

LA TUTORIZACIÓN HUMANA Y ARTIFICIAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Artificial and human tutoring in mathematics problem solving

Pedro Cobo¹

Departament de Matemàtiques
Institut d'Ensenyament Secundari Pius Font i Quer
pcobo@pie.xtec.es

Jos ep M. Fortuny

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
josepmaria.Fortuny@uab.es

Resumen: En esta comunicación analizamos las formas de interactuar de un sistema tutorial multiagente, al que llamamos *AGENTGEOM*, con un alumno en la resolución de un problema que compara áreas de superficies planas. En esta interacción, el alumno llega a apropiarse de habilidades estratégicas y argumentativas en la resolución de problemas. Observamos que estas apropiaciones son consecuencia de las formas de comunicación alumno-*AGENTGEOM*, en las que se combinan construcciones gráficas y sentencias escritas que siguen las normas del lenguaje matemático, y la emisión de mensajes escritos en lenguaje natural.

Palabra clave: Educación *online*, tutorización, interacción, prácticas educativas mediadas por las TIC, didáctica de la matemáticas.

Abstract: In this paper, we will analyse the interaction ways of a multiagent tutoring system, that we call *AGENTGEOM*, with a student in the resolution of a mathematical problem that compares flat surface areas. In this interaction, the student is able to appropriate strategic and arguing skills in the problem solving. We notice that these appropriations are a consequence of the student-*AGENTGEOM* communication ways, since in them there is a combination of graphic constructions and written sentences, which follow mathematical language laws, and written languages in natural language.

Key words: Online learning, tutoring, Interaction, ICT-mediated educational practices.

¹ Pedro Cobo ha contribuido al desarrollo de esta investigación gracias a una licencia de estudios concedida por el *Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya* (DOGC núm. 3926 de 2003-07-16).

Introducción

Los avances en la aplicación de las nuevas tecnologías y las recientes investigaciones en Didáctica de la Matemática abren vías para mejorar la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, facilitando, al mismo tiempo, la gestión de dichos procesos por parte del profesorado, y la adquisición de competencias básicas por parte del alumnado de enseñanza secundaria y universitario. Entre esas competencias básicas consideramos las estrategias de resolución de problemas de matemáticas, las de comunicación mediante el lenguaje matemático, las de argumentación, y el desarrollo de las capacidades de razonamiento y abstracción. La adquisición de estas competencias está asociada a la diversificación de alumnos con la que nos encontramos actualmente en las aulas o fuera de ellas, y a la necesidad que tenemos de atenderlos a todos de una forma cada vez más personalizada.

La solución que proponemos para conseguir que el profesor pueda atender con mayor eficacia a esta diversificación de alumnos está en la línea de simultanear, en la enseñanza de las matemáticas, la tutorización artificial y la humana en entornos asistidos por ordenador (Cobo y Fortuny, 2000; Fortuny y Murillo, 1999; Richard, 2003). Concretamente, proponemos la aplicación del sistema tutorial multiagente *AGENTGEOM*, que hemos elaborado sobre una arquitectura web y al que podemos acceder mediante un protocolo http¹.

En esta investigación analizamos la evolución de las interacciones de un alumno con el *AGENTGEOM* cuando resuelve un problema de geometría, y cómo, en esa evolución, el alumno se apropia de habilidades estratégicas y argumentativas implicadas en la resolución del problema. Esto nos permitirá tener una idea clara de la aplicabilidad y efectividad del sistema tutorial *AGENTGEOM*.

Para hacer los análisis que pretendemos tomamos como punto de partida los modelos de interacciones de Cobo y Fortuny (2000) y de Kieran (2001), y la noción de apropiación de Moschovich (2004). Las interacciones del primer modelo son compatibles con la dialéctica de Lakatos (1984), en el sentido que pueden relacionar la formulación de una conjetura, el proceso de argumentación, la organización del conocimiento o el modo de razonar. El segundo modelo de interacciones hace posible identificar, en un proceso de resolución entre pares de alumnos, si la producción cognitiva y heurística es del mismo orden, es decir, si los interlocutores razonan sobre

¹ <http://blues.uab.es/~ipdm4/Agenta.htm>

los mismos objetos, contribuyen a la formulación o demostración de la misma conjetura y si sus iniciativas o sus reacciones se separan en el proceso argumentativo.

Por otra parte, la apropiación es un concepto neovygotskiano que ha sido utilizado para describir cómo el aprendizaje es mediado por la interacción con otros y cómo los alumnos aprenden cuando los adultos les guían y les enseñan (Moschkovich, 2004; Newman y otros al., 1989; y Rogoff, 1990). Esa perspectiva sociocultural que utilizamos en esta investigación considera dos aspectos de la apropiación: uno relacionado con lo que los alumnos se apropian y, el otro, cómo transforman activamente estas apropiaciones.

En los apartados siguientes mostramos las características generales del diseño e implementación del *AGENTGEOM* y el análisis del proceso de resolución de un alumno.

Diseño e implementación

En Cobo y otros (2004) hacemos una descripción en profundidad de los componentes y funcionalidades del *AGENTGEOM*, así como de sus antecedentes. En este apartado nos limitamos a resumir su diseño y las características de los problemas que implementamos.

El *AGENTGEOM* simula la conducta de un tutor humano y tiene tres características básicas: autonomía, en el sentido que es capaz de comportamientos calificables como de espontáneos, tiene una cierta iniciativa proactiva, y proporciona a sus usuarios actividades y les ayuda a resolverlas. Además, es un sistema tutorial que combina interfaces, utilizadas por los usuarios del sistema (profesores y alumnos), con dos agentes artificiales: el *agente tutor*, que tiene una arquitectura principalmente reactiva y envía mensajes de ayuda al alumno, y el *agente mediador*, que recibe las entradas de los interfaces del alumno y del profesor y valida las acciones del alumno. A través de su interficie de comunicación con el alumno, el *agente mediador* permite la construcción de figuras en un área gráfica y gestiona la construcción correcta de la sintaxis de las sentencias que el alumno introduce en el editor de deducciones. Además, determina y muestra si la sentencia es verdadera o falsa. El *agente mediador* facilita al profesor, a través de su interficie, la creación de nuevos problemas, su asignación a los alumnos, la propuesta del sistema de mensajes que el *agente tutor* enviará a los alumnos durante la resolución de cada problema, y la posibilidad de repasar los historiales de las resoluciones que hacen los alumnos para observar si han avanzado suficientemente en la resolución del problema y para comunicarse con ellos cuando lo estime oportuno.

Contenidos estratégicos implicados en la resolución del problema del paralelogramo

La implementación en el *AGENTGEOM* de un problema nos exige una identificación detallada de todos los contenidos matemáticos involucrados en todas las posibles formas de resolver el problema. Debido a la configuración, los problemas que mejor se adaptan para su implementación en el *AGENTGEOM* son los de geometría. Los problemas geométricos facilitan, sobre todo, la utilización de procesos inductivos, de ensayo-error, de visualización, de simbolización y de profundización en los procesos deductivos.

En la investigación que presentamos hemos elegido problemas que comparan áreas de superficies planas. Esta elección está justificada por el hecho de que este tipo de problemas pueden ser resueltos de múltiples formas e involucran en su resolución componentes gráficos y deductivos, pueden adaptarse fácilmente al nivel de los alumnos de diferentes edades y conocimientos con sencillas modificaciones de su enunciado. Además, facilitan a los alumnos de ESO y Bachillerato el establecimiento de conjeturas, por tanto, en la terminología de Polya (1975), son susceptibles de ser transformados de problemas de encontrar en problemas por demostrar, lo cual facilita el uso del área deductiva y refuerza el aprendizaje de la idea de demostración.

Hemos implementado en el *AGENTGEOM* el problema llamado del paralelogramo que tiene el siguiente enunciado:

Si M es un punto cualquiera de la diagonal AC del paralelogramo $ABCD$, ¿qué relación hay entre las áreas de los triángulos rallados de la Figura 1?

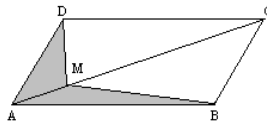


Figura 1. El problema del paralelogramo

Para identificar todas las formas posibles de obtener una solución del problema del paralelogramo construimos su espacio básico (Cobo, 1998), llegándose a obtener, de esa forma, cuatro formas diferentes de aproximarnos a la solución: mediante el trazado de paralelas a los lados por el punto M , considerando casos particulares, límite y singulares, buscando un problema equivalente, y aplicando las fórmulas de las áreas de los triángulos.

Análisis de la tutorización. El caso de Albert

Albert es un nombre supuesto de un alumno de primer curso de bachillerato (16 años) que no ha seguido ningún aprendizaje específico sobre la resolución de problemas ni sobre la demostración en matemáticas. La enseñanza de la resolución de problemas siempre se le ha enfocado desde un punto de vista de la resolución de ejercicios o problemas de aplicación cuyos contenidos matemáticos acaban de ser explicados por el profesor. Albert y sus compañeros utilizan esporádicamente el ordenador en sus clases -siempre trabajando en colaboración con sus compañeros-, y realizando actividades estructuradas y guiadas, asociadas a los contenidos matemáticos que el profesor pretende enseñar.

Los contenidos matemáticos de los problemas de comparación de áreas se han tratado en los cursos anteriores al que hace actualmente Albert, a pesar de que no de forma explícita ni con la finalidad concreta de resolver problemas de este tipo. Albert, conserva conocimientos procedimentales relacionados con la aplicación de fórmulas para el cálculo de áreas de figuras planas, y conocimientos suficientes sobre los conceptos asociados a las construcciones geométricas del área gráfica del *AGENTGEOM* y los que se utilizan en la escritura de las sentencias deductivas.

A todos los alumnos que participan en esta experimentación se les explica detalladamente el funcionamiento del *AGENTGEOM* y se les propone que resuelvan el problema del paralelogramo. Los datos de las resoluciones que desarrollan los alumnos quedan registradas por el *AGENTGEOM* en el historial de cada uno de ellos.

El proceso de resolución del problema del paralelogramo por parte de Albert

En los siguientes párrafos analizamos, según el esquema de análisis de Cobo y otros (2004), el proceso de resolución desarrollado por Albert en su interacción con el *AGENTGEOM*. Para hacer este análisis consideramos básicamente tres aspectos: la utilización conjunta o no de las áreas gráfica y deductiva del *AGENTGEOM*, la naturaleza de las acciones del alumno -si son por iniciativa propia (proactivas) o son dirigidas por los mensajes del *agente tutor* (reactivas)-, y la influencia de los mensajes en la conducta del alumno. En la implementación de mensajes en el *AGENTGEOM* hemos diferenciado entre mensajes de nivel 0, 1 y 2, según sean, respectivamente, sugerencias generales que no incluyen contenidos matemáticos, informaciones que sólo contienen el nombre de los contenidos matemáticos involucrados o sugerencias que contienen información concreta de los contenidos matemáticos involucrados en la resolución.

Hemos dividido el proceso de resolución en tres episodios, que hemos nombrado, según su contenido, de la forma: “establecimiento de una conjetura”, “trazado de rectas perpendiculares” y “trazado de rectas paralelas para justificar la conjetura”.

a) *El establecimiento de una conjetura*

Inmediatamente después de leer el enunciado del problema, de cargar en la pantalla gráfica la figura adjunta a dicho enunciado, Albert empieza utilizando el editor de deducciones para escribir la conjetura (acciones 5 y 6) de que las áreas de los dos triángulos que se pretende comparar son iguales.

5. Albert: Deducción: $area\ dam = area\ amb$

6. Agente mediador: $área\ dab = área\ amb: cierta$

El *agente mediador* no sólo le ha permitido establecer esta conjetura, sino que se la ha validado. Albert duda si introducir esa sentencia como deducción final. No lo hace porque sabe, por las explicaciones previas, que el *agente tutor* se la valdrá pero le exigirá una argumentación. Ahora Albert sabe el resultado final del problema, pero ha de argumentarlo. Nada más empezar su proceso de resolución ha transformado, de manera brillante pero intuitiva, el problema del paralelogramo, que es un problema de encontrar, en un problema de demostrar (Polya, 1975).

Albert ha hecho al inicio del proceso de resolución lo que casi ningún alumno hace, es decir, utilizar directamente el área deductiva del *AGENTGEOM*. Parece que Albert ha sabido comprender las ventajas que le proporciona el sistema y se ha aprovechado de ellas. A partir de ahora ha de empezar a justificar la intuición que ha tenido.

b) *El trazado de rectas perpendiculares*

En el inicio de este episodio Albert tiene dudas y realiza acciones sin una intencionalidad aparentemente definida: vuelve a leer el enunciado, traza la otra diagonal db del paralelogramo, identifica el punto donde se cortan las diagonales, vuelve a borrar esa diagonal, señala líneas, crea el segmento am , etc. Albert ha iniciado la utilización del área gráfica. Sabe que sus sentencias deductivas han de utilizar objetos gráficos que estén contruidos en dicha área, y, por tanto, no podrá construir su argumentación si no empieza a crear elementos auxiliares que complementen la figura inicial. La acción 16 marca el comienzo de una serie de acciones que parecen tener una finalidad concreta: la expresión de las áreas de los triángulos abm y amd (Figura 2) en función de sus bases y alturas.

16. Albert: Traza la perpendicular a da por m con nombre pm

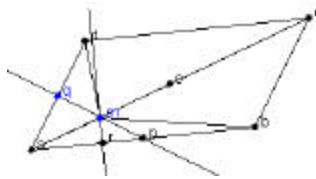


Figura 2.

Albert ha empezado a trazar perpendiculares (acción 16). Eso pone en alerta al *agente tutor* sobre la posibilidad de que trace las alturas de los triángulos, pero las acciones 16, 17 y 18, en las que Albert traza la perpendicular pm al lado da e identifica sus intersecciones con los lados da y ba , no están en ninguna de las estrategias que resuelven el problema. Por eso, el *agente tutor* responde a esas acciones enviando un mensaje de nivel 1 (acción 19).

17. Albert: Crea intersección de la línea pm con ab de nombre p

18. Albert: Crea intersección de la línea pm con da de nombre q

19. Agente tutor: "Trata de comparar las alturas de los triángulos ABM y AMD "

La comunicación entre Albert y el *agente tutor* empieza a producirse. Por el contenido del mensaje, Albert piensa que está en el buen camino, pero en realidad no ha sabido interpretar esta comunicación. El hecho de que el *agente tutor* haya respondido con un mensaje ha de interpretarse como que las acciones no siguen ninguna estrategia que lleve a la solución del problema. Albert continúa con su idea inicial de trazar las alturas correspondientes a los lados da y ba , para, como dice el mensaje, poder compararlas.

En las interacciones profesor-alumno, cada uno de los interlocutores, sobre todo si trabajan juntos con frecuencia, saben interpretar las formas de comunicación verbales o no verbales. Ahora el *agente tutor* ha respondido con un mensaje a las acciones gráficas de Albert, y éste no ha sabido interpretar, no su contenido, sino la presencia del mensaje. Posiblemente los alumnos y el *AGENTGEOM* necesiten un periodo mayor de adaptación mutua para acabar de comprender sus procesos comunicativos.

La persistencia de Albert en el desarrollo de la estrategia que ha elegido, hace que el *agente tutor* le envíe otro mensaje (acción 25), ahora de nivel 2 y de cambio de estrategia: "Podrías pensar alguna forma de descomponer el paralelogramo en

triángulos, por ejemplo, trazando paralelas que pasen por M. Este mensaje es mucho más concreto y aporta una información matemática considerable aunque no decisiva, como hemos tenido oportunidad de comprobar con otros alumnos. Al final de este episodio, Albert cumple su objetivo de construir las alturas sobre los lados *ba* y *da* de los triángulos *abm* y *amd* para llegar a compararlas (acciones 29 y 31).

29. Albert: Deducción: línea *qm* = línea *mr*

30. Agente mediador: línea *qm* = línea *mr*: falsa

31 Albert: Deducción: línea *qm* = línea *mr**2

32. Agente mediador: línea *qm* = línea *mr**2: falsa

El *agente mediador* no valida ninguno de los dos intentos de comparación de Albert, y este empieza a pensar en un cambio de estrategia.

Resumiendo este episodio podemos decir que Albert ha insistido en desarrollar la estrategia que ha elegido hasta el final, animado por la interpretación que hace del primer mensaje que le envía *el agente tutor*. Además, sus acciones son proactivas y generan elementos gráficos auxiliares para su aplicación en sentencias deductivas. Y, por último, Albert no ha atendido la sugerencia que el *agente tutor* le ha enviado en su segundo mensaje.

c) *El trazado de rectas paralelas*

El *agente tutor* sabe que Albert no ha tenido en cuenta su último mensaje (acción 25). No sólo no ha hecho ninguna acción gráfica o deductiva en la dirección que le marca el mensaje sino que las tres últimas acciones no han sido reconocidas por el *agente tutor* (acción 26, en la que traza el segmento *mr*, la 29 y la 31). En estas circunstancias el *agente tutor* puede repetir el mismo mensaje. Es lo que hace en la acción 32, envía a Albert la sugerencia de que descomponga el paralelogramo en triángulos, trazando paralelas que pasen por *M*.

A partir de este momento se inicia un nuevo episodio del que resaltamos dos fases claramente diferenciadas en el desarrollo de la estrategia que marca el trazado de rectas paralelas a los lados del paralelogramo. En la primera fase, que abarca casi 11 minutos, la respuesta de Albert al mensaje emitido por el *agente tutor* es inmediata, posiblemente porque se encuentra en una situación de bloqueo. Sus acciones, que son claramente reactivas a ese mensaje, puesto que mira varias veces la ventana del tutor para ver si sigue correctamente sus indicaciones, son todas de naturaleza gráfica:

trazado de rectas paralelas a los lados del paralelogramo, intersección de dichas rectas con todos los lados e identificación de todos los segmentos posibles de la figura que resulta. Son continuos los diálogos con el *agente mediador*, que rechaza la nomenclatura que Albert asigna a los objetos que va creando. Durante toda esta fase del proceso de resolución Albert se ha olvidado de utilizar el área deductiva. Al final, parece que vuelve a estar bloqueado. Este bloqueo lo manifiesta obsesionándose en crear nuevos segmentos i líneas, algunas de ellas no reconocidas por el *agente tutor*, que acaba enviándole un nuevo mensaje: “*Identifica los triángulos nuevos que se han formado*”.

Este mensaje es una insinuación al alumno para continúe con la estrategia que ha iniciado, y es el inicio de la segunda fase de este episodio que conducirá a Albert a la justificación de su conjetura. En el área gráfica no se pueden identificar triángulos, puesto que el *agente mediador* los crea automáticamente cuando el alumno crea el segmento que cierra dicho triángulo. Albert interpreta correctamente el mensaje y reacciona, tras un par de acciones gráficas de intersección de líneas, empezando, de nuevo, a crear sentencias deductivas, intercaladas con algunas acciones gráficas que completan la figura que había hecho en la fase anterior. Las sentencias deductivas comparan áreas de paralelogramos, de triángulos, y de sumas de áreas de triángulos que se han formado con el trazado de las paralelas y otras líneas auxiliares. Todas son correctas y, por tanto, validadas por el *agente mediador*, aunque muchas de ellas no son sentencias que contribuyan a justificar su conjetura. Al final, Albert introduce la sentencia que da el resultado final y el *agente mediador* se la da por justificada con un 35 % de acciones reconocidas. El *AGENTGEOM* da por buena una argumentación cuando el alumno supera el 30% de las acciones gráficas o deductivas que desarrollan la estrategia que ha seguido, que son las acciones reconocidas para esa estrategia, y sabe diferenciar entre todas las acciones validadas, las que son reconocidas de las que no lo son. Estas últimas, por tanto, no contribuyen a justificar la conjetura que el alumno ha establecido.

Resumiendo, podemos decir que en este episodio las acciones de Albert han sido dirigidas por los mensajes del *agente tutor* (acciones reactivas), y, por tanto, podemos considerar que la interacción entre Albert y el *AGENTGEOM* ha sido guiada por éste. Esta dirección ha conducido a Albert a realizar, primero, sólo acciones gráficas, y, después, a combinar las acciones gráficas y las deductivas para desarrollar su proceso argumentativo.

Conclusiones

Con esta experiencia hemos puesto de manifiesto que el *AGENTGEOM* puede ser una herramienta auxiliar del profesor, que le puede ayudar en sus necesidades de atender a la diversificación de alumnos con la que se encuentra cada día. A ello contribuye la capacidad que tiene el profesor, a través del *AGENTGEOM*, de adaptar los problemas y los mensajes a las características cognitivas de cada uno de sus alumnos.

Por su diseño, el *AGENTGEOM* colabora, de manera casi autónoma, en el desarrollo de las competencias estratégicas de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas, creando las condiciones interactivas necesarias para que el alumno pueda avanzar en el proceso de la resolución. El *AGENTGEOM* contribuye a este avance haciendo sugerencias que orientan al alumno, pero proporcionándole, en cada momento, sólo la información estrictamente necesaria, de forma que sea el propio alumno el que resuelva realmente el problema.

Además, el *AGENTGEOM* ayuda a generar nuevas habilidades relacionadas con los procesos argumentativos en matemáticas. Para ello, hemos diseñado el *AGENTGEOM* de forma que tiene dos áreas -gráfica y deductiva-, cuya utilización conjunta permite a los alumnos crear objetos matemáticos genéricos, es decir, desvinculados de las medidas concretas de sus elementos, para utilizarlos en las sentencias deductivas, que han de ser escritas siguiendo las normas propias del lenguaje matemático. Así pues, los alumnos desarrollan su capacidad de abstracción y se apropian de la idea de demostración matemática, gracias a la desvinculación de los objetos gráficos de sus medidas concretas, a la construcción de las sentencias deductivas tomando como referentes dichos objetos, y a la necesidad, que impone el *AGENTGEOM*, de no dar por válida una argumentación hasta que no haya habido un número mínimo de sentencias deductivas reconocidas.

Referencias

- Cobo, P. (1998). 'Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos', Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona
- Cobo, P., Fortuny, J. M., Puertas, E., y Richard, P. (2004). *AGENTGEOM: a multiagent System for Pedagogical Support in a Geometric Proof Problem. (manuscrito sometido a publicación)*
- Cobo, P. & Fortuny, J. M. (2000). 'Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving', *Educational Studies in Mathematics*, 42, 115-140.
- Fortuny JM. y Murillo, J. (1999). "Un modelo de utilización de una red electrónica como soporte instruccional en la enseñanza de la geometría en la E.S.O." Rev de educación. V. 1.
- Kieran, C.: 2001, 'The Mathematical Discourse of 13-year-old Partnered Problem Solving and Its Relation to the Mathematics that Emerges', *Educational Studies in Mathematics*, 42, 115-140.
- Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Hermann, Paris.
- Moschkovich, J. (2004). 'Appropriating mathematical practices: a case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor', *Educational Studies in Mathematics* 55: 49–80.
- Newman, D., Griffin, P. and Cole, M. (1989). *The Construction Zone: Working for Cognitive Change in School*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Polya, G. (1975). *Como resolver y plantear problemas*, Trillas, Mexico.
- Richard, P. R. (2004): *Modélisation du comportement en situation de validation*. P Lang, Berne.
- Richard, P. R., Fortuny, J. M., Cobo, P. & Aï meur, E. (2003). 'Stratégie argumentative et système tutoriel pour l'apprentissage interactif de la géométrie', in *Actes de l'EMF-2003 (Espace mathématique francophone)*, Tozeur.
- Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in Thinking: Cognitive Development in Social Context*, Oxford University Press, NY.