

Rodríguez-Rojas, P. & Navarrete-Rojas, C. (2025). Fases del efecto del conocimiento del profesorado en el aprendizaje matemático de los estudiantes. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 28(1), 213-227.

DOI: <https://doi.org/10.6018/reifop.634051>

Fases del efecto del conocimiento del profesorado en el aprendizaje matemático de los estudiantes

Palmenia Rodríguez-Rojas, Carlos Navarrete-Rojas

Universidad de La Serena, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Resumen

Las fracciones son comunes en la vida cotidiana y actúan como un predictor del aprendizaje del álgebra. Sin embargo, numerosos estudios revelan que tanto estudiantes como profesores enfrentan dificultades para comprenderlas por lo que siguen siendo un área de investigación desafiante. Este estudio tiene como objetivo examinar cómo el nivel del conocimiento de los docentes sobre las fracciones y su didáctica impacta en el avance del aprendizaje de los estudiantes. Esta investigación se desarrolló a partir de una metodología cuantitativa, y los instrumentos del estudio fueron pruebas estructuradas con preguntas cerradas aplicadas a 634 estudiantes de cuarto grado y 19 docentes de 19 escuelas. Los datos se analizaron utilizando un modelo predictivo Bayesiano. El principal hallazgo de este estudio fue que el efecto del conocimiento de los profesores en el avance del aprendizaje promedio de los estudiantes se manifiesta en tres fases. Es en la tercera fase que dicho efecto se vuelve notable, observándose los mejores resultados tanto en estudiantes como en profesores. Esto sugiere que los maestros bien informados sobre las fracciones y su enseñanza pueden afectar positiva y sustancialmente el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes.

Palabras clave

Enseñanza de las Matemáticas; profesorado de primaria; aprendizaje; educación.

Contacto:

Palmenia Rodríguez Rojas, prodriguez@userena.cl, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de La Serena. La Serena, Chile.

Phases of the effect of teacher knowledge on students' mathematical learning.

Abstract

Fractions are common in everyday life and act as a predictor of algebra learning. However, numerous studies reveal that both students and teachers face difficulties in understanding them, so they remain a challenging area of research. This study aims to examine how the level of teacher knowledge about fractions and their teaching impacts on the progress of students' learning. This research was developed from a quantitative methodology, and the study instruments were structured tests with closed questions applied to 634 fourth grade students and 19 teachers from 19 schools. The data were analyzed using a Bayesian predictive model. The main finding of this study was that the effect of teachers' knowledge on average student learning progress manifests itself in three phases. It is in the third phase that this effect becomes noticeable, with the best results observed in both students and teachers. This suggests that teachers who are well informed about fractions and their teaching can positively and substantially affect students' mathematics learning.

Key words

Math teaching; Primary school teachers; learning; education.

Introducción

La investigación sobre la formación del profesorado ha resaltado la complejidad inherente al trabajo docente y la importancia crucial de los conocimientos necesarios para una enseñanza eficaz (Ball et al., 2008). En las últimas décadas, se han logrado avances significativos en la comprensión del conocimiento necesario para ser efectivo en el aula. Shulman (1986) fue pionero al presentar un modelo con tres componentes esenciales para la enseñanza: el conocimiento del contenido (CC), el conocimiento pedagógico del contenido (CPC) y el conocimiento curricular. El CC se refiere al dominio del tema específico que se enseña. El CPC combina el CC con el conocimiento pedagógico, enfocándose en cómo enseñar un tema de manera que los estudiantes puedan comprenderlo. El conocimiento curricular, por su parte, se refiere a la organización de los temas del currículo escolar a lo largo del tiempo.

El trabajo de Shulman (1986) atrajo la atención de los investigadores y los llevó a refinar aún más el modelo presentado por él. En el contexto de la educación matemática, Ball et al. (2008) subrayan la necesidad de identificar y organizar diferentes componentes del conocimiento matemático que se enseña en las escuelas, para integrarlos en programas de formación docente. A través de la práctica de los profesores, Ball y su equipo identificaron conocimientos esenciales para la enseñanza, como el uso de representaciones eficaces, la precisión en los conceptos matemáticos escolares y la comprensión de estrategias inusuales utilizadas por los estudiantes. La interpretación de los datos de su investigación condujo al desarrollo del modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés).

El modelo MKT se compone de dos constructos principales, el CC y el CPC. El CC incluye el conocimiento común del contenido, que abarca el conocimiento matemático compartido con otras ocupaciones que también utilizan matemáticas; el conocimiento especializado del

contenido, que se aplica específicamente en la enseñanza de la matemática y es exclusivo del ámbito docente; y el conocimiento del horizonte matemático, que implica entender cómo se interrelacionan los temas matemáticos a través de los distintos niveles del currículo. Por su parte, el CPC abarca el conocimiento de los estudiantes y el contenido matemático, que incluye errores comunes, dificultades y estrategias utilizadas por los estudiantes; el conocimiento de la enseñanza del contenido, que se refiere a la comprensión pedagógica y matemática del docente; y el conocimiento curricular, que trata sobre la organización de los temas matemáticos dentro del currículo escolar. Actualmente, el modelo MKT ha sido ampliamente utilizado para explorar el conocimiento profesional docente, consolidándose como un referente a nivel internacional.

Con el propósito de operacionalizar el CC y el CPC, algunos investigadores han diseñado pruebas válidas para una medición fiable. Sin embargo, medir el conocimiento del docente es una tarea difícil, dado que teóricamente dicho conocimiento ha sido modelado como un constructo multidimensional (Ball et al., 2008). Sin embargo, los estudios con docentes de primaria indican que el CC y el CPC conforman un constructo unidimensional (Copur-Gencturk y Tolar, 2022).

Hill et al. (2005) fueron pioneros en medir el CC y el CPC de los profesores, y asociarlo con el rendimiento matemático de estudiantes de primer y tercer grado en escuelas de Estados Unidos. Sus resultados demostraron que tanto el CC como el CPC tienen un efecto positivo en el rendimiento estudiantil. Sin embargo, los análisis del estudio sugieren que el efecto del conocimiento del profesorado en el rendimiento matemático de los estudiantes no sigue una relación lineal, se presenta en fases.

Posterior al trabajo de Hill et al. (2005), se han encontrado resultados similares (Baumert et al., 2010; Cueto et al., 2017; Kelcey et al., 2019; Tchoshanov et al., 2017; Yang et al., 2021). La mayoría de estos estudios se llevaron a cabo en Estados Unidos o en algunos países de Europa. En Latinoamérica, hay poca evidencia cuantitativa disponible hasta la fecha, y es aún más escasa en el tema de las fracciones. En Chile, dos estudios cuantitativos muestran que el conocimiento del profesor acerca de las fracciones y su enseñanza influye en el aprendizaje de estudiantes de cuarto grado (Rodríguez-Rojas, 2023; Rodríguez-Rojas y Navarrete-Rojas, 2020). Sin embargo, hasta la fecha, no se han reportado estudios que examinen en detalle cómo el conocimiento de los profesores influye en el aprendizaje de los estudiantes en el ámbito de las fracciones.

Este estudio se enfoca en las fracciones, un tema importancia para el ámbito de la matemática educativa. Las fracciones se presentan en la vida cotidiana, predicen el aprendizaje del álgebra y por ende se asocian con matemáticas más avanzadas (Schoen et al., 2024; Stelzer et al., 2021; Xu et al., 2024). Sin embargo, numerosas investigaciones han informado que el concepto de fracción es una noción matemática difícil de comprender (González-Forte y Fernández, 2024; Xu et al., 2022).

¿Por qué comprender las fracciones es tan difícil? En parte, la respuesta radica en su complejidad, ya que el concepto de fracción abarca diversos subconstructos fundamentales para entender completamente su significado y aplicaciones. Por ejemplo, $\frac{2}{5}$ puede interpretarse de varias maneras: como parte-todo (dos de cinco partes iguales de un todo), como medida (la suma de dos unidades de medida $\frac{1}{5}$), como cociente (dos dividido por cinco), como operador (dos quintos de una cantidad) y como razón (dos es a cinco).

El subconstructo parte-todo se ha considerado fundamental para el desarrollo de los otros subconstructos y predomina en la mayoría de los textos escolares de matemáticas (Jiang et al., 2021). Las fracciones se introducen con parte-todo utilizando figuras geométricas o imágenes de chocolates, tortas o pizzas, lo cual resulta fácil de entender para los estudiantes.

Sin embargo, más adelante esta idea se convierte en un obstáculo para la comprensión de fracciones mayores que uno. Aunque parte-todo puede ser la base para la comprensión de otros subconstructos, no es suficiente para lograr una comprensión profunda de las fracciones (Reeder y Utley, 2017). Por otra parte, el subconstructo medida se representa por medio de rectas numéricas, esta representación resulta ser menos intuitiva para los alumnos, por ende, más compleja (Jiang et al., 2021).

Las investigaciones indican que tanto estudiantes como profesores obtienen mejores resultados en tareas relacionadas con el concepto de parte-todo, mientras que su conocimiento en otros subconstructos es limitado. Las tareas que involucran el subconstructo de medida suelen ser más desafiantes (Copur-Gencturk, 2021; Jiang et al., 2021). Estos hallazgos plantean un reto, ya que los investigadores sugieren que una enseñanza centrada en el subconstructo medida es esencial para lograr un aprendizaje efectivo en fracciones (Bruce et al., 2023; Copur-Gencturk, 2022; Schoen et al., 2024).

Basado en los antecedentes mencionados, este estudio tiene como objetivo examinar cómo el nivel de conocimiento del docente sobre las fracciones y su enseñanza impacta en el avance del aprendizaje de los estudiantes. Para este trabajo, el conocimiento sobre las fracciones se considera parte del CC especializado de los profesores y se define como un conocimiento profundo, es decir, conceptual y conectado, que abarca la comprensión de: parte-todo, operador, medida y cociente (Kieren, 1976; Ma, 1999).

El conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones es un componente del CPC de los docentes. Este saber didáctico matemático incluye la identificación de errores comunes, las dificultades que enfrentan los estudiantes y las estrategias que utilizan para resolver problemas (Hill et al., 2008). Nos preguntamos si el efecto del CC y el CPC de los profesores en el avance del aprendizaje de los estudiantes sigue una relación lineal. Tal vez solo los profesores con mayor conocimiento imparten una enseñanza de las fracciones más eficaz; alternativamente, podría ser que incluso los profesores con menos conocimiento tengan algún efecto en el rendimiento matemático de los estudiantes.

Para estimar correctamente el efecto del profesorado en el rendimiento estudiantil es importante controlar las posibles variables confusoras. En los estudios sobre eficacia educativa se considera central incluir los conocimientos previos del estudiantado y variables del contexto escolar para garantizar comparaciones justas (Blömeke et al., 2022). En este estudio se incluye la variable conocimientos previos del estudiantado y las variables contextuales: NSE (Nivel Socioeconómico), dependencia del establecimiento (municipal y particular subvencionado) y el promedio en las pruebas de matemáticas SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación) de la escuela.

Se plantean los siguientes objetivos específicos:

1. Determinar la relación entre la dependencia del establecimiento educativo, el NSE y los resultados de la prueba de matemáticas SIMCE.
2. Determinar la relación entre el conocimiento del docente sobre las fracciones y el conocimiento sobre su enseñanza.
3. Determinar el tipo de asociación (lineal o no lineal) entre el avance del aprendizaje por estudiante y las dimensiones conocimiento sobre las fracciones y conocimiento sobre su enseñanza, tanto por separado como de manera conjunta.
4. Evaluar el efecto de la dependencia del colegio como modificador de la incidencia del conocimiento del docente sobre las fracciones y su enseñanza en el avance del aprendizaje de los estudiantes, y su posible asociación con características sociales y económicas del entorno.

En el presente estudio se asumen los siguientes supuestos, los cuales determinarán consecuentemente el modelamiento estadístico de los datos y la posterior interpretación de los resultados.

Supuesto 1. Hay una relación complementaria entre el conocimiento sobre las fracciones y el conocimiento sobre su enseñanza. Consideramos como medida de esta relación complementaria la suma de las puntuaciones de las pruebas conocimiento de las fracciones y conocimiento sobre su enseñanza para cada docente. Llamaremos CFE (Conocimiento sobre las Fracciones y su Enseñanza) a esta medición.

Supuesto 2. El efecto del CFE en el aprendizaje de los estudiantes, se diferencia en tres fases:

Fase 1. El docente se encuentra en una etapa inicial de perfeccionamiento, explorando nuevas metodologías para mejorar el aprendizaje de los estudiantes. El efecto de esta preparación es directamente proporcional en el progreso de los alumnos. Estimamos *a priori* que esta fase corresponde aproximadamente al primer tercio de la escala CFE.

Fase 2. El docente ha recibido una formación inicial de perfeccionamiento, pero las dificultades en la implementación de cambios metodológicos y la búsqueda de condiciones propicias en el entorno laboral provoca un estancamiento en el avance, más allá de lo explicado por la primera fase.

Fase 3. Suponemos *a priori* que esta etapa se presenta alrededor del último tercio de la escala CFE. En esta fase, los profesores han alcanzado una madurez en su perfeccionamiento y han conseguido implementar sus conocimientos en su práctica profesional. Se aprecia nuevamente un efecto directo en el avance del aprendizaje de los estudiantes.

Metodología

Diseño

Esta investigación fue desarrollada desde una metodología cuantitativa con un diseño *ex post facto*. Los instrumentos del estudio fueron pruebas estructuradas con preguntas cerradas aplicadas a los estudiantes y a los profesores.

Participantes y selección de la muestra

En el estudio participaron 634 estudiantes de 4° grado y 19 docentes de 19 establecimientos escolares (6 municipales y 13 particulares subvencionados) correspondiente aproximadamente al 10% de la población de las escuelas urbanas de la región de Coquimbo, Chile. Los docentes tienen el título de profesor o de profesora de enseñanza básica, esto quiere decir que dictan clases de todas las asignaturas incluyendo matemáticas. Los grupos de estudiantes se obtuvieron de un muestreo no probabilístico con participación voluntaria (Tabla 1). Del total de docentes 16 son mujeres y 3 hombres y en promedio tienen 13 años de experiencia, con un mínimo de 2 años y un máximo de 34 años.

Tabla 1.

<i>Tipos de escuela y alumnos por escuela</i>		
Escuelas	Tipo	Alumnos
E1	P-Sub	28
E2	P-Sub	48
E3	P-Sub	47
E4	P-Sub	58
E5	P-Sub	18

E6	Mun	9
E7	Mun	26
E8	P-Sub	113
E9	Mun	31
E10	Mun	19
E11	P-Sub	11
E12	P-Sub	35
E13	P-Sub	62
E14	Mun	21
E15	P-Sub	30
E16	P-Sub	41
E17	Mun	17
E18	P-Sub	7
E19	P-Sub	13
Total	19	634

Fuente: Elaboración propia.

Instrumentos

Para la recopilación de datos, se utilizó una prueba para los estudiantes, compuesta por 22 preguntas cerradas, enmarcada en los contenidos curriculares de la unidad de “Fracciones” (Mineduc, 2013). La prueba se aplicó a 634 estudiantes al inicio y al final del año escolar. La prueba fue validada por jueces expertos en el tema de didáctica de las fracciones y se aplicó a una muestra piloto de 300 estudiantes de cuarto grado. Se obtuvo un coeficiente alfa de Cronbach de .78.

Se aplicaron dos pruebas para el profesorado: una sobre el conocimiento profundo de las fracciones, que constaba de 10 preguntas cerradas, y otra sobre la enseñanza de las fracciones, con 13 preguntas cerradas. Ambas enmarcadas en los contenidos curriculares (Mineduc, 2013). Las pruebas fueron validadas por expertos en didáctica de las fracciones y se administraron a una muestra piloto de 80 docentes de primaria. Se obtuvo un coeficiente alfa de Cronbach de .75 para ambas pruebas.

Variables contextuales

NSE: Nivel socioeconómico medio de las familias y nivel educacional de los padres. El estudio considera dos grupos: NSE bajo y NSE alto. En el grupo NSE bajo, los apoderados declararon tener hasta 10 años de escolaridad y un ingreso de hasta 340.000 pesos chilenos. En el grupo NSE alto los apoderados declararon tener entre 13 y 15 años de escolaridad y un ingreso entre 550.001 y 1.250.000 pesos chilenos. Los puntajes NSE se encuentran disponible en línea.

SIMCE: Puntaje promedio obtenido por la escuela en las pruebas de matemáticas SIMCE realizadas en el país, que miden el logro de aprendizaje en la asignatura de matemáticas, abarcando los contenidos de tercer y cuarto grado. Los puntajes de la prueba SIMCE se encuentran disponibles en línea.

Dependencia del establecimiento: Municipal, se financia con aporte del Estado y particular subvencionado, se financia con aporte del Estado y de los padres, madres y apoderados, a través de una mensualidad.

Procedimiento

Para administrar las pruebas a los alumnos, se solicitó autorización a los directores, profesores y apoderados. Las pruebas fueron aplicadas por un ayudante del proyecto durante las jornadas de clases, otorgando a los alumnos 60 minutos para completarlas. La prueba destinada a los profesores se administró en una sala específica, concediéndoles 70 minutos para responder.

Resultados

Análisis de datos

En este estudio, se consideró como variable respuesta el avance del aprendizaje de los alumnos en fracciones (Avance), como variable predictora el conocimiento del profesor, que incluye tanto el conocimiento sobre las fracciones como el conocimiento de su enseñanza (CFE), y como variable control la dependencia del establecimiento (Municipal/Particular Subvencionado). La dependencia de cada establecimiento resume diferencias sistémicas de larga data en las condiciones en las que se imparte la docencia. Estas condiciones incluyen realidades sociales y económicas de los estudiantes, condiciones laborales de los profesores, sistemas administrativos diferentes, etc. Otras variables que capturan esencialmente las mismas diferencias son el puntaje de la prueba SIMCE y el NSE promedio de las familias de los estudiantes. La tabla 2 evidencia las altas correlaciones entre las variables contextuales SIMCE, NSE y dependencia. Por un criterio de parsimonia, hemos considerado la dependencia del establecimiento como variable de control para tener en cuenta estas diferencias.

Tabla 2.

Correlaciones entre las variables contextuales

N = 634	SIMCE	NSE
Dependencia	.53(**)	.73(**)
SIMCE		.75(**)

Nota. Correlación Pearson bilateral; ** $p < .01$

La Tabla 3 evidencia que las correlaciones entre el CFE del profesor, conocimiento de las fracciones (CF) y sobre la enseñanza (CE) fueron positivas, altas y significativas.

Tabla 3.

Correlaciones entre las variables del profesorado

N = 634	CF	CE
CFE	.91(**)	.91(**)
CF		.65(**)

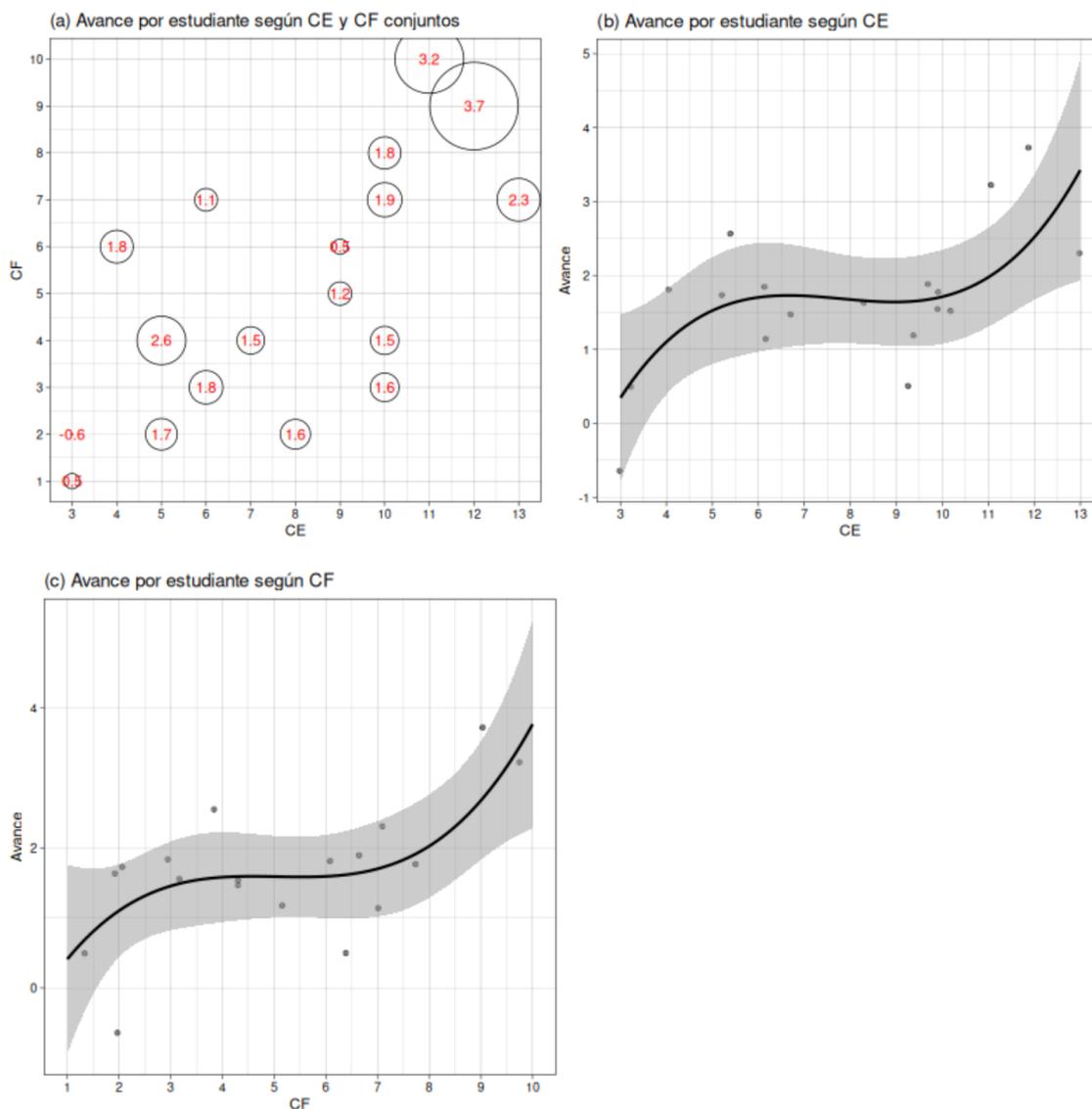
Nota. Correlación Pearson bilateral; ** $p < .01$

La figura 1 evidencia el avance del aprendizaje en fracciones en función del conocimiento del profesor sobre las fracciones y su enseñanza, presentando los siguientes hallazgos: los círculos en (a) representan conjuntamente el CE (eje X) y CF (eje Y) para cada docente participante. El radio de los círculos es proporcional al avance promedio de los estudiantes.

En (b) y (c) se representa el Avance promedio de los estudiantes por docente, de acuerdo al CE y CF, respectivamente. Se ajusta curva *spline* cúbica con fines descriptivos.

Figura 1.

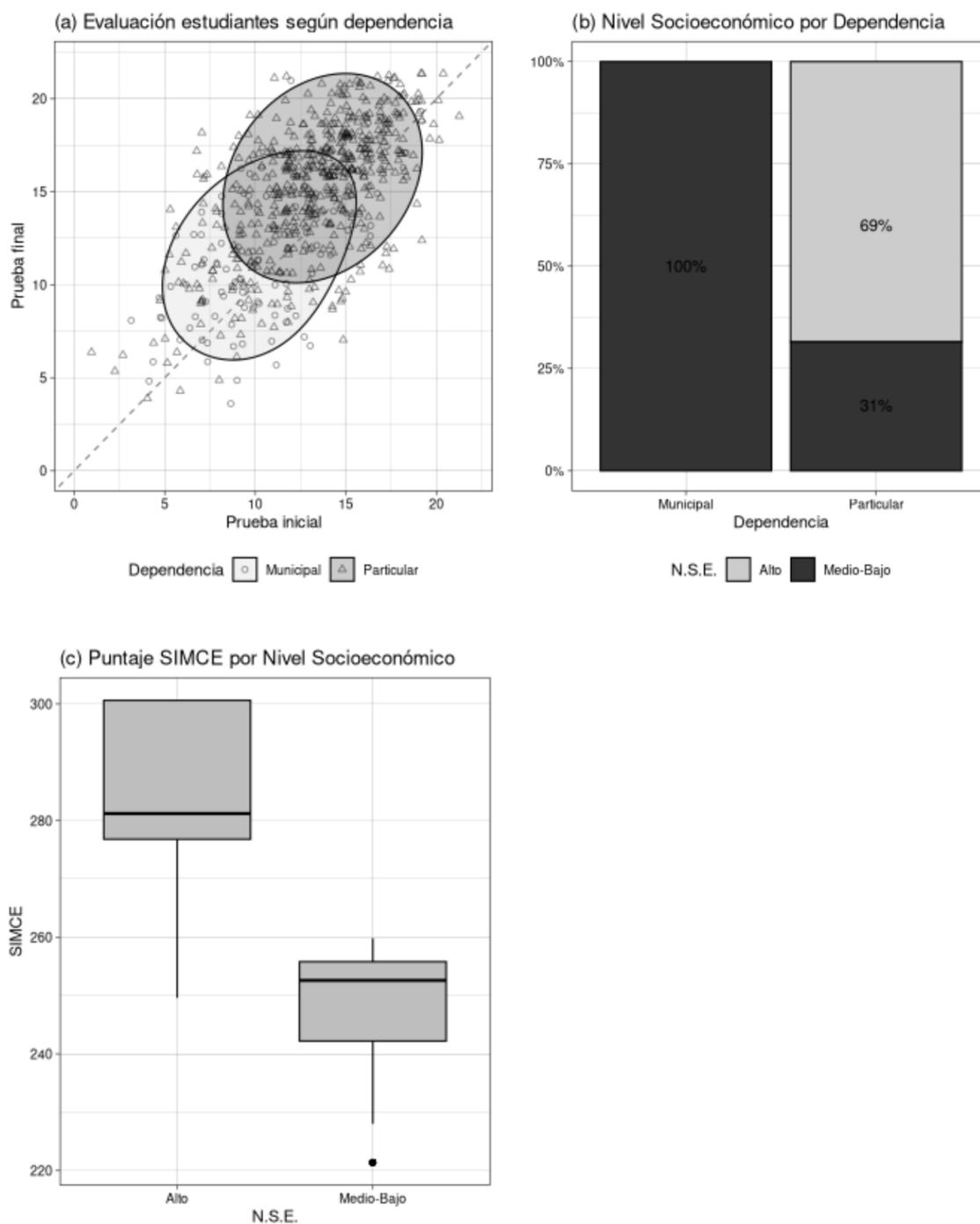
Avance de aprendizaje en fracciones según CE y CF del profesor



La figura 2 evidencia los siguientes hallazgos: (a) muestra las diferencias en puntaje inicial y final por estudiante de acuerdo a dependencia del colegio, las elipses representan ajuste de densidad conjunta, con fines descriptivos. En (b) se presentan las diferencias por nivel socioeconómico entre las dependencias Municipal y Particular, y en (c) se observa que el nivel socioeconómico promedio de los colegios representa una diferencia notable ($p < 0.001$) en cuanto al puntaje SIMCE en matemáticas (Figura 2).

Figura 2.

Variables de ajuste dependencia del colegio, NSE y SIMCE



Modelo predictivo Bayesiano

En un modelo Bayesiano, el conocimiento previo y las hipótesis de la investigación se traducen en la especificación de distribuciones de probabilidad *a priori* para los parámetros.

Función de verosimilitud

Modelamos el avance esperado de los estudiantes en función del puntaje de CFE considerando tres fases dadas por los intervalos definidos por $0 \leq a < b \leq 23$, donde a y b son puntos de corte indeterminados en el puntaje CFE. Sea Y_i el Avance del estudiante i , X_i el CFE y D_i la dependencia del establecimiento (0 Municipal y 1 Particular Subvencionado), entonces suponemos $Y_i|X_i, D_i \sim N(\mu_i, \sigma_P D_i + \sigma_M(1 - D_i))$ con

$$\mu_i = \begin{cases} \alpha x_i + \beta + \delta D_i, & 0 \leq x_i < a \\ \alpha a + \beta + \delta D_i, & a \leq x_i < b \\ \alpha a + \beta + \delta D_i + B(x_i - b), & b \leq x_i \end{cases}$$

Los coeficientes de regresión tienen la siguiente interpretación:

β es el nivel del Avance basal esperado para los estudiantes de colegios municipales.

δ es la diferencia promedio en dicha respuesta como comparación de colegio particular subvencionado en relación a uno municipal.

α es el Avance promedio atribuible al incremento en una unidad del puntaje CFE para la primera etapa, mientras que el coeficiente B tiene la interpretación análoga para la tercera etapa.

Los parámetros σ_P y σ_M dan cuenta de las diferentes varianzas para la dependencia particular subvencionado y municipal, respectivamente. La especificación *a priori* para a es Normal de media 7 y desviación estándar 1; para b se considera una Normal de media 16 y desviación estándar 1. El resto de los parámetros tiene especificación vagamente informativa.

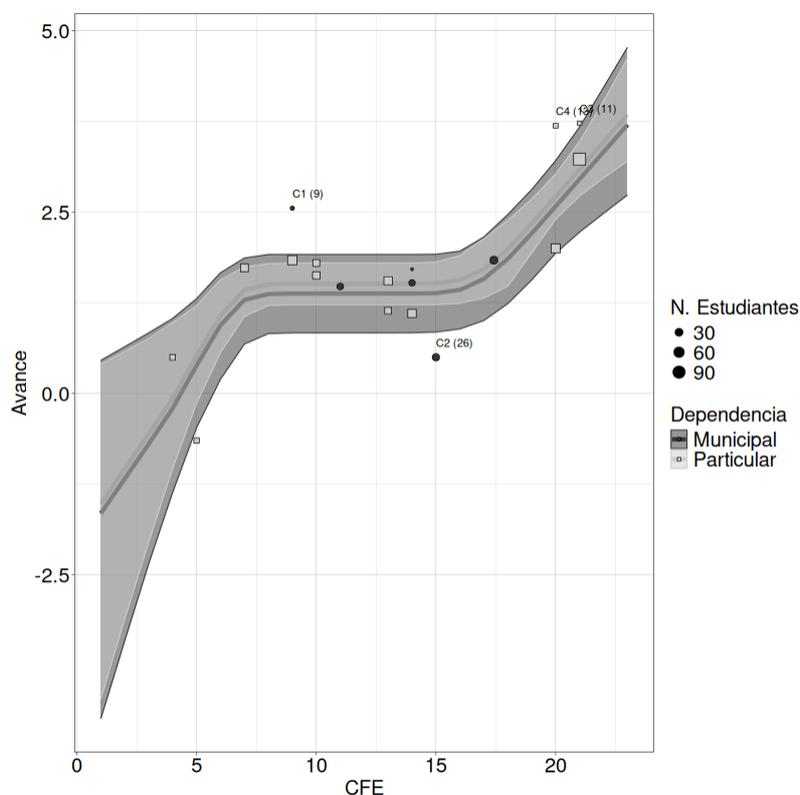
En la tabla 5 se presenta la distribución a posteriori de parámetros.

Tabla 5.

<i>Distribución a posteriori de parámetros</i>				
Parámetro	Media	E. E	P05	P95
a	6.8	0.8	5.51	8.12
b	16.5	1.0	14.90	18.21
α	0.5	0.9	0.16	1.11
β	-2.1	4.1	-5.54	0.30
δ	0.1	0.4	-0.48	0.74
B	0.4	0.1	0.21	0.63
σ_P	2.9	0.1	2.74	3.04
σ_M	3.4	0.2	3.06	3.81

La figura 3 evidencia el efecto del CFE del profesorado en el avance promedio de los estudiantes, el cual se presenta en tres fases (Figura 3). Los colegios E6, E7, E11 y E19 muestran resultados fuera de lo esperado.

Figura 3.
Tres fases del efecto del CFE del profesorado



Discusión y conclusiones

El principal hallazgo de este estudio fue que el efecto del conocimiento de los profesores sobre las fracciones y su enseñanza en el avance del aprendizaje de los estudiantes se presenta en tres fases. En la primera fase se observa que a partir de 6.8 puntos en promedio de la prueba conocimiento de las fracciones y su enseñanza, el avance de los estudiantes empieza a ser significativo, la segunda fase está comprendida entre 6.8 y 16.5 puntos de la prueba. Si bien se aprecia avance por parte de los estudiantes, pareciera ser que los docentes están en un proceso de evolución o asentamiento del conocimiento. En la tercera fase, a partir de los 16.5 puntos de la prueba, el efecto del conocimiento sobre las fracciones y su enseñanza es notorio en el avance del aprendizaje y se observan los mejores resultados tanto en estudiantes como en profesores. Este hallazgo está en concordancia con el estudio de Hill et al. (2005), quienes encontraron que el efecto del conocimiento del profesorado de primaria en el rendimiento matemático de los estudiantes no sigue una relación lineal, se presenta en fases.

Se estudiaron las correlaciones entre las variables. Se observó que las correlaciones entre el nivel socioeconómico y la prueba de matemática SIMCE, el nivel socioeconómico y dependencia del colegio fueron positivas, altas y significativas ($r = .75$, $p < .01$; $r = .73$, $p < .01$ respectivamente). Esto está en consonancia con el reporte de estudios análogos que abordan el tema de las fracciones (Rodríguez-Rojas y Navarrete-Rojas, 2020; Rodríguez-Rojas 2023). La correlación entre el conocimiento del profesorado y el avance del aprendizaje de las fracciones por parte del alumnado fue positiva, débil pero significativa ($r = .21$, $p < .01$). En la literatura se han informado resultados similares sobre la relación entre el conocimiento del

profesorado y el rendimiento de los estudiantes en matemáticas (Cueto et al., 2017; Hill et al., 2005; Rodríguez-Rojas y Navarrete-Rojas, 2020; Rodríguez-Rojas, 2023; Tchoshanov et al., 2017).

La correlación entre el conocimiento profundo sobre las fracciones y el conocimiento sobre la enseñanza fue positiva, alta y significativa ($r = .65$, $p < .01$). Este resultado está en línea con lo que informa la literatura, el CC y CPC de los docentes de primaria conforman un constructo unidimensional (Copur-Gencturk y Tolar, 2022).

En la prueba sobre las fracciones para los estudiantes ($n=634$), las preguntas más fáciles de responder correctamente fueron las relativas a parte-todo y las más complejas fueron las relativas al subconstructo medida (ubicación de fracciones en la recta numérica y comparación de fracciones con distinto denominador). Estos resultados fueron similares a los reportados en otras investigaciones (Copur-Gencturk, 2021; Jiang et al., 2021).

En la prueba sobre las fracciones y su enseñanza para el profesorado ($n=19$), las preguntas más fáciles de responder correctamente fueron las relacionadas con parte-todo, mientras que las más difíciles correspondieron al subconstructo medida. En cuanto a la dimensión de conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones, las preguntas más sencillas para el profesorado fueron las que implicaban identificar estrategias y dificultades comunes del estudiantado, y las más complicadas abordaron el conocimiento de errores comunes. Estos resultados indican que algunos docentes presentan una comprensión limitada de las fracciones y su enseñanza, lo cual es consistente con lo reportado en la literatura (Copur-Gencturk, 2021; Jiang et al., 2021).

Se constató que el conocimiento del profesorado sobre las fracciones y su enseñanza tiene un efecto positivo en el avance de aprendizaje de los estudiantes de cuarto grado, pero dicho efecto no es lineal, se refleja en tres fases. Esto sugiere que los maestros bien informados pueden influir positivamente en el aprendizaje de las matemáticas. Los hallazgos de este estudio indican que los docentes con menor conocimiento podrían ser los que más se beneficien de una capacitación. Es fundamental apoyar a estos docentes, especialmente en temas matemáticos complejos que son difíciles de enseñar y de aprender, como las fracciones.

Se confirmó que el conocimiento del profesorado sobre las fracciones y su enseñanza tiene un efecto positivo en el avance del aprendizaje de los estudiantes de cuarto grado. Sin embargo, este efecto no es lineal y se manifiesta en tres fases distintas, lo que sugiere que los maestros bien informados pueden influir significativamente en el aprendizaje de las matemáticas. Además, los hallazgos indican que los docentes con menor conocimiento podrían beneficiarse de una capacitación específica sobre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en el contexto escolar.

Los resultados de este artículo se suman a otras investigaciones que estimaron la incidencia del conocimiento del profesor en el aprendizaje de los estudiantes en matemáticas (Baumert et al., 2010; Hill et al., 2005; Kelcey et al., 2019; Rodríguez-Rojas y Navarrete-Rojas, 2020; Rodríguez-Rojas, 2023; Tchoshanov et al., 2017). No obstante, se diferencia de estudios previos porque explora cómo el conocimiento de los docentes sobre las fracciones y su enseñanza contribuye al avance de aprendizaje de los estudiantes. En consecuencia, el trabajo constituye un aporte a la investigación sobre el efecto del conocimiento de los docentes en el aprendizaje matemático del alumnado.

Con estos resultados se podría iniciar una nueva línea de investigación enfocada en analizar las prácticas en el aula de los profesores, especialmente en el tema de las fracciones. Surgen naturalmente las siguientes preguntas: ¿Cómo afecta el conocimiento de los docentes en la

planificación de las clases? ¿Qué métodos de enseñanza emplean los profesores efectivos? ¿Qué materiales didácticos utilizan en el aula? ¿Cómo interactúan con los estudiantes? Investigaciones previas sugieren que los docentes bien informados proporcionan mejores explicaciones matemáticas, construyen representaciones más sólidas y comprenden mejor las estructuras subyacentes de las matemáticas escolares (Ball et al., 2008; Ma, 1999). La investigación sobre la enseñanza de alta calidad en el aula puede contribuir a una comprensión más profunda del papel del conocimiento profesional de los docentes.

Referencias

- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. y Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133-180. <https://doi.org/10.3102/0002831209345157>
- Blömeke, S., Jentsch, A., Ross, N., Kaiser, G. y König, J. (2022). Opening up the black box: Teacher competence, instructional quality, and students' learning progress. *Learning and Instruction*, 79(101600). <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2022.101600>
- Bruce, C. D., Flynn, T., Yearley, S. y Hawes, Z. (2023). Leveraging number lines and unit fractions to build student understanding: insights from a mixed methods study. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 23(2), 322-339. <https://doi.org/10.1007/s42330-023-00278-x>
- Copur-Gencturk, Y. y Tolar, T. (2022). Mathematics teaching expertise: A study of the dimensionality of content knowledge, pedagogical content knowledge, and content-specific noticing skills. *Teaching and Teacher Education*, 114(103696). <https://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103696>
- Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 107, 525-545. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10033-4>
- Copur-Gencturk, Y. (2022). Teachers' knowledge of fraction magnitude. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(5), 1021-1036. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10173-2>
- Cueto, S., León, J., Sorto, M. A. y Miranda, A. (2017). Teachers' pedagogical content knowledge and mathematics achievement of students in Peru. *Educational Studies in Mathematics*, 94(3), 329-345. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9735-2>
- González-Forte, J. M. y Fernández, C. (2024). Razonamientos de estudiantes en tareas de comparación, ordenación y representación de fracciones y números decimales. *PNA*, 18(2), 131-160. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i2.27218>
- Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406. <https://doi.org/10.3102/00028312042002371>
- Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students.

- Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
<https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372>
- Jiang, Z., Mok, I. A. C. y Li, J. (2021). Chinese Students' Hierarchical Understanding of Part-whole and Measure Subconstructs. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 1441-1461. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10118-1>
- Kelcey, B., Hill, H. C. y Chin, M. J. (2019). Teacher mathematical knowledge, instructional quality, and student outcomes: a multilevel quantile mediation analysis. *School Effectiveness and School Improvement*, 30(4), 398 - 431. <https://doi.org/10.1080/09243453.2019.1570944>
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: papers from a research workshop* (pp. 101-144). ERIC/SMEAC. <https://eric.ed.gov/?id=ED120027>
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum.
- Ministerio de Educación. (2013). *Matemática: Programa de Estudio Cuarto Año Básico*. (1a ed.). <https://hdl.handle.net/20.500.12365/644>
- Reeder, S. y Utey, J. (2017). What is a fraction? Developing fraction understanding in prospective elementary teachers. *School Science and Mathematics*, 117(7-8), 307-316. <https://doi.org/10.1111/ssm.12248>
- Rodríguez-Rojas, P. y Navarrete-Rojas, C. (2020). Influencia del conocimiento profundo del profesor sobre fracciones en el aprendizaje de alumnos de 4o. grado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 22(e10), 1-18. <https://doi.org/10.24320/redie.2020.22.e10.2285>
- Rodríguez-Rojas, P. (2023). Las fracciones: conocimiento del profesorado y su contribución en la enseñanza para el estudiantado de cuarto grado en escuelas chilenas. *Innovaciones Educativas*, 25(38), 23-35. <https://doi.org/10.22458/ie.v25i38.4549>
- Schoen, R. C., Lewis, C. C., Rhoads, C., Lai, K. y Riddell, C. M. (2024). Impact of Lesson Study and Fractions Resources on Instruction and Student Learning. *The Journal of Experimental Education*, 92(2), 225-246. <https://doi.org/10.1080/00220973.2023.2183374>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Stelzer, F., Richard's, M. M., Andrés, M. L., Vernucci, S. y Introzzi, I. (2021). Cognitive and maths-specific predictors of fraction conceptual knowledge. *Educational Psychology*, 41(2), 172-190. <https://doi.org/10.1080/01443410.2019.1693508>
- Tchoshanov, M., Cruz, M. D., Huereca, K., Shakirova, K., Shakirova, L. y Ibragimova, E. N. (2017). Examination of lower secondary mathematics teachers' content knowledge and its connection to students' performance. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(4), 683-702. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9703-9>
- Xu, C., Li, H., Di Lonardo Burr, S., Si, J., LeFevre, J. A. y Huang, B. (2022). Divide and conquer: Relations among arithmetic operations and emerging knowledge of fraction notation for Chinese students in grade 4. *Journal of Experimental Child Psychology*, 217(105371). <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2021.105371>

- Xu, C., Di Lonardo Burr, S., Li, H., Liu, C. y Si, J. (2024). From whole numbers to fractions to word problems: Hierarchical relations in mathematics knowledge for Chinese Grade 6 students. *Journal of Experimental Child Psychology*, 242 (105884). <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.105884>
- Yang, X., Kaiser, G., König, J. y Blömeke, S. (2021). Relationship Between Chinese Mathematics Teachers' Knowledge and Their Professional Noticing. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 815–837. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10089-3>