

LA ARITMÉTICA MERCANTIL CASTELLANA Y SU CONTRIBUCIÓN A LA HISTORIA DEL COMERCIO MEDIEVAL

BETSABÉ CAUNEDO DEL POTRO*

Resumen

Se aúnan tres manuscritos de aritmética mercantil castellana estudiados en los últimos diez años tratando de extraer su valor para el estudio de la historia del comercio medieval. Además de constituir la base de unas novedosas técnicas de comercio, los variados y prácticos enunciados de los problemas en ellos propuestos, pueden considerarse una adecuada fuente histórica.

Palabras clave

Manuscritos castellanos de aritmética mercantil. Técnicas de comercio. Datos y fuentes históricas.

Summary

Three manuscripts of Castilian commercial arithmetics, studied in the last ten years, have been brought together to try and extract their value for the study of medieval trade history. They constitute the basis of novel trading techniques, and moreover the varied and practical problem exercises proposed in them constitute an adequate source of historical data.

Keywords

Castilian manuals of commercial arithmetics. Commercial techniques. Historical data sources.

Résumé

On combine trois manuscrits d'arithmétique mercantile castillane, étudiés ces dix dernières années, essayant d'extraire leur valeur pour l'étude de l'histoire du commerce médiéval. En plus de constituer la base de techniques de commerce novatrices, les énoncés de problèmes qui y sont proposés, variés et pratiques, constituent une source appropriée d'informations historiques.

Mots clés

Manuscrits castillans d'arithmétique mercantile. Techniques commerciales. Sources de données historiques.

* Universidad Autónoma de Madrid. Dpto. Hª Antigua, Medieval, Paleografía y Diplomática. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad Autónoma de Madrid. Ciudad Universitaria de Cantoblanco. 28049 Madrid Betsabe.caunedo@uam.es. Teléf. 91 4974572.

La aritmética mercantil castellana y su contribución a la historia del comercio medieval*

El estudio del magnífico manuscrito 46 de la Real Colegiata de San Isidoro de León nos permitió en su día iniciar una nueva línea de investigación a la que me incorporé con el auténtico ardor del neófito. Desde su publicación en el año 2000 han transcurrido algo más de diez años¹ y consideramos que es un buen momento para hacer un pequeño balance acompañado de algunas reflexiones acerca de la aritmética mercantil castellana desde el punto de vista de una medievalista.

Tras este manuscrito, otros dos textos enriquecieron nuestro primer elenco: *De Arismética*² y el *Ms 10106* de la Biblioteca Nacional de Madrid, recientemente editado por Javier Docampo Rey³, quien subraya con notoriedad una mayor proyección comercial y mediterránea que en su día habíamos adelantado. Estos tres manuscritos nos permitieron superar la idea de la inexistencia en el reino castellano de una literatura técnica sobre las aplicaciones al campo del comercio de la nueva aritmética y nos mostraron también, cómo en la Corona de Castilla, la actividad técnica se ponía al servicio de la actividad comercial. Con ellos se podía responder a una antigua pregunta ¿cómo era posible que la intensa actividad comercial detectada en el reino castellano no contase con una literatura técnica propia y o traducida, cuando, el contacto con el mundo italiano y la existencia de una rica tradición andalusí inducía a pensar en la existencia y circulación de este tipo de literatura? Esa vieja pregunta tiene respuesta. Los tratados medievales castellanos constituyen buenos ejemplos de una auténtica literatura técnica y de la existencia de una actividad didáctica en Castilla puesta al servicio de un comercio activo y floreciente como lo fue el castellano bajomedieval. Se sumaron a una amplia producción, fundamentalmente italiana aunque no exclusiva de este país, que discurría incrementándose por la gran vía de comunicación que fue el Mediterráneo y que cada día vamos conociendo mejor⁴.

* Este trabajo ha sido elaborado en el marco del proyecto de investigación HUM 2007 – 63856, *La transmisión del saber técnico y profesional: literatura técnica en la España Medieval*, subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología.

¹ B. CAUNEDO DEL POTRO, y R. CÓRDOBA DE LA LLAVE, R. *El Arte del Alguarismo. Un libro castellano de aritmética comercial y de ensayo de moneda del siglo XIV*, Junta de Castilla y León, Salamanca, 2000.

² B. CAUNEDO DEL POTRO, “De Arismetica: Un manual de aritmética para mercaderes”, *Cuadernos de Historia de España*, 78, 1, (2003), pp. 35-46.

³ J. DOCAMPO REY, “A new source for medieval mathematics in the Iberian Peninsula: The comercial arithmetic in Ms 10106 (Biblioteca nacional, Madrid)”, *Revue d’Histoire des Mathématiques*, 15,1, (2009), pp.123-77.

⁴ Al primer gran catálogo elaborado por W. VAN EGMOND, *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A catalog of Italian Abacus Manuscripts and Printed Books to 1600*, Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze, 1980, y que recogía más de 300 ejemplares, se siguen sumando nuevos trabajos entre los que destacarían los últimamente publicados por Jean Hoyrup, Marivonne Spiesser o Stephane Lamassé. J. HOYRUP, *Jacopo da Firenze’s Tractatus Algorismi and Early Italian Abacus Cultura*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlín, 2007. S. LAMASSÉ “Les problèmes dans les arithmétiques commerciales en langue française et occitane de la fin du Moyen Âge”, Tesis doctoral, P. BENOIT dir., Universidad París1, París, 2007. M. SPIESSER (ed.), *Une arithmétique commerciale du XI^e siècle. Le Compendy de la pratique des nombres de Barthélemy de*

A su estudio deben añadirse el de algunos tratados de los primeros años del siglo XVI como el *Sumario breve de la practica de la Aritmética de todo el curso del arte mercantil bien declarado el qual se llama maestro de cuenta*⁵ o *El Arte de la Arismetica* de Juan de Ortega⁶, también el de Juan Gutiérrez de Gualda, de 1539, *Arte breve y provechoso de cuenta castellana y aritmética, donde se muestran las cinco reglas de guarismo por la cuenta castellana y reglas de memoria*⁷ que siguieron sus pautas, mostrando escasas novedades con respecto a los tratados medievales, incrementándose este elenco con los primeros ejemplos americanos elaborados al compás de la expansión y conquista. Éstos, realizados por necesidades muy específicas, recuerdan los enunciados de los problemas de aleaciones de los tratados medievales⁸. Tampoco debemos olvidar que la producción de aritméticas en latín, no aritméticas mercantiles, continuó existiendo como lo prueba el documento localizado en la Biblioteca Histórica de Salamanca sobre el que estamos trabajando en la actualidad⁹.

Voy a referirme, en un primer momento, a algunas de sus características más generales como su origen, objetivo y estructura común, para ofrecer en una segunda parte del trabajo reflexiones y perspectivas de futuro.

1. Origen, objetivo y estructura común

1.1. Origen

Creemos que estos manuscritos castellanos tienen un origen común en el que se amalgaman tres importantes influencias culturales muy claras en nuestro suelo. La primera y más visible nos traslada a la dominación musulmana de la península y al florecimiento cultural andalusí. Nadie duda de la grandiosa aportación del saber árabe y de su im-

Romans. (De Diversis artibus, 70) Turnhout: Brepols, 2004 y “L’arithmétique pratique en France au seuil de la Renaissance: formes et acteurs d’un enseignement”, *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 31, 67, (2008). En todos ellos se recoge una amplia bibliografía sobre el tema.

⁵ Una primera aproximación en mi trabajo, “Un manual de aritmética mercantil de Mosén Juan de Andrés”, *Pecunia*, 8 (2009), pp. 71-96, y sobre un capítulo en concreto, *la regla de la compañía*, “Otros datos sobre las compañías comerciales castellanas en la Baja Edad Media”, en *Castilla y el Mundo Feudal*. Homenaje a Julio Valdeón, M^o I. DEL VAL VALDIVIESO y P. MARTÍNEZ SOPENA dirs. Junta de Castilla y León, Valladolid, 2009, vol. I, pp. 625-38.

Contamos también con una buena edición facsimilar, Valencia: Vicent Garcia Editores, 1999.

⁶ *Síguese una composición dela Arte de la Arismetica y juntamente de Geometría...* Lyon, Joan Trinxer, 1512.

⁷ Se custodia en la Biblioteca Nacional, sección *Raros*, 8172. Da noticia, E. HERNÁNDEZ ESTEVE, *Contribución al estudio de la historiografía contable en España*, Madrid, 1981

⁸ Un buen ejemplo es el *Sumario compendioso de las quantas de plata y oro que en los reynos del Perú son necesarias a los mercaderes y todo género de tratantes, con algunas reglas tocantes al Aritmética*. Fecho por Don Juan Diez Freyle. Fue elaborado en México el 15 de Abril de 1556. Edición facsimil, de 1985, del ejemplar conservado en la Biblioteca de la universidad de Salamanca a cargo de ediciones Cultura Hispánica del Instituto de Cooperación Iberoamericana.

⁹ Se trata del manuscrito 1693 de la mencionada Biblioteca.

portante irrupción en Occidente con todo un caudal de conocimientos más rico que el que aquí se había conservado, y que por tanto, oscurecía por completo el substrato occidental. El término “algarismo”, el sistema de numeración y el estilo de los trabajos —tratado de aritmética mercantil, *Al-Muawalat*, así lo evidencian. Tampoco dudamos de la aportación judaica, destacando el papel de sus miembros como buenos cultivadores y difusores de la disciplina que ahora nos ocupa y como elementos necesarios para su enlace y transmisión. También queremos mostrar estos manuscritos como frutos de la tradición latina, acaso el eslabón más humilde de la cadena, pero igualmente valioso y que se funde en la Península con la riquísima tradición árabe. Aquí, las dos culturas: la latina y la árabe —de la que participan también cristianos (mozárabes) y judíos— se enlazan, desarrollan y enriquecen. De esta tradición latina sobresalen tres nombres: Boecio, Beda el Venerable y Alcuino de York. Con Boecio (435-480) llegó una primera tradición clásica en el campo de la matemática. Manejando fuentes griegas compiló selecciones latinas de tratados elementales sobre aritmética, geometría y astronomía. Escribió *Institutio Aritmética*¹⁰, una traducción resumen de la *Introductio Aritmética* de Nicómaco. Su bajo nivel en matemáticas, descendió todavía más en compilaciones posteriores de Casiodoro (475-570)¹¹ e Isidoro de Sevilla (560-636), quien especialmente nos interesa destacar, ya que su obra *Las Etimologías*, dedica el libro III al estudio de las cuatro ciencias matemáticas¹² y debe mucho al manual de Boecio. Esta obra tuvo una enorme y rápida difusión antes del siglo IX, resultando posible su localización en casi todos los monasterios medievales¹³, llegando al Renacimiento carolingio. Su notable presencia iba a asegurar la transmisión de una herencia que la obra recogía, conservaba y exponía y que pronto se vería ampliada por el laborioso estudio de la aritmética enfocado a precisar el calendario litúrgico¹⁴. Destacamos a Beda el Venerable (673-735),

¹⁰ Se cuenta con una edición en castellano de esta obra de Boecio, A. M. T. S. BOECIO *Institutio Aritmética, Fundamentos de Aritmética*, ed. M^a A. SÁNCHEZ MANZANO, Universidad de León, León, 2002. Esta edición se basa en la obra conservada en la Real Colegiata de San Isidoro de León.

¹¹ Así lo juzga J. Y. GUILLAUMIN, en la traducción francesa que hace de la obra de Boecio, Boecio, A. M.T.S. *Institution arithmétique*, ed. J.Y. GUILLAUMIN, Les Belles lettres, París, 1995. En la introducción analiza el valor del número para Boecio y Nicómaco, y la consideración del estudio de la aritmética como fase que precede a otros estudios superiores.

También nos presenta una primera difusión del texto, convertida en manual para los monjes de Vivarium y después para los de Bobbio. Su presencia en estas bibliotecas y en la de Letrán sería importante para su difusión por toda Europa.

¹² Tras una breve definición de las mismas, menciona a los “investigadores” de la matemática para centrarse en la definición del número, en su importancia y en sus tipos. Concluye con diferentes anotaciones geométricas. Se coloca en la posición de los filósofos antiguos cuando expone la doctrina de los números para estudiarlos como manifestación del plan del Creador. San Isidoro DE SEVILLA, *Etimologías*, ed. J. OROZ RETA y M. A. MARCOS CASQUERO, Católica, Madrid, 1982. Introducción general de Díaz y Díaz, Manuel C. Además de este libro III de *Las Etimologías, Acerca de las Matemáticas*, se le ha atribuido a San Isidoro un *Libro de los Números*, tratado con el que vuelve al estudio bíblico para aplicar interpretaciones místicas a todas las menciones numéricas de los libros sagrados, pp. 129-30.

¹³ San Isidoro DE SEVILLA, *Etimologías* ... pp. 200-22 nos ofrece un completo esquema de la propagación de la obra antes del siglo IX.

¹⁴ La mayoría de las fiestas religiosas, movibles, se fijarían a partir de la celebración de la Pascua de Resurrección según había determinado el Concilio de Nicea. F. MUÑOZ BOX, “El tiempo y la medida del tiempo”,

el llamado monje historiador de Jarrow¹⁵, quien elaboró seis obras de cronología. En una de ellas, *De Temporum ratione*, escrita en el año 725, calculó las tablas de Pascua para el período comprendido entre los años 532 y 1063 y también intentó, por primera vez, una cronología del mundo hasta el reinado del emperador bizantino de su época, León el Isaurio¹⁶. Pero sobre todo, queremos llamar la atención sobre una pequeña obra aritmética de Beda, *De Arithmetice Propositionibus*, cuyo valor matemático ha sido resaltado por Menso Folkerts¹⁷, en la que intenta resolver situaciones que pudiesen presentarse en la vida diaria, y en la más conocida de Alcuino de York, *Prepositiones ad acuendos juvenes*¹⁸, obra que incluye una breve colección de problemas aritméticos y geométricos precedidos por anotaciones sobre los números y está destinada, según el autor a “desarrollar el ingenio de los jóvenes”¹⁹. En ella, Alcuino enunció 55 problemas, solucionó 32, dejando, por tanto, sin resolver, 23. Eran éstos, los que fundamentalmente debían contribuir a facilitar el desarrollo del ingenio.

Es necesario resaltar, que varios de sus ejercicios se repiten con el mismo enunciado o con escasísimas variaciones —adecuaciones de tiempo y lugar— en trabajos aritméticos posteriores, en concreto en muchos de los que se engloban en el término de aritmética recreativa, integrados a su vez, en la aritmética comercial medieval y renacentista. Es probable que fuesen ya clásicos en tiempos de Alcuino, dado el origen griego, indio y chino apuntado para algunos de ellos por David Singmaster²⁰, y se podría pensar en la posibilidad de que

Historia de la Ciencia y de la Técnica en la Corona de Castilla, Edad Media II, L. GARCÍA BALLESTER, dir., Junta de Castilla y León, Salamanca, 2002, pp. 539-50, vuelve a insistir en que fueron los monjes los que hicieron avanzar las ciencias de la cronología y de la horología.

¹⁵ La obra fundamental de Beda quizá sea la *Historia Ecclesiástica gentis anglorum*, fuente principal para la historia de la iglesia de este país y que le ha granjeado a su autor el apelativo de monje historiador. Una edición de la obra, Beda, el Venerable, Santo, *Ecclesiastical history of the English people* ed. Leo Sherley-Price y R.E. Latham, Penguin Books, Londres, 1990.

¹⁶ G. J. WHITROW, *El tiempo en la historia. La evolución de nuestro sentido del tiempo y de la perspectiva temporal*, Crítica, Barcelona, 1990, pp. 102.

¹⁷ Sobre el valor matemático de la obra insiste Menso Folkerts en su completísimo trabajo, M. FOLKERTS, “*De Arithmetice Propositionibus. A Mathematical Treatise Ascribed to the Venerable Beda*”, *Essay son Early Medieval Mathematics. The Latin Tradition*, Aldershot, Ashgate Variorum, 2003, pp. 12-30.

¹⁸ M. FOLKERTS, “*The propositiones ad acuendos iuvenes* Ascribed to Alcuin”, *Essay son Early Medieval Mathematics. The Latin Tradition*, Aldershot: Ashgate Variorum, 2003, pp. 31-76.

¹⁹ Eran éstos, los que debían facilitar el desarrollo del ingenio “las demás soluciones son deseadas, puede, sin embargo, cualquiera resolver esas proposiciones, utilizando la aritmética, de tal manera, que los omitidos valgan para ejecutar el ingenio”.

²⁰ D. SINGMASTER, “Some early sources in recreational mathematics”, *Mathematics from Manuscript to Print*, C. HAY, Cynthia., dir. Clarendon Press, Oxford, 1988, pp. 195-208 apunta a unos orígenes indios y chinos para muchos de estos problemas. Algunos aparecen en colecciones de Mohavira (850) y Abu Kamil (900) e insiste en que tuvo que haber trabajos árabes anteriores que los introdujesen.

El gracioso problema de una liebre que huía perseguida por un perro que aparece en la colección de Beda, lo hacía ya en el que puede considerarse como uno de los textos matemáticos más antiguos del mundo (primeros años de nuestra era), y el más influyente de todos los textos matemáticos chinos, el *Chin Chang Suan Shu o los Nueve Capítulos sobre las artes matemáticas*. Esta obra integrada por 246 problemas distribuidos en nueve secciones o capítulos, lo incorpora en el capítulo 6, “Justos impuestos”, en el que aparecen ejercicios que tratan de la distribución de la carga de impuestos entre diferentes sectores de población y otros sobre el tiempo requerido para transportar el grano (impuesto) desde diferentes aldeas a la capital. Aquí incluye los

éste, independientemente de sus contactos con el mundo musulmán, se hubiese inspirado directamente en Beda, cuya obra le resultaba muy conocida, incluso familiar²¹.

1.2. Objetivo

El origen de estos manuales emerge común; común también se perfila su finalidad que no fue otra que la de facilitar la novedosa y eficaz preparación que requerían los hombres de negocios, los mercaderes, y en general, los nuevos oficios urbanos gestados y desarrollados al compás de la gran expansión urbana plenomedieval para conseguir el adecuado y provechoso desenvolvimiento de sus negocios.

Estos nuevos profesionales, hijos de unas nuevas condiciones socio-económicas, precisaron una instrucción diferente a la propuesta por los círculos eclesiásticos y nobiliarios, y para ellos se fue perfilando una enseñanza específica que combinó teoría y práctica. Instrumentos clave de la misma fueron los manuales de ábaco con los que aquí nos encontramos. Textos escritos en lengua vulgar, en un lenguaje comprensible para el grupo y que contenían toda la información necesaria para realizar con agilidad y precisión las operaciones exigidas por las nuevas profesiones. Con ellos, como veremos, se ejercitaba un cálculo más rápido, pero además, y en ello reside una de sus mejores cualidades, sus ejercicios plantearon supuestos totalmente adecuados al mundo real, circunstancias fácilmente identificables en el ejercicio de las nuevas profesiones. Los enunciados de los problemas introducen datos de precios de mercancías, de repartos, de intereses, de cambios de moneda, de pérdidas o beneficios... muestran, por tanto, realidades muy similares a las que iban a enfrentarse en su vida profesional. Este carácter práctico, su total adaptación a la realidad diaria y su validez para satisfacer unas nuevas exigencias, determinaron en gran parte, su enorme éxito.

1.3. Estructura

Además del origen común queremos recalcar que todos los textos estudiados presentan una estructura básica y se organizan en cuatro o cinco grandes bloques²², pues la dispo-

del “tipo de persecución”, que llegaron a Europa probablemente introducidos por los árabes y que gozaron de popularidad entre los siglos XII y XV. Copiamos el enunciado del problema, “*una liebre lleva a un galgo 50 pu (pasos) de ventaja. El perro persigue a la liebre 150 pu, pero la liebre aún está 30 pu por delante. ¿Al cabo de cuántos pu el perro alcanzará a la liebre?*”, J. GEORGE GHEVERGHESE, *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Pirámide, Madrid, 1996, p. 236.

²¹ Menso Folkers en los trabajos ya mencionados hace una magnífica relación de las diferentes copias conservadas, de sus analogías y diferencias.

²² En ocasiones alguno de ellos pueda faltar, bien porque se ha perdido o bien porque nunca se incluyó al querer incidir el manual en un tipo de operaciones concretas. Es el caso, por ejemplo, del manual *De Arismetica* la obra se inicia con la presentación del objetivo clave: enseñar a operar con fracciones “*este libro es muy bueno y muy provechoso para saber multiplicar enteros e rotos*”... Ver sobre el mismo mi trabajo, *De Arismetica. Un manual de aritmética para mercaderes*, *Cuadernos de Historia de España*, 78, (2003-4), pp. 35-46 sobre el manuscrito que se encuentra en Real Academia Española, Ms. 145. Cita en fol. 145 r.

sición interna de los manuales obedecen a ciertas reglas que comparten entre sí y con otros muchos ejemplares elaborados fuera de nuestras fronteras como hace ya algunos años puso de manifiesto Van Egmond²³. Las partes son:

1. Introducción. Invocación religiosa y pequeña disertación sobre el valor de la aritmética.
2. Descripción del nuevo sistema de numeración.
3. Descripción de las operaciones básicas.
4. Conjunto más o menos abundante de casos prácticos, problemas resueltos.
5. Material misceláneo. Constan también estas obras de partes no aritméticas y que por tanto podríamos considerar material adicional. Así, pequeños listados con la ley de diferentes monedas, pentagramas y de un modo muy excepcional otros manuales como el *Libro que enseña ensayar cualquier moneda*²⁴, que nos enseña a mezclar dos o más metales fundiéndolos, objeto de investigación de nuestro querido amigo y director del proyecto Ricardo Córdoba.

Las partes centrales: dos, tres y cuatro son en las que nos vamos a fijar, destacando como los manuales de ábaco se convirtieron rápidamente en el instrumento imprescindible para el aprendizaje de unas habilidades aritméticas básicas.

1.3.1. Descripción del nuevo sistema de numeración

El punto de partida de todos ellos es la presentación del nuevo sistema de numeración indo arábigo y el trascendental valor de posición. En primer lugar se da a conocer los números en su representación escrita del 1 al 9. El conocimiento del número 10 incrementa la dificultad al estar este número compuesto de dos dígitos y necesitar, además, una breve explicación sobre el 0 que es considerado símbolo especial. Se enfatiza que por si sólo este símbolo no vale nada, pero al poner unos o varios símbolos a su lado adquiere un elevado valor. Éste sorprende enormemente a los maestros de ábaco del momento, lo que no debe extrañarnos, ya que en la numeración romana no existe símbolo para el dígito 0 y eran sus números letras de su alfabeto²⁵. Después de presentados los números se explica el valor de posición en el que las cifras cambian su

²³ En su magnífico catálogo, *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A catalog of Italian Abacus Manuscripts and printed books to 1600*, Istituto e museo di storia della scienza, Florencia, 1980. En este trabajo, pág. 129, encontramos el número de 300. Después de su publicación, se identificaron, según el mismo autor una docena más. Hago un rápido recorrido a través de los mismos en *El arte del Alguarismo...* pp. 46-56. A ese elenco siguen añadiéndose títulos importantes, como los castellanos y algunos de los publicados por Jens Hoyrup en sus últimos trabajos como J. HOYRUP, *Jacopo da Firenze's Tractatus Algorismi...* pp. 30-41 y los mencionados en la nota 4.

²⁴ Inserto en *El Arte del Alguarismo*, publicado por Ricardo Córdoba. Recientemente este investigador ha ampliado sus reflexiones sobre el tema en R. CORDOBA, *Ciencia y Técnica monetarias en la España Bajoedieval*, Fundación Juanelo Turriano, Madrid, 2009.

²⁵ Ver *El Arte del Alguarismo*, p. 69. Los dos usos del 0 les causaban asombro, no tanto su condición de un número mismo como la de indicador de lugar vacío en el sistema numérico de valor por posición.

valor dependiendo de su posición en el número escrito; así de derecha a izquierda la primera corresponde a las unidades, la segunda a las decenas, luego centenas, unidades de millar, decenas de millar, centenas de millar... La posición de cada cifra a medida que nos trasladamos de derecha a izquierda nos indica el valor relativo de la misma, por eso se dice que es un sistema posicional. La base del sistema es 10. Diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediatamente superior. Diez unidades forman una decena, diez decenas forman una centena, diez centenas forman una unidad de mil... reiterándose que el nuevo sistema está basado en dos principios: diez como base del sistema y posición.

También se explica como regula su escritura el sistema de posición. Las cifras se colocan una detrás de otra en una línea, dada la dirección de la lectura. Cualquier secuencia de cifras representa un número y sólo uno, y recíprocamente, cualquier número es representado por una secuencia de cifras y sólo uno. Esta escritura tiene la ventaja adicional de que cuanto más larga es la secuencia, mayor es el número y a la inversa, lo que permite una comparación rápida y sencilla. Por ejemplo, el 1001 que es más largo que el 888 es mayor. Si lo comparamos con la tradicional escritura romana presenta una utilidad importante dada la trascendencia que para el mercader podía tener reconocer una magnitud con un simple golpe de vista: el 1001 es MI (de longitud dos, y el 888, que es menor, se escribe DCCCLXXXVIII, de longitud doce). Además de este atributo, se debe tener en cuenta la facilidad operativa del nuevo sistema frente al tradicional romano como nos muestra el manuscrito de la Biblioteca Nacional²⁶.

Está claro que este sistema se identifica con el sistema numérico decimal actual, no ocurre lo mismo con la nomenclatura utilizada donde sí se aprecian cambios. Por ejemplo, en *El Arte del Alguarismo* que es el manuscrito castellano más prolijo en detalles sobre el sistema posicional en base diez, llama a las cifras del 1 al 9, *letras del algarismo* y al 0 *çifra*. El valor de cada cifra, que depende de su posición, es nombrado en el documento como *presçio* de lo que valen las letras²⁷.

1.3.2. Descripción de las operaciones aritméticas fundamentales

Una vez que se ha explicado el sistema de numeración decimal, base indiscutible para comprender las operaciones fundamentales se presentan éstas: suma, resta, multiplicación, división, reparto proporcional, regla de tres y fracciones. Siempre se enseña primero qué tipo de acciones están asociadas a la operación estudiada, de modo que con

²⁶ B.N. Ms. 10106 Ver mi trabajo, “Three Castilian Manuscripts on Mercantile Arithmetic and their “problems of alloys”, *Imago Temporis Medium Aevum*, (2007), 1, pp. 229-37 y J. DOCAMPO REY, “A new source for medieval mathematics... p. 139... segunt que ya avemos dicho una figura sola significa unidat, así como 1 senefica uno, e dos feğuras en uno así puestas significa veynte e uno”...A partir de las centenas anota las cantidades con numeración romana “tres figuras asy puestas significan 321, III XXI, otrosi quatro feğuras asy fechas 4321 significan IIII M CCC XXI, otrosi çinco figuras así puestas 54321 significan L IIII M CCC XXI..., otrosi nueve feğuras e tales 987654321 significan IX LXXX VII MM DC IIII M XXI.

²⁷ B. CAUNEDO y R. CÓRDOBA DE LA LLAVE, *El Arte del Alguarismo*..., p. 69.

facilidad se pudiese comprender en qué consiste la operación. Así, por ejemplo, en el caso de la suma, se explica que nos sirve para reunir varias cantidades en una sola²⁸. Esta dinámica se repite en todas las operaciones aunque no todos los manuales castellanos las incluyen; ni siquiera, como ya hemos apuntado, se conservan en todos las cinco partes. *De Arismetica* no se inicia con la invocación religiosa, tampoco se presenta la obra ni se especifica su uso, valor o utilidad. Le falta un pequeño índice o resumen así como ya hemos señalado la exposición general del sistema de numeración indo arábigo, el valor de posición y la sucinta explicación de las operaciones fundamentales, pues la obra se inicia con la presentación del objetivo clave: enseñar a operar con fracciones *Este libro es muy bueno y muy provechoso para saber partir e multiplicar enteros e rotos*.²⁹ Tras una breve explicación del sistema de numeración, el manuscrito 10106 de la Biblioteca Nacional introduce directamente una *cuarta regla*, que es operar con fracciones³⁰, y expone a continuación diversos casos de división de fracciones: fracciones entre sí o con números enteros y también mixtos. Tras 27 ejercicios de este tipo, incorpora dos que podemos asignarlos a lo que hoy conocemos como progresiones. En los mismos, se indican procedimientos matemáticos, perfectamente válidos, para calcular la suma de los términos de las progresiones aritméticas formados por los números pares en un ejercicio e impares en el otro.

El manual de Mosén Juan de Andrés³¹ publicado ya en los primeros años del siglo XVI sustituye, al compás de los nuevos tiempos, la invocación religiosa por la dedicatoria al noble a quien está destinado: *muy ilustre y muy magnífico señor Don Seraphin, conde de Silva y señor de las villas de Nulles y Pego*. Incluye además de las operaciones fundamentales reglas muy específicas para los mercaderes como la *regla de la compañía*³², la *regla de las baratas* y la *regla de la falsa posición*³³.

1.3.3. Problemas

Las colecciones de problemas constituían el elemento esencial del manual y por tanto del aprendizaje. Mas o menos abundantes —entre los manuales castellanos nos encontramos con cantidades que oscilan entre los 192 del *Arte del Alguarismo*, los 48 de *De Arismetica* o los 74 del *Manuscrito 10106*³⁴— ponían a prueba a los jóvenes estudiantes, pues para su resolución tendrían que aplicar los conocimientos teóricos explicados con anterioridad. Con ellos se buscaba ejercitar operaciones diferentes.

²⁸ B. CAUNEDO y R. CÓRDOBA DE LA LLAVE, *El Arte del Alguarismo*, pp. 69 y 70.

²⁹ Real Academia Española, Ms. 145, fol. 145 r. Ver nota 20.

³⁰ *Capítulo de la quarta de la postrimera regla abba, eso es partir por rotos e por enteros segunt que luego se sigue...* B.N., Ms. 10106, J. DOCAMPO REY, “A new source for medieval mathematics... p. 139.

³¹ Reseñado en nota 4.

³² Basándome en los problemas de este apartado he elaborado mi trabajo “Otros datos sobre las compañías comerciales castellanas en la Baja Edad Media”, en *Castilla y el Mundo Feudal...*, vol. I, pp. 625-38.

³³ Ver mi trabajo, “Un Manual de Aritmética mercantil ...p. 78

³⁴ Son 74 los numerados por J. DOCAMPO REY en su estudio “A new source for medieval mathematics... Los números 192 y 48 los enumeré yo misma en los trabajos citados.

Una de las principales características de estas colecciones es su perfecta adecuación al mundo real. Sus enunciados reflejan situaciones en las que los jóvenes se desenvolvían o tendrían que desenvolverse. Nos hablan de precios de mercancías, de beneficios, de intereses, de repartos, de cambios de monedas...mostrando, por tanto, realidades similares a las que iban a enfrentarse. Los supuestos prácticos que se planteaban eran totalmente coherentes y se ajustaban siempre a diferentes experiencias del mundo mercantil. Incluso, en ocasiones, el autor del manual, antes de presentar el enunciado de los problemas, manifiesta la utilidad de la operación para el mercader. Así lo hace por ejemplo Mosén Juan de Andrés cuando contempla la operación de cambio que va a resolver utilizando la regla de tres. Explica su utilidad para aquellos que se vean involucrados en operaciones de largo alcance ... *has de saber que cambio real es aquel cambio que faze de una tierra en otra mediante una letra de cambio, la qual cosa se trata entre grandes mercaderes que tienen factores en muchas partes...*³⁵.

En general, todos los problemas presentan una estructura idéntica. Se dividen en dos partes: el enunciado o planteamiento y los cálculos que conducen a la solución. También el propio enunciado se divide en dos partes: una descripción de la situación donde nos ofrece los datos y las condiciones que se deben cumplir, introducidos por frases del tipo *fas esta cuenta*, y después la pregunta en sí planteada por expresiones como *agora dime, agora pregunto, demándote que me digas...*

Encontramos un predominio total del texto escrito incluso durante la resolución del problema, momento en el que se hace una minuciosa descripción de las operaciones... *di 4 e 3 son 7, sácalos de 12 e son 5 que fincan*³⁶; *e tu debes multiplicar 7 en 7, que son 49 e después multiplicar 7 en 10 que son 70*³⁷.

Las operaciones se repiten reiteradamente, diríamos con empecinamiento, pues se buscaba habilidad para operar con rapidez y capacidad para aplicar unos conocimientos a circunstancias similares a las aprendidas. Este objetivo queda claramente reflejado en el enunciado de los problemas con expresiones del tipo *e asy faras otra cuenta, e como esta cuenta feziste asy farás todas las otras quantas que desta manera sean, e segund esta cuenta se fizo se fara otra cualquier semejante desta ...E como esta cuenta feziste, asy farás todas las otras cuentas que desta manera vinieren e fueren...*³⁸ o ... *e por esta regla faras todas las otras semejantes a estas*³⁹... En ocasiones, todavía es más rotundo, *desta guisa farás todas las cuentas del mundo*⁴⁰... mostrando las innumerables aplicaciones de las operaciones, o las circunscribe a ejemplos concretos como pueden ser los problemas de aleaciones *por aquesta rregla farás todas las semejantes razones de quantas maneras de leyes de oro fuesen ...* o de compra

³⁵ Ver mi trabajo "Un Manual de Aritmética mercantil de Mosén Juan de Andrés..." , p. 79.

³⁶ B. CAUNEDO y R. CÓRDOBA DE LA LLAVE, *Arte del algarismo...* fol 41r.

³⁷ B. CAUNEDO y R. CÓRDOBA DE LA LLAVE, *Arte del algarismo...* fol. 54r.

³⁸ *Arte del Algarismo*, problema nº 93 prácticamente todos los problemas del algarismo recogen este tipo de expresiones.

³⁹ B. CAUNEDO DEL POTRO, "*De Arismetica...* p. 44.

⁴⁰ B. CAUNEDO y R. CÓRDOBA DE LA LLAVE, *Arte del Algarismo...*, problema 94 pp. 177-78.

de mercancías, *et por aquesta rregla puedes faser todas las semejantes razones de cualquier mercaduria que sea*⁴¹...

Debemos subrayar que en todos los ejemplos se aprecia la total adecuación del enunciado de los problemas con el ambiente y con los intereses de los alumnos, lo que les permitía reconocer la utilidad del aprendizaje para dar solución a una multiplicidad de problemas cotidianos.

Otros muchos detalles pueden desprenderse de una lectura minuciosa del enunciado de los diferentes ejercicios:

- Se resuelven la totalidad de los problemas planteados. Enunciado y resultado forman un todo integrado.
- Suelen aparecer ordenados por dificultad decreciente. Primero los más fáciles y a medida que el alumno progresaba se incrementaba la dificultad. Es muy clara esta ordenación en el caso de los problemas de aleaciones de *Arte del Alguarismo*. Son 23 del total de la colección, el 12%, y se encuentran ordenados de menor a mayor dificultad.
- En algunos enunciados se intercalan expresiones para reclamar la atención del lector o alumno. Éstas tienen un tono familiar, *acuérdate, para mientes, para mientes en este punto, para bien mientes*⁴², *miémbrate*⁴³... recordando cuestiones en las que ya se habría insistido especialmente o con anterioridad *aquesta es la rregla, et es semejante a las otras que avemos dicho*⁴⁴... Preceden a la resolución del ejercicio y son necesarias para no cometer errores o equivocaciones.
- Excepcionalmente emplea signos, dibujos y operaciones que confieren al ejercicio un valor especial y claramente facilitan su comprensión y memorización animando a concentrarse en casos especialmente complejos y engorrosos⁴⁵. Fueron escasos en los primeros manuales y se incluyeron con mayor frecuencia a medida que transcurría el tiempo. Así el *El Arte del Alguarismo* solo aparecen en el caso de los problemas de aleaciones, el 12% de la colección, considerados especialmente difíciles para el mercader o en los muy escasos de geometría, el 4%, con la clara intención de reforzar la explicación y favorecer el aprendizaje. Resulta sugestivo señalar cómo el autor del *Arte del Alguarismo* ha sistematizado la solución de los problemas de aleaciones con procedimientos específicos, explicados sutilmente en dos de ellos y que se completa con un gráfico que de forma fácil e inmediata nos permite conocer cómo realizar una aleación para obtener la ley que necesitamos. Un dibujo aclara el texto y proporciona una regla de resolución. El propio autor nos señala la utilidad del

⁴¹ J. DOCAMPO REY, "A new source for medieval mathematics... p. 162, problema 61 y p. 164, problema 68.

⁴² Son expresiones que aparecen en *El Arte del Alguarismo*, en los problemas nº 49, 69, 74, 75 // 102, 118, 123, 125, 126 // 109, 120 // 144 y prácticamente en todos los problemas de estas colecciones.

⁴³ El *Arte del Alguarismo*, en el problema nº 108, p. 108, "*miémbrate que cualquier quenta que ayan de faser semejante en que ayan maravedis e dineros que lo as todo de faser dineros*...

⁴⁴ J. DOCAMPO REY, "A new source for medieval mathematics... p. 150, problema 31.

⁴⁵ Se debe tener cuidado no confundir los signos propios del manual con aquellos realizados con posterioridad por mano diferente a la del autor.

dibujo con la expresión... *faz una fegura como esta...* y *faz tu fegura segund aquí esta* ...que incluye en el propio enunciado de dos problemas. En un tercero incorpora la figura sin advertirlo en el texto⁴⁶. También el autor del manuscrito custodiado en la Biblioteca Nacional de Madrid parece ser consciente de la dificultad que suponía este tipo de problemas para los mercaderes, pues en algunos de los problemas de aleaciones de que componen la colección, se esmera por facilitar su comprensión y aprendizaje con datos remarcados en cuadros⁴⁷.

La introducción de operaciones resulta escasa en los primeros manuales siendo más abundantes en las últimas. Apenas se incluyen en *El Arte del Alguarismo*⁴⁸ y sí aparecen en *De Arismetica*, colección posterior. Este manuscrito concluye con la inserción de unas tablas de multiplicar con el fin de facilitar su aprendizaje y memorización. El autor diferencia entre *Tabla menor* y *tablas mayores*⁴⁹. La *tabla menor* consiste en una simple relación de las tablas del 1 al 9; mientras que las *tablas mayores*, además de incluir las anteriores, nos presentan la de números más elevados: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 29, 31, 33, 37, 41, 43, 47, 51, 53, 57, 59, 61 en las que también aparecen resultados de multiplicar números superiores a 10, que igualmente debían memorizarse. Tablas de multiplicar también inserta Mosén Juan de Andrés en su manual, elaborado ya en los primeros años del siglo XVI⁵⁰, que es sin duda en el que aparecen el mayor número de ejemplos de este tipo. Se inicia con un dibujo en el que aparecen números y el “lenguaje digital”, muy al uso en el periodo, y continúa con varias tablas de multiplicar y diferentes ejemplos de restas, multiplicaciones y progresiones⁵¹.

- También, en ocasiones, nos muestra como puede comprobarse el resultado animándonos a realizar la prueba que verifique que la operación está bien hecha ... *para saber sy estas cuentas se fassen bien fechas e bien çiertas, hase de faser la prueba desta manera*⁵²...En el caso de esta cita, la prueba permite, además, insistir en conocimientos ya adquiridos pues se trataba de comprobar el resultado de una resta. Con la prueba demuestra que la suma —que ya la había explicado— y la resta son operaciones opuestas. Expresiones ...*sy quisieres fazer la prueba, fasla desta manera...* o *para saber sy esta cuenta es fecha bien fas la prueba como aquí esta*

⁴⁶ Inserta el dibujo en el texto de los problemas 163 y 164, pp. 209-10. En el problema nº 166, pág. 212, inserta la figura pero no lo refleja en el texto.

⁴⁷ J. DOCAMPO REY, “A new source for medieval mathematics... pp. 164, 165 y 167, problemas nº 68, 69 y 72.

⁴⁸ Debemos evitar, como ya advertimos, atribuir al primer autor los añadidos posteriores. Éstos son muy abundantes en este manuscrito. Aparecen en los márgenes sobre todo cuando se explican las operaciones elementales, especias, que preceden a los problemas. También aparecen en estos márgenes algunas manos dibujadas y la expresión ¡ojo!

⁴⁹ Real Academia Española, Ms. 145, fol. 161 r - 164 r.

⁵⁰ Ver mi trabajo anteriormente citado, “Un Manual de aritmética mercantil... pp. 80-1.

⁵¹ La tabla en la que aparecen los números y el lenguaje digital, se trata de la misma tabla que reproduce Luca Pacioli en *Suma Aritmética, Geometría, Proportioni et Proporcionalita*, publicada en Venecia en 1494. A su vez, ésta recuerda la de Beda el Venerable en *De rationi temporarum* aunque en el caso veneciano y en el que aquí reproducimos los “cientos” y los “miles” se cuentan con la mano derecha.

⁵² B. CAUNEDO y R. CÓRDOBA DE LA LLAVE, *El arte del alguarismo*, p. 137.

*asygnada ... e sy no te saliere tanto, no es çierta la cuenta*⁵³... *et sy lo quisieredes provar...si quisieredes provar la*⁵⁴... se encuentran en diversos textos de problemas. La constatación suele realizarse en aquellos problemas de mayor dificultad, en los que podríamos tener alguna duda sobre la autenticidad o falsedad del resultado.

- Algunos autores pretenden demostrar su notable maestría y destreza, explicándonos un doble método, dos alternativas para llegar a la solución correcta. *Otrosy, sy quisieres fazer esta cuenta o regla por otra manera... y esta quenta misma, sy la quisieres fazer por otra manera, bien lo puedes fazer*⁵⁵, *o asy por estos dos modos faras estas e otras semejantes quantas*⁵⁶.
- De manera muy excepcional, se permiten advertirnos que algunos cálculos no resultan demasiado útiles; no obstante, enseña a hacerlos ... *Moguer que non es cosa que sea provechosa*⁵⁷.

2. Reflexiones

Una vez presentados los textos con los que hemos trabajado estos años, es un buen momento de detenernos en realizar algunas reflexiones con cierta perspectiva de futuro. Una primera pregunta resulta ineludible ¿qué deberíamos hacer, además de por supuesto seguir buscando y estudiando manuales de este tipo? Está claro que ciertos conocimientos aritméticos y contables eran necesarios para los nuevos hombres de negocios. Su aprendizaje formaba profesionales que conocían y podían aplicar métodos y técnicas entonces vanguardistas garantizadas de éxito “empresarial”. El estudio de estas técnicas interesan por sí mismos a todos aquellos que quieran continuar profundizando en aspectos de la denominada en su día “revolución comercial”⁵⁸. Pero además, creo que la información que los problemas incluyen en sus enunciados puede enriquecer algunos aspectos de la historia del comercio. No debemos olvidar que el realismo de las situaciones descritas en estos ejercicios, su adaptación a la vida real, al entorno de los jóvenes aprendices nos lo facilitarían. Los datos que contienen los problemas no son irrelevantes pues reflejan circunstancias concretas en las que los mercaderes podrían verse involucrados. Esta particularidad nos brinda la oportunidad de manejar datos de interés económico y comercial y que nos pueden permitir ampliar, matizar y o confirmar una información ya conocida, de ahí que con las debidas precauciones, estos textos puedan utilizarse como fuente histórica.

⁵³ Ver, por ejemplo, los problemas 88, 89, 110, del *Arte del Alguarismo*, pp. 174-75; p. 188.

⁵⁴ DOCAMPO REY, J. “A new source for medieval mathematics... pp. 145-6, problemas nº 14 y 15.

⁵⁵ Problemas números 125 y 128 del *Arte del Alguarismo*, 195-6

⁵⁶ Fol. 145 v. de *De Arismetica* en mi trabajo con este título, p. 44

⁵⁷ Expresión que aparece tras el problema 175 del *Arte del Alguarismo*, p. 231

⁵⁸ R. DE ROOVER, “Business, Banking and Economic Thought”, *Scholastic Economics: Survival and Lasting Influence from the Sixteenth Century to Adam Smith*, J.KIRSHNER ed., University of Chicago Press, Chicago, 1974, pp. 306-35.

2.1. *¿Se pueden utilizar los problemas como fuente histórica?*

Los datos que se repiten en estas colecciones nos proporcionan una interesante información sobre las mercancías comercializadas y sus precios, los beneficios por su comercialización, las cotizaciones de monedas, los tipos de interés aplicados a diferentes operaciones, las medidas de longitud, peso y capacidad, sobre los itinerarios frecuentados o sobre las plazas con mayor dinamismo ... y todo ello utilizando magnitudes y valores extraídas de la vida real y de las que debemos ser capaces de beneficiarnos. Los textos mencionan reiteradamente gran variedad de productos con sus precios y otras singularidades, por lo que podemos ir comprobando qué productos dominaban el mercado, ¿eran materias primas o productos elaborados?, ¿de qué tipo?, ¿se puede hacer algún tipo de clasificación?, ¿qué volumen se manejaba?, ¿cuál era su precio?, ¿cómo oscilaban? Con estudios pormenorizados se podría tratar de ver qué productos eran los más mencionados si los productos alimenticios o los textiles, materiales de construcción, metales y minerales o enseres varios y también sus variedades, pues en ocasiones, los calificativos que acompañan a cada nombre o a los precios nos permiten determinar cualidades, tamaño o utilidad concreta. Por el momento, una primera impresión solamente nos conduce a confirmar que dominaba la comercialización de productos naturales tanto de origen vegetal como animal o mineral, que éstos se manejan en volúmenes más grandes que los productos elaborados, que tenían un precio unitario más bajo y que requerían operaciones de transporte más o menos costosas para llevarlos del productor al usuario.

Una comparativa de productos y precios y su oscilación se podría hacer con cierta facilidad aunque bien es cierto que un serio inconveniente podría anular esta posibilidad. Es éste el de precisar la datación exacta de las diferentes obras y su continuidad en el tiempo que permitiese elaborar comparativas fiables. Además, los listados de precios no nos permitirían formar series nunca aunque se refiriesen a años diferentes, pues sus variaciones pueden obedecer también al lugar donde se efectúa la compra. Incluso, pueden responder a precios de compra anticipada, primera compra, comercialización al por mayor, o por el contrario indicar precios de consumo, de reventa o al por menor, vigentes en un mercado ordinario en un momento determinado. No obstante, y a pesar de todas estas variables, los datos que nos proporcionan estos problemas, considerados en sí mismos y comparándolos con otros contemporáneos, pueden ser de utilidad para conocer las características de la oferta y precios “corrientes” en diferentes plazas.

También se pueden obtener detalles puntuales sobre las características de las principales monedas en circulación en el momento en que se elaboraron los manuales, así como sus principales equivalencias siguiendo el ejemplo de la italiana Lucia Travaini⁵⁹.

La metrología podría beneficiarse con algunas particularidades, así como la historia del transporte, pues pequeñas referencias nos acercan a la compleja red de comunicaciones del momento. Duración de viajes, distancias diarias recorridas, ciudades escala, peque-

⁵⁹ L. TRAVAINI, *Monete, Mercanti e Matematica. La monete medievali nei trattati di aritmetica e nei libri di mercatura*, Jouvence, Roma, 2003.

ñas instalaciones dedicadas al descanso y avituallamiento... son detalles que aparecen salpicados en algunos textos y que podrían ser aprovechables, así como los que se pueden obtener sobre las características de las embarcaciones o carretas utilizadas, precios de fletes y peajes.

De igual forma, podríamos utilizar datos referidos a otras realidades y tipos de actividad como el de salarios de diferentes oficios y categorías del sector de la construcción y sobre la duración de obras, ritmo de trabajo, penalizaciones por demora o por incumplimiento de contrato. Aquí, la prevención debe ser aún mayor pues los datos se refieren a pagos por servicios cuya magnitud no tuvo por que mantenerse constante en el transcurso del período de tiempo elegido y los datos corresponden a trabajadores cuyas funciones es probable que registrasen ciertas variaciones. Además la heterogeneidad de las condiciones laborales podía ser muy acusada. Somos conscientes de que aunque no sean muestras que puedan considerarse representativas, ahí aparecen, y como dije con anterioridad, siempre se pueden comparar con datos sustentados en fuentes más sólidas.

A este tipo de datos podemos añadir algunos otros, muy diferentes, obtenidos de las colecciones del siglo XVI. Especialmente valiosos, dada la carencia de noticias de este tipo en otras fuentes, consideramos los detalles sobre modelos de asociaciones mercantiles. Nos revelan, por ejemplo, que las compañías comerciales permitieron múltiples combinaciones de reagrupamiento de socios o de aportaciones de fondos diversos por tiempos también diferentes. Se daba entrada así a aquellos que no siendo mercaderes, no podían asumir grandes riesgos, pero sí obtener rendimiento de un dinero ahorrado. Podríamos destacar la propia denominación “regla de la compañía” que utiliza Mosén Juan de Andrés para ilustrar el conjunto de problemas que integran el tratado quinto de su manual⁶⁰. Se trata de repartos proporcionales, nombre que desde el punto de vista aritmético le correspondería; pero, la utilización del término, *regla de compañía*, y mejor aún, su triunfo, —en la actualidad todavía se le denomina así— nos revela su estrecha vinculación con el mundo de los negocios y con los repartos de beneficios o pérdidas entre los diferentes socios de una asociación mercantil. Aunque sí habíamos encontrado en los otros manuales castellanos estudiados problemas muy similares a los que aquí se presentan, no habíamos localizado la mención expresa de “regla de compañía”, que sí aparece en el manual catalán *Summa de l'art d'Aritmètica*, de Francesc de Santcliment⁶¹, publicado unos años antes, en 1482, que el que ahora nos ocupa. Santcliment, además, justifica la expresión, y cuando nos indica que en esta clase de cálculo son necesarias tres cosas: las partes, el tiempo y la pérdida o ganancia, señala que es esa posibilidad, la de ganar o perder, la que determina el nombre de la regla⁶². Más adelante

⁶⁰ Ver “Otros datos sobre las compañías comerciales castellanas en la Baja Edad Media”, en *Castilla y el Mundo Feudal*. ..vol. I, pp. 625-38.

⁶¹ F. SANTCLIMENT, *Summa de l'art d'aritmètica*, A.MALET, ed., *Summa de l'art Aritmètica de Francesc Santcliment*, Eumo, Vich, 1998. Aparece también en muchos de los italianos, incluso en el que parece inaugurar la producción, *El Liber Abaci* de Leonardo de Pisa.

⁶² F. SANTCLIMENT, *Summa de l'art d'aritmètica*, A.MALET, ed., *Summa de l'art...* “*Les quals 3 coses són les parts; la segona és lo temps; la terça és lo guany o pèrdua. Car per ço se diuen companyes, que així es passen a rise de perdre com de guanyar*”, p. 248.

reconoce expresamente que los problemas de compañías son muy semejantes a los de la regla de tres, siendo la única diferencia que en este último tipo de problemas no hay comúnmente más de tres partes, mientras que en los de las compañías se encuentran a menudo muchas partes⁶³.

Mosén Juan de Andrés, es todavía más explícito, y cuando realiza la presentación de la regla, la vincula directamente con el mundo del comercio, y así nos dirá que ... *trata de la operación que se fazen entre dos o tres mercaderes y dende arriba en el arte mercantivol quando fazen compañía y ponen su canal diferentemente...* para continuar un poco más adelante ... *y cómo debe ser la ganancia o la perdida partido entre tales mercaderes según su canal de cada uno proporcionalmente*⁶⁴... definiciones que animan a pensar que el cálculo elemental que los mercaderes aprendían tenían como uno de sus objetivos la evaluación y cuantificación de sus ingresos, gastos o beneficios.

Utilizando sus datos como “fuente” para el estudio del funcionamiento de las compañías bajomedievales, podríamos confirmar de nuevo que una de las obligaciones fundamentales de los socios de una compañía comercial fue la aportación de capital que hacía posible la constitución e inicio de la sociedad. Este capital podía ser de naturaleza diversa, ya que las aportaciones monetarias —que fueron las más frecuentes— podían combinarse con el trabajo personal de alguno de los socios o con objetos de valor, aquellos que como una joya pudiesen ser valorados en términos económicos. También se pueden obtener datos sobre los beneficios de las compañías en los que se evidencia la importancia del factor tiempo confirmándonos que la rentabilidad *depende* del tiempo. El disponer de datos dispares no nos permite establecer valores medios concluyentes, pero sí nos permite deducir de manera unívoca la asociación de la inversión al factor tiempo, dándonos a entender que será imprescindible tenerlo en cuenta en el futuro de las inversiones. Según el momento en el que los socios hiciesen sus contribuciones, se pueden distinguir dos tipos de aportaciones. Unas iniciales, realizadas por los socios en el momento de constituirse la sociedad y otras realizadas durante el transcurso de ésta, debidas bien a nuevas aportaciones o a la acumulación de beneficios. Resulta bastante claro, que el capital de una compañía pudo incrementarse durante la duración de la misma. El autor de este manual manifiesta de forma reiterada la movilidad y fraccionamiento de la inversión. Para él, las operaciones de compra, venta, inversiones, no son estáticas ni inmóviles sino que son dinámicas, pudiendo cambiar varias veces en el transcurso del tiempo.

La contribución monetaria abarcaba toda la escala de posibles fortunas encontrando aportaciones mas o menos homogéneas en cada caso, lo que no excluye el que siempre

⁶³ F. SANTCLIMENT, *Summa de l'art d'aritmètica*, A. MALET, ed., *Summa de l'art* “...que la diferencia que és entre les companyes i la regla de tres no és sinó per quant en les companyies se troben moltes vegades moltes parts, per ésser molts en la companyia, i en la regla de tres no hi ve sinó comunaament tres parts. I aquesta és la diferencia entre les dites regles. És veritar que qualsevol raó de companyies per la dita regla de tres se pot fe...r”, pag. 249

⁶⁴ B.N. Raros, 9124, fol. XCL r.

hubiese un socio principal⁶⁵. Así observamos que el dinero aportado en estas compañías es similar en todos los casos, y que no suelen exceder el doble de la aportación mínima realizada, siendo la rentabilidad igual para todos los socios.

Hubo también otros tipos de asociación con un objeto específico, es decir, que se constituyeron con un fin concreto, y no para comerciar con carácter general. En esta colección, estos ejemplos nos conducen al mundo de la ganadería y al cuidado de ciertas cabezas de ganado, encontrándonos siempre con la particularidad de que una persona, el pastor, pone su trabajo —el cuidado de los animales— como contribución clave y fundamental a la compañía, independientemente de que también pudiese colaborar con capital, es decir, con sus propias cabezas de ganado. Era él, quien en calidad de socio, se hacía cargo del manejo del negocio durante el tiempo previsto para la asociación, cuatro o cinco años, tiempo más largo que el previsto para las compañías con dedicación comercial, en las que la duración, que dependía de la voluntad de los socios, oscilaba entre uno y tres años. No fue infrecuente, sin embargo, que se disolviesen antes de que expirase este plazo por causas de muy diversa índole⁶⁶.

Independientemente que los datos de estos manuales puedan aprovecharse para corroborar aspectos más o menos conocidos, resulta evidente que la difusión y generalización de los mismos y sobre todo su aprendizaje puso en manos de los nuevos profesionales métodos rigurosos de cálculo y registro que resultaron imprescindibles para el éxito de sus negocios. La “cultura del ábaco” definida por Jean Hoyrup⁶⁷ fue también una realidad en la Castilla bajomedieval.

Fecha de recepción: 8 de marzo de 2012

Fecha de aceptación: 30 de marzo de 2012

⁶⁵ Las aportaciones de 1.000, 2.000 o 3.000 ducados siempre aparecen en una situación, y las de 40, 30 o 2º ducados también siempre en un mismo enunciado. Nunca una aportación de 40 ducados se combina con otra de miles.

⁶⁶ Los enunciados de los problemas recogen ejemplos de disolución de las compañías antes del fin del plazo previsto (el mencionado de uno a tres años), pero no analizan los motivos. Podemos pensar que irían desde el deseo de los socios de poner fin a la relación o a causas de fuerza mayor como el fallecimiento de alguno de ellos.

⁶⁷ J. HOURYP, *Jacopo da Firenzes,s ...* pp. 30-41 nos recoge un amplio panorama de las escuelas de ábaco, centros especializados en la enseñanza de la aritmética mercantil y explica la enorme difusión de los manuales, lo que le ha permitido acuñar la expresión “cultura de ábaco”.