna influencia en nuestras preguntas de investigación. **Estos fueron los resultados:**

- un estudiante obtuvo la mejor puntuación en el test y lo realizó en menos tiempo de lo estipulado: **Jorge**, primero en el ranking.

- dos estudiantes obtuvieron buenos resultados: **Jerónimo y Laura**, segundo y tercera respectivamente.

- tres obtuvieron bajos resultados: **Elena, Mónica y Daniel**, quienes ocuparon los lugares dieciséis, diecisiete y dieciocho, últimos del ranking.

Introducimos, a sugerencia de la profesora, un alumno más que sería nuestro caso número siete, ya que, según la profesora, «su mejor alumno» no podía estar excluido del estudio, propuesta que fue acertada como analizaremos posteriormente, pues este alumno aportó una gran riqueza a nuestra investigación. **Moisés**, número trece según el ranking fue el estudiante que se introdujo a sugerencia de la profesora.

Después de hablar con los alumnos seleccionados se mantuvo una entrevista con sus padres, en la que se les explicó brevemente el objetivo del trabajo y se les pidió permiso para realizar una investigación más en profundidad con sus hijos, permiso que se les solicitó por escrito.

## **OBSERVACIONES DEL DESARROLLO DE LAS CLASES DE MATEMÁTICAS**

Las observaciones se llevaron a cabo durante el curso académico 1994-1995. Después de hablar con la profesora, quien se lo comunicó a los alumnos, y con el permiso de la directora del colegio, se comenzó las observaciones del desarrollo de las clases de Matemáticas durante el mes de Noviembre de 1994, poniendo especial cuidado en la observación del comportamiento matemático de los alumnos seleccionados para las entrevistas clínicas, quienes, no supieron hasta febrero, cuatro meses después, que se quería trabajar más profundamente con ellos.

Durante los meses de Noviembre a Febrero se asistió a las clases de Matemáticas, cuatro veces a la semana. A partir de Marzo se tomó contacto con el colegio dos veces, cada quince días, un día para observar las clases de Matemáticas y otro para realizar las entrevistas a los estudiantes seleccionados para la investigación.

Creemos que la estancia continuada en el centro ha sido importante en nuestra investigación, ya que nos ha ayudado a entender algunas de las acciones de la profesora y de los estudiantes entrevistados. Un compromiso prolongado del investigador con los participantes en el estudio es un aspecto que realza la credibilidad del análisis (Cobb, P. y Whitenack, J., 1996).

Decir que cuando la investigadora entró en la clase hubo una cierta expectación por parte del alumnado y un poco de nerviosismo por parte de la profesora, lo cual es explicable, en cuanto que había una persona externa al centro en sus clases de matemáticas. Pero, poco a poco, y a medida que las observaciones progresaban, su presencia fue notándose menos, hasta llegar a un momento en que fue como si no estuviese presente, como un sujeto «invisible». Las clases se desarrollaron normalmente y sólo en contadas ocasiones la profesora requirió la participación de la investigadora, pidiendo su opinión sobre algún contenido de la clase, también ocurrió que algún alumno próximo le pidió ayuda para resolver algún problema.

Los registros de las observaciones se realizaron en un cuaderno de campo en el momento de las clases y de acuerdo con los siguientes apartados: 1. Qué se enseña: Contenidos que se trabajan; habilidades que se desarrollan; actitudes que se promueven. 2. Distribución del tiempo. En relación con qué criterios. 3. Actividades realizadas. Con qué fines. 4. Medios o materiales utilizados: Tipos de material; quién los aporta; para qué fines. 5. Actuación del alumnado: grado de autonomía e implicación en la tarea. 6. Actuación del profesor en la forma de organizar la tarea. 7. Utilización de gráficos, diagramas, dibujos, referencias a conceptos anteriormente construidos, imágenes cinestésicas, por los alumnos y por la profesora.

Todos los acontecimientos ocurridos en cada sesión de clase, y que habían sido anotados el mismo día, se transcribían inmediatamente, procurando relatar los hechos con el mayor grado de fidelidad posible.

Aunque no era objetivo primordial de la investigación, las observaciones de clase permitieron a la investigadora, entre otras cosas, familiarizarse con el contexto, entendiendo lo que se hacía en clase y, observar la metodología utilizada, la participación y reacciones de los estudiantes, reconocer factores que estaban relacionados con la instrucción y ser consciente de las creencias y actitudes de los alumnos y la profesora, en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

## ANÁLISIS DE LAS OBSERVACIONES DE AULA

Las investigaciones sobre lo que sucede en las aulas no podrían realizarse si no contásemos con un modelo sustentado en una estructura de trabajo sistemático. Hemos seguido los trabajos realizados por Doyle y Carter (1984), los cuales ofrecen un modelo de análisis que permite abordar el trabajo con cierto rigor.

El modelo trata de examinar «**la estructura del trabajo académico**» en las sesiones de clase desarrolladas por la profesora y sus alumnos, cuyo componente central es el término de tarea. Concepto que se usa para designar estructuras situacionales que organizan y dirigen el pensamiento y la acción de los participantes en el aula, y que pueden ser diferenciadas en términos de categorías generales, según las operaciones cognitivas que se les exija a los alumnos para que puedan cumplirlas: **tareas de memoria, tareas de rutinas o de procedimientos, tareas de comprensión o entendimiento y tareas de opinión.**

Es importante tener en cuenta la distinción entre los distintas tareas por la demanda que exige su cumplimentación; la forma de pensar de un alumno acerca de una cierta asignatura está condicionada por las tareas que se le pide que realice en dicha asignatura: si se le manda reproducir la información que ha recibido durante la instrucción producirá resultados diferentes que si se le requiere comprender la información y sacar conclusiones.

Los conocimientos previos que el alumno tiene del concepto, la experiencia, la motivación y actitud hacia el contenido, el medio social y cultural al que el alumno pertenece son algunos de los factores que influyen en el aprendizaje.

Sin embargo, en el contexto de clase, es el trabajo que los estudiantes realizan, que en gran medida está en función de las tareas que el profesor propone, lo que determina cómo los alumnos piensan, entienden y encuentran sentido a los conceptos matemáticos. En cierta manera, el tipo de trabajo «valorado» por el profesor comunica al estudiante en qué deberían «gastar» ellos su tiempo y energías intelectuales.

A través del análisis de los datos obtenidos en las observaciones, siguiendo el modelo anteriormente expuesto, se obtendrá el patrón general del desarrollo instructivo focalizando nuestra atención en la valoración e importancia que el profesor da al pensamiento visual.

## ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS A LA PROFESORA

Con el fin de, por una parte, contrastar la observación obtenida mediante las observaciones de aula y por otra elaborar, enriquecer y completar una información

más «rica» sobre las creencias y concepciones de la profesora creímos conveniente realizar entrevistas semi-estructuradas.

*«la entrevista semi-estructurada es una forma o modalidad de realizar entrevistas en las que se prevén los temas o tipos de cuestiones que deben ser planificados antes de su ejecución y, en el momento del desarrollo, se decide la secuencia y redacción de las preguntas que, muchas veces, van siendo marcadas por la dinámica de la conversación» (citado en Güemes, 1994, pág. 71).*

A la profesora se le realizaron dos entrevistas que se llevaron a cabo en el centro escolar, concretamente en el «aula» de la maestra y una vez que finalizaron las clases con los estudiantes. Este hecho influyó positivamente en la obtención de la información, ya que por una parte se disponía de un lugar que favorecía la privacidad de la entrevista y por otra la maestra se encontraba tranquila y sin prisas al no tener obligaciones docentes.

El objetivo de las entrevistas, y con el fin de describir el pensamiento del profesor, era encontrar información sobre los siguientes aspectos: 1º.- Visión general sobre la enseñanza y el aprendizaje; 2º.- Concepción de las Matemáticas; 3º.- Desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas en el aula; 4º.- Desarrollo profesional; 5º.- Contexto de trabajo; 6º.- Planificación; 7º.- Concepción de la profesora sobre el aprendizaje matemático, en particular su opinión sobre la actuación matemática de los estudiantes entrevistados; 8º.- Creencias sobre el papel de las imágenes mentales en la actividad matemática.

## **EL GUIÓN DE LAS ENTREVISTAS**

El guión es un elemento esencial en el diseño de las entrevistas. Podríamos definirlo como un esquema con los puntos a tratar, los cuales se elaboraron teniendo en cuenta los objetivos de nuestra investigación que se concretaron en el apartado anterior.

Cabe decir que el guión de nuestras entrevistas no fue cerrado ya que en el transcurso de las mismas incorporamos algunas preguntas, no previstas de antemano, que surgieron en el desarrollo y ejecución de la investigación. Tampoco seguimos rigurosamente el orden previsto en las preguntas que siempre se ajustaron a la dinámica de la conversación.

El guión que elaboramos lo dividimos en cinco partes diferenciadas que desarrollaremos a continuación:

### **Trayectoria profesional**

- 1.- ¿Qué te hizo estudiar Magisterio?
- 2.- ¿Me podrías hablar sobre tus años de experiencia, centros y niveles en los que has trabajado, niveles en los que has impartido matemáticas?
- 3.- Coméntame sobre tu paso por la Educación Compensatoria. ¿por qué la dejas-te?, ¿te costó volver?

- 4.- ¿En qué niveles has disfrutado más? ¿dónde te has sentido mejor?
- 5.- Te he oído que te gusta trabajar en 2ª Etapa, ¿por qué?, ¿qué asignaturas de 2ª Etapa?
- 6.- Si tu pudieses elegir una carrera de nuevo, ¿qué escogerías?

### **Creencias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**

- 1.- Muchos profesores creen que enseñar Matemáticas es difícil. ¿Tu qué opinas?
- 2.- ¿Es para ti difícil enseñar Matemáticas?
- 3.- ¿En qué contexto crees que es más difícil?
- 4.- ¿La experiencia te ha hecho cambiar las ideas que tenías sobre la enseñanza de las Matemáticas o te ha hecho reafirmarte en ellas?
- 5.- Para muchos alumnos las Matemáticas es una asignatura difícil. ¿En qué crees que pueda radicar esa dificultad?
- 6.- ¿Cómo piensas que los alumnos pueden aprender «mejor»?
- 7.- ¿Qué experiencias, qué evidencias más sobresalientes pueden avalar tus ideas?

### **Sobre el curso de octavo**

- 1.- Háblame de este curso, de tu planificación. ¿Tienes planificación? ¿Con quién la haces? ¿En qué te basas para planificar? ¿Cómo concibes la planificación realizada con otros compañeros?
- 2.- ¿Cómo entiendes la colaboración entre los compañeros?
- 3.- ¿Cómo entiendes el trabajo en grupo?
- 4.- ¿Qué opinas del trabajo en grupo entre los alumnos?
- 5.- ¿Cómo entiendes que debería ser la evaluación en Matemáticas? ¿La haces así?
- 6.- ¿Tu crees que la preparación de los niños de octavo que van al instituto debe ser la misma que la de los que no van?
- 7.- Si tuvieses que enseñar de nuevo Matemáticas a octavo, ¿Qué cambios harías? ¿Por qué?
- 8.- ¿Te sientes bien aquí?

### **Acerca de las imágenes**

- 1.- He observado que te gusta «potenciar» el lenguaje matemático, a través del álgebra, ¿podrás comentarme algo sobre esto?
- 2.- ¿Qué importancia le darías a las imágenes mentales, como un medio para la resolución de problemas? ¿Podrías ponerme algún ejemplo?
- 3.- ¿Qué tienes en «mente» cuando le pones problemas a los estudiantes? ¿Qué esperas del alumno?
- 4.- Si un alumno te resuelve un problema de una manera diferente a la forma en la que tu lo resolverías. ¿Qué harías? ¿Qué te parecería este proceso del estudiante?
- 5.- ¿Crees que es importante «fomentar» la diversidad de soluciones frente a un problema?

6.- ¿Qué papel das a la creatividad?

7.- Imagínate el caso de un alumno que adopta dos papeles, por una parte trata de «complacer» al profesor, para ello hace las tareas de la manera que el profesor enseña, su única idea es aprobar la asignatura, y por otro, hace matemáticas con el deseo de aprender, resuelve los problemas dándole sentido de acuerdo a su experiencia, no tiene que dar explicaciones a nadie, salvo a sí mismo.

¿Cuál es tu comentario a esta situación?

### **Sobre cada estudiante**

1.- Como tutora de estos estudiantes de octavo, ¿podrías hacerme un juicio sobre cada uno de ellos, resaltando aquellos cambios o aspectos que te hayan resultado más relevantes, a lo largo de estos años?

2.- ¿Crees que los maestros podrían haber hecho algo más, de lo que hicieron con cada uno de ellos?

### **ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS**

A través de las entrevistas el profesorado manifiesta o da forma, a través de la palabra, a su pensamiento, no sólo su pensamiento matemático, sino también su pensamiento escolar y social.

Una vez que se transcribieron las entrevistas, el proceso de tratamiento analítico siguió, en la práctica, estos cuatro pasos:

1.- Se fueron leyendo las transcripciones, delimitando o subrayando los fragmentos textuales que se referían a cada una de las cinco secciones, especificadas anteriormente en el guión de las entrevistas. Al margen se iban haciendo anotaciones (códigos), para indicar a cuál de los aspectos correspondía cada fragmento transcrito.

2.- Una vez hecha la codificación en cada una de las transcripciones, se procedió a juntar todos los fragmentos que se referían a una misma categoría, por ejemplo enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

3.- Con el material reunido se procedió a reclasificarlo e interpretarlo, abriendo subsecciones en aquellos casos que fuese necesario, elaborando para ello nuevas categorías relacionadas con la cuestión. A este proceso analítico lo conocen algunos autores como «Integración Local» pues el análisis e interpretación se centra en el material acumulado en una sección, bajo categorías descriptivas relacionadas con una cuestión (Weiss, 1994).

4.- Hecha la integración local, sección a sección, el último paso consistió en la organización de todas las secciones, de manera coherente, siguiendo una línea interpretativa y narrativa.

### **ENTREVISTAS CLÍNICAS CON LOS ESTUDIANTES**

El fin de utilizar entrevistas clínicas con los estudiantes era averiguar, por una parte sus creencias sobre su aprendizaje y por otra, la más importante para nosotros,

conseguir información sobre el nivel de comprensión matemática de los estudiantes y sobre la utilización de estrategias visuales en el proceso de solución, frente a los problemas que le fueron planteados.

Empezamos las entrevistas a los estudiantes seleccionados en el mes de Marzo, una vez cada quince días, en el colegio, los viernes, aprovechando que los alumnos ese día tenían tutoría de Matemáticas y no había grandes problemas en que faltasen a otras asignaturas. Por supuesto que contamos con la autorización de los otros profesores, quienes en todo momento facilitaron nuestro trabajo en el Centro.

En principio cada entrevista fue planificada para alrededor de media hora, pero este tiempo varió según la entrevista y la habilidad matemática del estudiante entrevistado.

Todas las entrevistas fueron grabadas en vídeo y en cassette por si la videocámara fallase o el sonido no fuese comprensible. Además de estos procedimientos para recoger los datos, el entrevistador anotaba sus impresiones generales de la entrevista y cualquier cosa que sucediese antes, durante y después de las mismas.

### **Tipos de entrevistas**

Se realizaron dos tipos de entrevistas diferenciadas:

I.- El primer tipo, del cual se realizó una entrevista, constó de dos partes:

a) la primera parte pretendía obtener información sobre las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas, del profesorado, sus asignaturas favoritas, su integración en el colegio y sobre su propio aprendizaje.

b) en la segunda parte se intentó averiguar las estrategias, si había algunas, que el estudiante utilizó para resolver el test WSAT. Esta entrevista fue grabada en cassette.

II.- El segundo tipo de entrevistas, del cual se realizaron seis, fue el que nos sirvió como la fuente mayor de datos, en relación a las imágenes de los estudiantes y su relación con su actividad matemática.

Cada una de estas entrevistas fue diseñada para analizar diferentes áreas sobre las imágenes y la comprensión matemática de los estudiantes. Para la realización de las mismas se les proponía a los estudiantes diferentes problemas y se les pedía que los leyesen y pensasen en voz alta mientras los estaban resolviendo. Como los cálculos numéricos en los problemas planteados eran bastante sencillos, no se les proporcionó calculadora.

En total se propusieron 14 problemas que se repartieron en dos grupos, un grupo estaba formado por lo que llamaremos problemas para evaluar las imágenes, y el otro lo constituyen los problemas no rutinarios. Cada entrevista constaba de dos o tres problemas que el estudiante debía resolver.

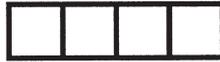
Describimos, a continuación, los problemas y la finalidad de los mismos en las entrevistas.

### **ENTREVISTAS PARA EVALUAR LAS IMÁGENES**

De las seis entrevistas del segundo tipo, las dos primeras entrevistas, fueron diseñadas para medir la «calidad» de las imágenes de los estudiantes.

PRIMERA ENTREVISTA.- La primera entrevista estuvo basada en la construcción de modelos tridimensionales.

El protocolo para la entrevista fue el siguiente: Se les enseñó la siguiente figura hecha en cartulina:

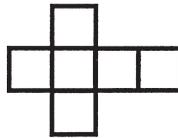


y se les dijo: Intenta imaginar qué figura te resultará si doblas y unes esos cuatro cuadrados.

Si fuese necesario, se le permite al estudiante que doble el papel, con el fin de que se de cuenta que puede formar cuatro de las caras de un cubo. A continuación se le preguntó: ¿Qué debes añadir a los cuatro cuadrados, y dónde, para formar un cubo completo?

Si el alumno lo necesita, se le pueden dar tijeras para que recorte, y piense sobre el material.

b) Primeramente se les enseñó y explicó el desarrollo siguiente de un cubo:



y en segundo lugar se les preguntó si podían encontrar otros desarrollos, y que los dibujasen. Si el alumno no podía encontrar otros desarrollos, se les enseñaba algunos de los modelos que se llevaba preparados.

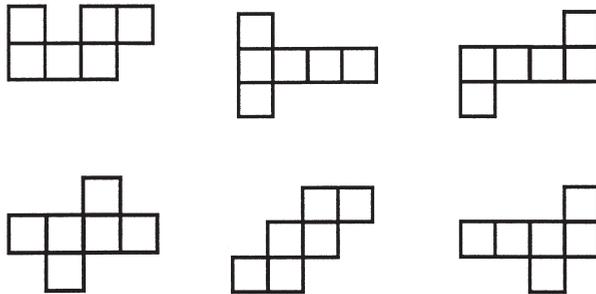
c) Se les enseñó distintos desarrollos hechos en cartulina, pero sólo con el contorno exterior y se les preguntó para cada uno de los desarrollos: ¿Podrías formar un cubo con este desarrollo?, ¿Cómo lo construirías? Señala en el dibujo dónde pondrías la base y dónde la tapa.

Siempre que el alumno lo necesitase o lo pidiese, se le dejaba manipular el material y formar el cubo, para que comprobase sus ideas. Si el alumno no podía resolver el problema con el contorno exterior, se le enseñaba el desarrollo completo, y si aún así no podía imaginar, se le dejaba que formase el posible cubo, doblando y uniendo la cartulina.

Básicamente, nuestro objetivo con esta entrevista era analizar y evaluar la habilidad del estudiante para construir, mantener y transformar la imagen de un cubo, en su mente, a través de la visualización del contorno dado.

Nuestra idea era diferenciar, a través de la verbalización de sus pensamientos, entre los estudiantes que estaban visualizando y los que hacían la tarea con estrategias de ensayo y error.

Estos fueron algunos de los desarrollos utilizados en esta entrevista.

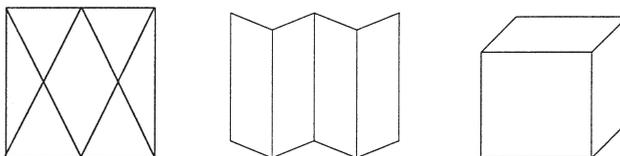


SEGUNDA ENTREVISTA.- La segunda entrevista consistió de dos tareas que se ha constatado son útiles para medir la calidad de las imágenes de los estudiantes (Brown & Wheatley, 1990).

**La primera tarea** fue la que llamamos de dibujo rápido. En ella se le mostraba al estudiante una figura, por un corto espacio de tiempo. A continuación se le pedía que dibujase lo que vio en un papel. Después de haberlo dibujado se le preguntaba si estaba satisfecho con el dibujo. Si contestaba que no, se la daba la oportunidad de volverlo a mirar y dibujar de nuevo.

Una vez que los estudiantes estaban satisfechos del dibujo se les preguntaba qué vieron y cómo hicieron el dibujo. La idea consiste en animar a los estudiantes a reflexionar en sus estrategias para imaginar, ver como los estudiantes interpretan cada forma y hasta qué punto se fían de su imagen mental.

Lo básico en esta tarea fue evaluar la capacidad del estudiante para construir una imagen de un modelo, además de la capacidad para mantener la imagen y poder copiar desde la memoria. Las figuras que se utilizaron en esta tarea son las que aparecen a continuación.

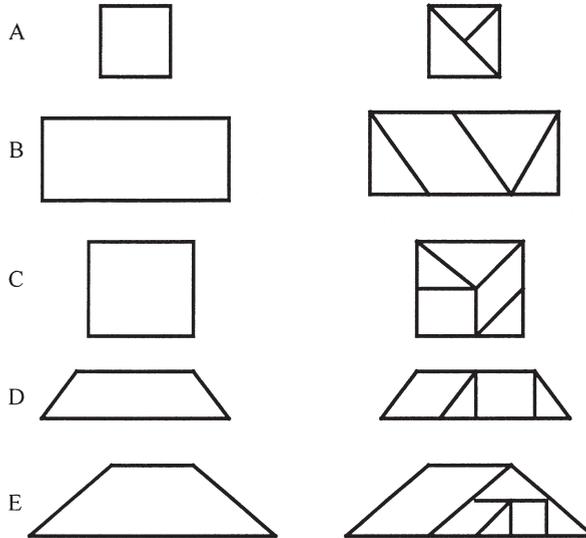


**La segunda tarea** fue la que llamamos de reproducción de un modelo. La idea básica es construir una imagen desde la memoria, actividad que se diferencia de la anterior en que ahora se debe mantener mas tiempo la imagen. Se necesitarían imágenes «más potentes».

Para realizar la tarea se les da a los estudiantes las siete piezas del tangram. Hay que aclarar que la entrevistadora introdujo el tangram a toda la clase, unas semanas antes de hacer la entrevista. Era importante familiarizar al estudiante con el material, antes de la entrevista, para evitar posibles dificultades con la tarea debidas al desconocimiento del material.

Se enseña, brevemente, a cada estudiante, el modelo que hay que reproducir con el tangram y se les pide que rellenen el contorno proporcionado, según el modelo ense-

ñado. Se les permitió mirar el modelo tantas veces como lo necesitaron. Los siguientes fueron los modelos utilizados:



## ENTREVISTAS UTILIZANDO PROBLEMAS NO RUTINARIOS

El resto de las entrevistas que se hicieron a los estudiantes, en total cuatro, consistieron de problemas no rutinarios, que el alumno debía resolver en voz alta.

Los problemas no rutinarios son problemas diferentes a los standard o rutinarios, que pueden ser resueltos de una manera sencilla, por medio de una o dos operaciones aritméticas, utilizando los números dados en el problema. Son problemas en los que la solución matemática no es ni obvia ni incuestionable, al menos si se toma en cuenta el contexto evocado por el problema. Son aquellos que proporcionan oportunidades para que el estudiante realice tareas reflexionando, que le lleven a construir las ideas matemáticas con comprensión y con significado, y dónde la solución no se limita a la aplicación rutinaria de un algoritmo. Se propusieron un total de diez problemas, cuyos enunciados expondremos a continuación:

En los problemas 1, 2, 3 y 4 se tuvo en cuenta que admitiesen estrategias visuales, entre otras, como método de solución además de no incluir, ningún dibujo a apoyo gráfico en su enunciado, lo cual pudiese inducir al alumno a seguir un método visual.

Fueron utilizados por la Dra. Presmeg (1985) en sus investigaciones. Merece la pena destacar que los problemas 1 y 2 formaron parte de lo que ella llamó: *Mathematical Processing Instrument*, instrumento que utilizó en su tesis doctoral, con los estudiantes de secundaria (16-17 años) y sus profesores. La Dra. Presmeg agrupó los problemas utilizados en el anterior instrumento en tres secciones A, B y C que variaban en su orden de dificultad. La secciones A y B eran para los estudiantes y las

secciones B y C para los profesores. Los problemas que nosotros utilizamos pertenecían a la sección A.

1º.- Hay 8 mesas en una casa. Algunas tienen 4 patas y otras tienen 3 patas. En total hay 27 patas. ¿Cuántas mesas hay con 4 patas?

2º.- Cierta día Juan y Ana fueron juntos a la biblioteca. Después de ese día, Juan fue regularmente a la biblioteca cada dos días al mediodía y Ana fue cada tres días también al mediodía. ¿Cuántos días pasaron hasta que se volvieron a encontrar en la biblioteca por segunda vez?

3º.- Un perro quiere cazar a un zorro que se encuentra a 30 metros de distancia. El salto del perro es igual a 2 metros y el salto del zorro es igual a 1 metro. Mientras el zorro hace 3 saltos, el perro hace 2. ¿Cuánto tiene que correr el perro para alcanzar al zorro?

4º.- En un corral había conejos y gallinas. Cuando Jonás miró a través de la valla vio 7 cabezas y 20 patas. ¿Cuántos conejos había? ¿Cuántas gallinas?

Los problemas 5, 6 y 7, que redactaremos a continuación, son problemas no rutinarios que no requieren habilidades específicas algebraicas para su solución aunque sí visualización y razonamiento matemático. Los números 5 y 6 fueron utilizados por las doctoras Brown y Presmeg (1993), el nº 7 lo diseñamos para esta investigación.

5º.- En un zoo hay 15 tigres y 4 jaulas. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los tigres, de forma que en cada jaula haya como mínimo un tigre, y que no haya el mismo número de tigres en 2 jaulas?

6º.- Tenemos 12 mesas cuadradas, en las que puede sentarse una persona a cada lado.

a) Si las ponemos juntas de manera que formen una mesa alargada, ¿Cuántas personas pueden sentarse?

b) ¿Puedes colocarlas de diferente forma, de manera que se puedan sentar un número diferente de personas? ¿De cuántas formas diferentes puedes colocarlas?

7º.- Tenemos 216 cubos pequeños de  $1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$ , con los que formamos un cubo de  $6 \times 6 \times 6 \text{ cm}^3$ . Pintamos de blanco todo el exterior del cubo grande. ¿Cuántos cubos pequeños no tienen ninguna cara pintada de blanco? ¿Cuántos tienen una cara? ¿Cuántos tienen dos? ¿Cuántos tres? ¿Y cuatro?

El siguiente problema fue diseñado para medir la utilización que hacen los estudiantes de su conocimiento del entorno, su habilidad para utilizar «lo conocido» en la solución de los problemas.

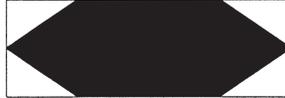
8ª.- La distancia de La Matanza a Santa Úrsula es un tercio, de la distancia que hay de La Matanza al Puerto de la Cruz. La distancia de Santa Úrsula a Los Realejos es cuatro veces la distancia de La Matanza a Santa Úrsula. Si la distancia de La Matanza al Puerto de la Cruz es 12 Km., ¿Cuál es la distancia del Puerto de la Cruz a Los Realejos? ¿Cuál es la distancia de La Matanza a Santa Úrsula?

En los tres últimos problemas se utilizaron dibujos en sus enunciados. El problema número 9 fue utilizado por Solano y Presmeg (1995) y los números 10 y 11 están inspirados en los trabajos de la profesora Emma Castelnuovo.

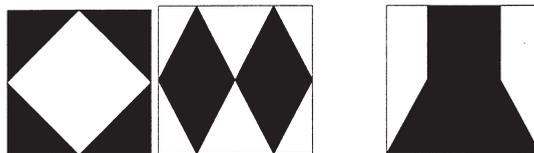
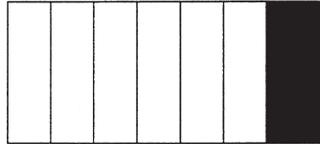
9º.- Calcular el área de la zona sombreada de la siguiente figura:



10<sup>o</sup>.- Calcular el área sombreada de la siguiente figura:



11<sup>o</sup>.- ¿Qué fracción de la figura entera representa la parte sombreada de las siguientes figuras?:



### ANÁLISIS DE LAS TAREAS PRESENTADAS EN LAS ENTREVISTAS CLÍNICAS A LOS ESTUDIANTES

Para analizar cada tarea se identificaron varias características basadas en las respuestas de los estudiantes que parecían indicar sus niveles de funcionamiento. En ningún caso se utilizaron códigos numéricos para evaluar y cuantificar las respuestas de los estudiantes. Se sintió que la introducción de métodos numéricos oscurecería la actividad del estudiante y los caminos por los que ellos piensan cuando hacen matemáticas. Pensamos que si la investigación se centra en el estudio de pocos estudiantes, es posible construir explicaciones detalladas de su actividad.

Para nosotros es importante que los estudiantes relacionen. Las matemáticas no las vemos como un conjunto de hechos y procedimientos aislados que el profesorado transmite a los estudiantes durante la clase sino que hacer Matemáticas es construir relaciones, que sean significativas para la persona que está en esa actividad.

Skemp (1987) expresa la distinción entre comprensión instrumental y relacional. En la comprensión instrumental los estudiantes aprenden «reglas» que se les han enseñado sin razones, por profesorado para el que las matemáticas son obvias, mientras que en la comprensión relacional, los estudiantes cuando trabajan matemáticamente saben qué es lo que están haciendo y por qué. Este trabajo tiene que ver principalmente con la comprensión relacional de las matemáticas y cómo las imágenes y la visualización se usan en esa construcción.

## **CRITERIOS USADOS PARA EVALUAR LAS TAREAS DE IMÁGENES**

1º.- Un factor que nos pareció importante en la realización de estas tareas fue el tiempo total que los estudiantes utilizaban en su ejecución.

Los estudiantes que tenían buena capacidad para visualizar fueron capaces de resolver las tareas en unos pocos segundos, mientras que los que tenían débil capacidad para visualizar realizaron las tareas en muchos minutos o no la realizaron.

El tiempo que los estudiantes utilizaron en resolver la tarea del tangram parecía un buen indicador de la capacidad de visualización de los estudiantes. A los estudiantes visuales les bastaba una sola mirada al modelo y en muchos casos resolvían el problema rápidamente. En contraste, los estudiantes con baja visualización no podían realizar la tarea sino después de varias miradas y a alguno se le tuvo que poner el modelo delante para poder copiarlo y realizar la tarea. Se tuvo en cuenta si el estudiante resolvía la tarea utilizando el modelo girado o el simétrico.

2º.- Otro factor que tuvimos en cuenta en el análisis fue el nº de veces que el estudiante nos pedía que le mostrásemos el modelo. Como en la tarea del tangram, el tiempo y el número de las miradas utilizadas fue también indicativo de la visualización en la tarea del dibujo rápido. La velocidad a la hora de dibujar los modelos no fue importante, sino el número de veces que el estudiante borraba lo que hacía.

3º.- Se tuvo también en cuenta en estas tareas la manera de colocar las piezas del tangram en el modelo. Hubo casos en que un estudiante colocaba las piezas de manera que resultaba el modelo simétrico del propuesto.

## **CRITERIOS EN LOS PROBLEMAS NO RUTINARIOS**

En la evaluación de la resolución de los problemas era importante, en general, más que ver si los estudiantes encontraban o no la respuesta, los caminos en que los resolvían y podían explicar sus respuestas, además de la cantidad de «ayuda» solicitada del investigador.

Ya que el objetivo básico de este trabajo es encontrar el papel que tienen las imágenes mentales y la visualización en la actividad matemática fue necesario desa-

rollar una lista de criterios que nos permitiesen determinar si un estudiante estaba usando sus imágenes en la solución de una tarea matemática.

I.- Considerar si el estudiante utilizó una estrategia visual es quizá un buen indicador del uso de las imágenes, dónde la estrategia visual es aquella que utiliza dibujos, diagramas, tablas, grafos en la solución (Presmeg, N., 1985; Mosés, 1977).

II.- Sin embargo este no puede ser el único criterio, ya que muchos estudiantes con una gran capacidad de visualización, no necesitan dibujar ningún diagrama, sino que pueden resolver el problema contando únicamente con sus imágenes mentales sin necesitar ningún apoyo externo que les ayude en el proceso de resolver el problema.

Teniendo en cuenta esto, se decidió aceptar también otros factores, como indicativos de que el estudiante estaba utilizando imágenes.

a) El primero fue el informe verbal del estudiante de que tenía una «imagen mental» cuando resolvía el problema. Sin embargo, hay casos donde el estudiante no es consciente o no puede expresar si tiene o no una imagen en su cabeza, cuando está resolviendo la tarea, por ello:

b) Se aceptó también como evidencia de que un estudiante estaba utilizando sus imágenes si hizo movimientos con sus manos mientras resolvía una tarea. Presmeg (1985) llamó a este tipo imágenes cinésticas, aquellas que envuelven actividad muscular, normalmente, el uso de manos y dedos.

c) Si relacionó o conectó su solución con otras soluciones u otros tipos de actividad matemática. Las relaciones se establecen en la mente de las personas, no son actos perceptuales. La relación es abstracta y no puede «verse» en el sentido visual.

Son actos cognitivos. Wheatley & Bebout (1990) piensan que cuando se dice que se «ve una relación» lo que se ve es una imagen autoconstruida de la relación.

## CONCLUSIONES

Para concluir diremos que no es el objeto de este artículo hablar de los resultados, algunos ya publicados (Plasencia, I.; Güemes, R. & Espinel, C.: 1996; Plasencia, I.; Dorta, J. & Espinel, C.: 1998). Nuestra pretensión ha sido, solamente, informar de todo el proceso que hemos seguido en la investigación. Sistematizar, con todo rigor, no sólo los instrumentos utilizados sino el tipo de análisis que hemos llevado a cabo.

No queremos, asimismo, dejar pasar la ocasión para dar cuenta de que los estudios de casos son costosos y más aún cuando trabajan en un mismo proyecto profesorado investigador de distintas disciplinas y trayectorias. Todo el proceso requiere llegar a puntos de encuentro para compartir el conocimiento. Esta tarea, a pesar de su coste, es apasionante y recomendable para abrir expectativas y reflexionar sobre lo que está sucediendo en las aulas donde se imparte matemáticas.

## REFERENCIAS

BROWN & WHEATLEY (1990). «*The role of imagery in mathematics reasoning*», Proceedings of the 14<sup>th</sup> PME Conference, Mexico, p. 217.

- BROWN & PRESMEG (1993). *Types of imagery used by elementary and secondary school students in mathematical reasoning*. Proceedings of the XVII PME. Tsukuba City. Japón.
- BROWN, D. (1993). *An Investigation of Imagery and Mathematical Understanding in Elementary School Children*. Unpublished master's thesis. Florida State University. Tallahassee, FL, U.S.A.
- COBB, P. & WHITENACK, J. W. (1996). «A Method for Conducting Longitudinal Analyses of Classroom Videorecordings and Transcripts», *Educational Studies in Mathematics* 30, 213-228.
- DOYLE, W. & CARTER, K. (1984). «Academic Tasks in Classroom», *Curriculum Inquiry*, 14(2), 129-149.
- GOETZ, J. P. & LECOMPTE, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Ediciones Morata.
- GÜEMES, R.: 1994. *Libros de texto y desarrollo del currículo en el aula. Un estudio de casos*. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna. Tenerife. España.
- MOSES, B. E.: 1977, *The nature of spatial ability and its relationship to mathematical problem solving*. Unpublished doctoral dissertation, Indiana University.
- PLASENCIA, I.; GÜEMES, R. y ESPINEL, C.: 1996, *Going deeper into mathematical activity*, presentado en el 20<sup>o</sup> PME (Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education). Valencia. España.
- PLASENCIA, I.; DORTA, J. y ESPINEL, C.: 1998, *Visualización y Creatividad*. Aceptado para publicación en *Educación Matemática*. Méjico.
- PRESMEG, N. C. (1985). *The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation*, Unpublished Ph. D. dissertation, University of Cambridge, England.
- RUIZ OLABUÉNAGA, J. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Universidad de Deusto. Bilbao.
- SKEMP, R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Assoc.
- SOLANO, A. & PRESMEG, N. (1995). *Visualization as the relation of images*. Paper presented at the 19<sup>th</sup> annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education. Recife. Brasil.
- WEISS, R. (1994). *Learning from strangers. The art and method of qualitative interview studies*, New York: The Free Press.
- WHEATLEY, G. H.: 1978, *The Wheatley Test of Spatial Ability*, West Lafayette, IN: Purdue University, U.S.A.
- WHEATLEY, G. & BEBOUT, H. (1990). *Mathematical Knowledge of Young Learners*. In Steffe, P. and Wood, T. (eds.). *Transforming Children's Mathematics Education. International Perspectives*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey.