

Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión

MODESTO SIERRA VÁZQUEZ
Universidad de Salamanca

Resumen:

La investigación en Educación Matemática es un campo en continuo cambio y progreso. En este artículo se tratan los objetivos, los cambios recientes y los criterios de la investigación en Educación Matemática. En cuanto al método general utilizado, hay que señalar que la Educación Matemática, al igual que el resto de las disciplinas referidas a la educación, aún disponiendo de un conjunto de estrategias metodológicas para abordar su objeto de estudio, no tiene un método propio. A continuación, se trata la polémica acerca de la *investigación experimental* versus *investigación interpretativa*, sin la pretensión de resolverla pero sí de arrojar luz sobre ella. Asimismo se presentan sumariamente los medios de difusión de la investigación en Educación Matemática. Se expone brevemente un ejemplo de investigación sobre análisis de libros de texto. La conclusión es que la investigación en Educación Matemática es una disciplina fronteriza que ha integrado métodos de otras disciplinas, lo que ha contribuido a realizar trabajos que han acrecentado de modo progresivo y acumulativo los conocimientos acerca de los métodos de enseñanza y de los problemas del aprendizaje de las Matemáticas.

Palabras claves:

Investigación en Educación Matemática.

Abstract:

The research in Mathematics Education is a scientific field characterized by continuous change and progress. The aim of this paper is to describe the objectives, the current changes, and the criteria of this research field. With regard to the methodology, it is necessary to say that, similar to studies about other topics referred to teaching, the research in Mathematics Education does not have a particular methodology, although it has a set of own methods to study its subject matter. Next, it is discussed the controversy on *experimental research* versus *interpretative research* with the aim to shed some light on them. Finally, it is presented an exposition about the spread of works on Mathematics Education and an example of the research in analysis of textbooks. We conclude that the research in Mathematics Education is an interdisciplinary field that has integrated different methods from other disciplines; this has contributed significantly to new works that have increased the knowledge about teaching methods and learning problems in Mathematics.

Keywords:

Research in Mathematics Education.

Résumé:

La recherche en Didactique des Mathématiques est un champ qui continuellement est en plein développement. Dans cet article on parlera des objectifs, des récentes changements et de critères de la recherche en Didactique des Mathématiques. Au sujet de la méthode générale utilisée, il faut souligner que la recherche en Didactique des Mathématiques, au même titre que le reste des disciplines relatives à la éducation, même si l'on dispose d'un ensemble de stratégies méthodologiques pour aborder l'objet de son étude, il n'existe pas une méthode propre. Ensuite, on parlera de polémique entre la recherche expérimentale et la recherche interprétative, sans prétendre solutionner le problème mais en éclairant un peu la solution. On présentera sommairement les moyens de diffusion de la recherche en Didactique des Mathématiques. On exposera brièvement un exemple de analyse des manuels scolaires. On conclura en affirmant que la recherche en Didactique des Mathématiques est une discipline qui a intégrée des méthodes d'investigations différentes ce qui a permis de réaliser des investigations qui ont acréditées, de façon progressive et accumulative, les connaissances au sujet de de son étude.

Mots clés:

Recherche en Didactique des Mathématiques.

Fecha de recepción: 29-03-2011

Fecha de aceptación: 14-04-2011

1. Introducción

Todo campo del saber, si no desea quedar obsoleto, necesita acrecentar de modo progresivo y acumulativo los conocimientos acerca de su objeto de estudio o, al menos, tener una cierta voluntad de ello. Ese es precisamente el objetivo fundamental de la investigación en ciencia factual y, en particular, de la investigación en nuestra disciplina. Además es un valor convencional en ciencia realizarlo de modo reglado o con un cierto método.

Entre los trabajos anteriores dedicados a la Investigación en Educación Matemática tenemos los de Rico y Sierra (1994) sobre la historia de la educación matemática en España en el siglo XX, con datos importantes sobre la incipiente investigación en los años 70 y 80 del siglo pasado; Rico y Sierra (2000) y Rico, Sierra y Castro (2000) sobre la investigación en Educación Matemática y, en particular, en España; Torralbo, Fernández Cano, Rico, Maz y Gutiérrez (2003) y Vallejo, Torralbo, Fernández y Maz (2007), sobre la producción científica de tesis doctorales; Llinares (2008) sobre el impacto internacional de las publicaciones de investigadores españoles. Nos hemos limitado a citar los que consideramos más significativos, pero destacamos que existen otros trabajos sobre este asunto. En el Volumen 29 (1) de esta misma Revista *Educatio Siglo XXI*,

Blanco (2011) ha realizado un recorrido por la investigación en Educación Matemática en España, por lo que en este artículo presentaré algunos aspectos más “técnicos” de dicha investigación. Así, en lo que sigue se tratan previamente los objetivos, los cambios recientes y los criterios de la investigación. En cuanto al método general utilizado, hay que señalar que la Educación Matemática, al igual que el resto de las disciplinas referidas a la educación, aún disponiendo de un conjunto de estrategias metodológicas para abordar su objeto de estudio, no tiene un método propio sino que como señala Gutiérrez (1991).

“la investigación en este área se encuentra situada en una posición intermedia entre las investigaciones de los diversos campos científicos que tienen que ver con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas” (p.150).

Finalmente presentaremos brevemente los medios de difusión de la investigación en Educación matemática y terminaremos con un ejemplo de investigación.

2. Objetivos, cambios y criterios en la Investigación en Educación Matemática

2.1. Objetivos generales de la investigación en Educación Matemática

Es claro que la fijación de objetivos generales en investigación (y, consiguientemente, la metodología a utilizar) depende de la propia concepción de la Educación Matemática, considerada bien como ciencia básica (tal vez con un *corpus* de doctrina independiente), bien como ciencia aplicada, bien como pura tecnología (conjunto de técnicas óptimas y efectivas para transmitir y facilitar la adquisición de conocimientos y habilidades), o bien como una mezcla de esas tres concepciones. Esas concepciones existen actualmente (explícita o implícitamente declaradas por los autores) en el campo de Educación Matemática y marcan efectivamente los objetivos de la investigación. Así, en lo que posiblemente fuese el primer tratado sistemático sobre investigación en esta disciplina, Begle *et al* (1980), con un concepción entre ciencia pura y aplicada, consideran que la investigación debe estar inspirada a la vez en la realidad escolar y en los aspectos teóricos, y escribe que debe referirse

- a una variedad de objetivos, comprendiendo entre otros, el estudio de:
- “a) los estilos cognitivos, características de la personalidad y habilidades individuales de los alumnos y del profesor como fondo para una teoría general sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas,
 - b) los aspectos teóricos del aprendizaje, enseñanza y desarrollo del currículo,
 - c) el desarrollo de modelos de toma de decisiones que se puedan usar en las escuelas para poder hacer elecciones inteligentes entre varias alternativas,
 - d) la evaluación de procedimientos instructivos, programas y materiales para predecir sus beneficios educativos,
 - e) el desarrollo de productos educativos como currículos, test y escalas de actitudes” (p.8).

Existe, sin embargo, una cierta unanimidad en aceptar que los objetivos de la investigación en Educación Matemática no se reducen sólo a conocer las circunstancias en las que la educación matemática ocurre, sino a determinar los conocimientos, medios y técnicas para *mejorar* el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas (Kilpatrick, 1988).

Por su partes Eisenhart (1988) escribe:

“Las cuestiones sobre las que investigar en educación matemática tienden a ser cuestiones derivadas de la siguiente cuestión general: ¿Cómo la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas pueden ser mejorados (*be improved*)” (p. 100).

Pues bien, el deseo de los investigadores de cumplir el objetivo, aparentemente compartido por todos, de investigar para mejorar efectivamente la enseñanza de las Matemáticas, ha hecho que se produzcan cambios en los contenidos de investigación y en los procedimientos utilizados para estudiarlos, algunos de los cuales se exponen a continuación.

2.2. Cambios en la investigación en Educación Matemática

Existe entre los investigadores en educación matemática la sensación de que recientemente están produciéndose cambios en las características de esa comunidad y un desplazamiento del interés hacia otro tipo de

problemas. En particular, Kilpatrick (1988) ya apuntó que se está produciendo un desplazamiento en el contenido y cambios en el estilo de investigación. Esta apreciación llega hasta nuestros días, de modo que el mismo Kilpatrick (2007) se reafirma en dichos cambios. Por lo que se refiere al contenido, Kilpatrick enumera cuatro tipos diferentes de cambios:

- Aparición de temas que no estaban presentes en la investigación hace diez años, como las diferencias en el aprendizaje por sexo, clase social o inmigración, estudio de las ideas y creencias de los profesores, afectividad y matemáticas y el estudio de las matemáticas utilizadas fuera del contexto escolar. A mi juicio, se puede añadir el incremento de la investigación en procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en el nivel universitario.
- Incremento en importancia de temas que ya estaban presentes en el pasado, tan variados como análisis de errores, análisis de la instrucción, problemas relacionados con el uso de ordenadores y nuevas tecnologías, la transición de la aritmética al álgebra, aprendizaje y primera enseñanza del Análisis.
- Mantenimiento de temas, como estudios acerca de la resolución de problemas y razonamiento espacial.
- Desaparición de temas de gran impacto en el pasado, como los estudios de carácter piagetianos y la búsqueda de interacciones aptitudes-tratamiento. Sin embargo, es conocido, que han emergido teorías neopiagetianas como la teoría APOS.

En cuanto al estilo de plantear las investigaciones, Kilpatrick señaló tres tipos de cambios. El primero se refiere a la tendencia a tratar aspectos “fronterizos” (como evaluación, afectividad, uso de tecnologías, lenguaje, metacognición, creencias de los profesores, formación de profesores) frente a aspectos propios (como temas del currículum). El segundo, a la concepción sobre aprendizaje (como construcción activa más que pasiva) y sobre el currículum (conjunto de experiencias más que conjunto de conocimientos). El tercer cambio se refiere a aspectos epistemológicos, y consiste en un nuevo punto de vista sobre la propia investigación (y, en particular, respecto a los métodos de llevarla a cabo). Este último cambio ha consistido en el desplazamiento desde la investigación empírico-analítica hacia la investigación cualitativa-interpretativa.

Finalmente, un problema de vital importancia en toda disciplina que

tenga como último fin transformar (y no sólo conocer) alguna parcela de la realidad, son las relaciones, no siempre obvias ni claras, entre teoría y práctica. Ese problema se plantea en Educación Matemática en lo que es la relación entre investigación y la práctica cotidiana en el aula, y, como tal debe ser objeto de investigación. Muestra de su trascendencia es la creación del grupo internacional *Systematic Cooperation Between Theory and Practice* (SCTP), entre cuyos objetivos figura aportar soluciones a las relaciones entre investigación y práctica diaria del profesor desde diferentes perspectivas.

2.3. Criterios de la investigación en Educación Matemática

Todo campo específico suele fijar aquellos criterios que un trabajo referido a su objeto de estudio ha de cumplir para ser aceptado como tal. En el contexto de la Educación Matemática suelen manejarse tres: el primer criterio es el de rigor, que Kilpatrick (1981) iguala a (posibilidad de) replicabilidad; el segundo es el de relevancia, significación o interés; el tercero es el de validez.

En general el rigor se refiere a los estándares que debe satisfacer una investigación y así Kilpatrick (1981) escribe al respecto:

“Un estudio debe ser diseñado para alcanzar un fin bien definido, usando técnicas que otros puedan utilizar y permitiendo la validación de los resultados. El informe de un estudio riguroso debería contener una indicación clara de las hipótesis realizadas, tanto al principio como al final del estudio. El investigador debería especificar las cuestiones subyacentes a la investigación, presentando la evidencia característica de cada cuestión, sugiriendo alguna explicación alternativa plausible para los descubrimientos y sugiriendo, si es posible, qué alternativas son más probables y cuáles menos. El informe del estudio debería contener tantos detalles sobre los procedimientos usados y la información reunida como lo permita el espacio disponible, y si es posible, el lector interesado debería tener la oportunidad de obtener detalles adicionales por otros medios” (pp. 371-372).

He incluido esta larga cita por lo que supone de declaración de lo que debe ser una investigación rigurosa en Educación Matemática.

El segundo criterio es el de significación (Kilpatrick, 1981), relevancia o interés (Freudenthal, 1982). Por significación se entiende “el impacto que un estudio de investigación puede tener sobre nuestro pensamiento”

(Kilpatrick, 1981, p.372). Así pues, una investigación será significativa si proporciona una nueva visión sobre el problema que se está considerando y ayuda a investigadores y profesores a identificar nuevas cuestiones. Freudenthal (1982) considera el interés o pertinencia como una relación de la investigación sobre enseñanza con la enseñanza misma. Por tanto, una investigación será pertinente si puede influir sobre la enseñanza.

El problema que se plantea en Educación Matemática es que, en ocasiones, rigor y significación o pertinencia están, metafóricamente, en una cierta relación de incertidumbre. Sucede a menudo que trabajos muy rigurosos, lo son por que han reducido demasiado el campo de estudio y controlado tan exhaustivamente las variables implicadas que, por tanto, sus resultados son difícilmente aplicables a situaciones reales; recíprocamente, estudios que se interesan por problemas relevantes utilizan una clase de metodología tan laxa y poco explícita que sus resultados son difícilmente replicables. Para ilustrar estas ideas, Kilpatrick (1981) realizó una comparación entre las investigaciones realizadas en los años sesenta en USA y en la antigua URSS en el campo de la educación matemática. La comparación evidenció que muchas investigaciones en USA han tenido alto rigor y baja significación, y que la excelente metodología (basada en la utilización rigurosa de diseños experimentales y análisis estadístico de datos) ha sido aplicada a problemas muchas veces irrelevantes. Los soviéticos, en cambio, se han preocupado más de la significación de los problemas que del rigor.

Sin embargo ambos criterios no son polos opuestos de un continuo, puesto que una investigación puede tener ambas cualidades, una de ellas y no la otra, o ninguna de las dos. Es más, hay que caer en la cuenta que los avances científicos efectivos (en áreas científicas altamente desarrolladas) cumplen a la vez ambos criterios. Se debe tender a que las investigaciones en Educación Matemática optimicen ambos criterios, intentando crear nuevos instrumentos para evaluar aspectos del aprendizaje y pensamiento matemático que sean significativos.

El tercer criterio de calidad es la validez. La validez se refiere al modo en que justificamos las interpretaciones que hacemos de la investigación.

Rico (1999) (citando un trabajo Sierpiska y Kilpatrick (1993)) escribe que estos autores establecen los de pertinencia, validez, objetividad, originalidad, rigor y precisión, capacidad para predecir, reproductibilidad y relación con las matemáticas y su enseñanza, que concreta en el siguiente cuadro:

Criterio	Explicitación
Pertinencia	¿Para qué o para quién es importante la investigación? ¿Qué se va a mejorar? ¿Qué utilidad va a tener?
Validez	¿Cómo se justifica la interpretación que se hace de la investigación? ¿Qué consecuencias se derivan?
Objetividad	¿Hasta qué punto es posible refutar las conclusiones y argumentos utilizados?
Originalidad	¿Hasta que punto la investigación muestra ideas conocidas en una nueva perspectiva?
Rigor y precisión	¿Qué precisión tienen las observaciones realizadas? ¿Con que exigencias se han llevado a cabo? ¿Qué precisión tienen los criterios para interpretar las informaciones obtenidas?
Predictibilidad	¿Qué explicación se deriva del estudio? ¿Qué comprensión proporciona? ¿Hasta que punto se anticipan las actuaciones de alumnos y profesores?
Replicabilidad	¿Están claramente descritos los procedimientos utilizados? ¿Sería posible para otro investigador replicar el estudio? ¿Es pública la totalidad de la información?
Conexiones	¿De qué modo está relacionado el estudio con la matemática y con la educación?

3. El Proceso de Investigación en Educación Matemática

A continuación se expone el proceso (dinámico) de investigación preconizado para estudiar los problemas educativos.

Aparte del conocimiento (que se supone) de la literatura científica y experiencia, Johnson (1980) considera que antes de seleccionar un problema y diseñar un estudio del mismo,

“la primera etapa en el proceso de investigación es familiarizarse con la filosofía del campo de investigación además de con los trabajos de investigación” (p. 29).

Aunque todas las ciencias factuales aplican el método científico en general, difieren en las tácticas o procedimientos concretos que usan para la resolución de sus problemas particulares (Bunge, 1969). Ese conjunto de “tácticas”, en el lenguaje de M. Bunge, son los tipos de investigación que, referidas al campo de la Educación Matemática, exponemos a continuación. Hay que decir de antemano que, en el contexto de la educación, existe una enorme variedad de taxonomías de los tipos de investigación.

Fox (1981) en su descripción del proceso de investigación en educación establece diecisiete etapas, que coinciden en lo esencial con las propuestas por otros autores. Proponemos estas etapas porque han sido de utilidad para dirigir investigaciones en Educación Matemática.

Como se aprecia, las etapas se clasifican en tres partes: la primera trata del diseño del plan de investigación, la segunda de la ejecución del Plan, y la tercera de la aplicación de los resultados. Las etapas, aunque comienzan en momentos distintos, pueden solaparse en el tiempo de modo que se ejecuten simultáneamente varias de ellas.

Etapas del Plan de Investigación (Fox, 1981, p. 56)

PRIMERA PARTE: DISEÑO DEL PLAN DE INVESTIGACIÓN

- Etapas 1. Idea o necesidad impulsora y área problemática
- Etapas 2. Examen inicial de la Bibliografía
- Etapas 3. Definición del problema concreto de la investigación
- Etapas 4. Estimación del éxito potencial de la investigación planteada
- Etapas 5. Segundo examen de la bibliografía
- Etapas 6. Selección del enfoque de la investigación
- Etapas 7. Formulación de las hipótesis de la investigación
- Etapas 8. Selección de métodos y técnicas de recogida de datos
- Etapas 9. Selección y elaboración de los instrumentos de recogida de datos
- Etapas 10. Diseño del plan de análisis de datos
- Etapas 11. Diseño del plan de recogida de datos
- Etapas 12. Identificación de la población y muestra a utilizar
- Etapas 13. Estudios pilotos del enfoque de recogida de datos, métodos e instrumentos y del plan de análisis de datos

SEGUNDA PARTE: EJECUCIÓN DEL PLAN DE INVESTIGACIÓN

- Etapas 14. Ejecución del plan de recogida de datos

Etapas 15. Ejecución del plan de análisis de datos

Etapas 16. Preparación de los informes de la investigación

TERCERA PARTE: APLICACIÓN DE LOS RESULTADOS

Etapas 17. Diseminación de los resultados y propuestas de medidas de Actuación

Estas etapas generales se aplican a cada **tipo de investigación** que, sin ser exhaustivos, se pueden clasificar en Educación Matemática en:

a) Investigación descriptiva o de examen (survey research)

En las ciencias factuales desarrolladas, los problemas a resolver suelen ser conocidos y estar planteados con relativa claridad, y, a la vez, las hipótesis y predicciones se derivan de teorías elaboradas (y, a menudo, formalizadas); en cambio, en la investigación educativa la situación es mucho más confusa. De ahí la necesidad de disponer de procedimientos para plantear claramente los problemas y elaborar hipótesis para resolverlos. En particular, la llamada investigación descriptiva se orienta hacia el presente y su objetivo es, generalmente, hacer una descripción exacta de la situación real del problema que se quiere investigar, de modo que permita, a partir de los datos obtenidos, generar hipótesis, sugerir vías de solución, plantear problemas o tomar decisiones para investigaciones posteriores.

b) Investigación experimental

En palabras de Bunge (1969): "Experimento es aquella clase de experiencia científica en la cual se provoca deliberadamente algún cambio y se observa e interpreta el resultado con alguna finalidad cognoscitiva". En la versión dura y estricta, experimento es aquella experiencia científica en la que seleccionadas *dos* variables (entre las que se sospecha que existe una relación de causa a efecto) el experimentador, manteniendo constantes todas las demás, manipula la variable independiente (a ser posible cuantitativa) y registra el efecto de su variación sistemática sobre la variable dependiente (a ser posible cuantitativa). En la versión blanda, por experimento se entiende el procedimiento en el que se manipulan ciertas variables (llamadas variables independientes) y se observan sus efectos sobre otras (llamadas variables dependientes).

Como es bien conocido, la experimentación lleva consigo la comparación de diferentes grupos o tratamientos entre sí. En todo experimento

son necesarios al menos dos grupos, llamados grupo experimental y grupo de control. Al grupo experimental se le aplica el tratamiento previsto, mientras que al grupo de control no se le somete a ese tratamiento (o se le somete a un tratamiento placebo). El análisis de los resultados indicará si existen diferencias (y si esas diferencias son estadísticamente significativas) y si esas diferencias se deben a las variables correspondientes. La variable que define el cambio de grupo a grupo, se denomina variable independiente, también llamada experimental y es la que manipula el experimentador, generando cambios sistemáticos para que pueda observarse el efecto de este cambio. La variable observada con el fin de comprobar qué le sucede como resultado de la manipulación de la variable independiente, se denomina variable dependiente. En la situación ideal el experimento se diseña de tal modo que exista una relación plausible entre las variables dependiente e independiente, en el sentido que se pueda concluir que la variación de la variable dependiente se debe precisamente a la variable independiente.

c) Investigación cualitativa o interpretativa

Los procedimientos “duros” de recogida de datos y contrastación de hipótesis (observación sistemática y experimentación) son muy rigurosos, pero al exigir que se definan estrictamente (y a veces de modo cuantitativo) sus variables, reducen inevitablemente su campo de estudio y, por ello, en ocasiones carecen de pertinencia y significación (en el sentido antes estudiado). Sacrifican su pertinencia al rigor y a la posibilidad de replicación y de generalización. Esta afirmación, cierta para áreas parciales de las ciencias factuales (las áreas en estado preteorético que no cuentan con un paradigma eficaz que guíe su investigación), es absolutamente cierta en el caso de la Educación Matemática. La idea de que los procedimientos experimentales y cuantitativos no capturan la complejidad del hecho educativo, el sentimiento de que reducen el objeto de estudio o de que sus resultados carecen de interés, y en ocasiones la impotencia y la falta de imaginación, son motivos que llevan a muchos investigadores a abandonar las técnicas tradicionales de recogida de datos y contrastación y a elaborar y utilizar otras nuevas más “ajustadas al objeto de estudio”, como suelen argumentar como principio común. Este nuevo tipo de investigación recibe denominaciones tan variadas como paradigma cualitativo, metodología cualitativa, interpretativa, etnográfica, ecológica, observacional, participativa, estudio de casos (con un significado clínico). Los distintos términos corresponden a enfoques

ligeramente distintos, pero todos ellos comparten el principio común antes citado.

d) Investigación histórica

La Historia de la Educación Matemática (que se inició en Alemania hacia 1880) forma parte tanto de la Educación Matemática como de la Historia de la Educación, por lo que parece oportuno comenzar con una reflexión sobre esta última.

La posición establecida entre los historiadores de la educación, compartida por muchos investigadores, es que la Historia de la Educación es, por la naturaleza de los métodos que utiliza en su trabajo científico, una disciplina histórica especializada en un sector de la realidad, a saber, el hecho educativo. La educación, en su dimensión de pasado, es un hecho particular que forma parte de los sistemas sociales en los que se genera y de los que funcionalmente depende, por lo que su investigación histórica debe ser contextualizada en el marco de una historia total y efectuada con las mismas herramientas historiográficas, de lo que se sigue que la investigación histórica de la educación ha de responder a las características de la historiografía general, en cuyo ámbito se han operado en los últimos decenios cambios importantes. En este sentido, la mayor influencia ha sido ejercida por los movimientos historiográficos franceses del primer tercio del siglo, en particular el iniciado por H. Berr y el grupo de la *Revue de Synthèse Historique* que introdujo el análisis comparativo y una decidida preocupación por los temas sociales frente a la perspectiva exclusivamente idiográfica del historicismo. Ese grupo fue el preludeo de la aparición de la escuela de los *Annales*, escuela que aún hoy continúa informando los modos de hacer historia de un buen número de investigadores. Así pues, la investigación histórica-educativa aparece condicionada en sus aspectos metodológicos por los supuestos conceptuales que se acaban de mencionar. La inclusión de la Historia de la Educación en el ámbito de la ciencia histórica, como disciplina sectorial, lleva a la aceptación de que su método ha de ser el método histórico, que se objetiva en las fases conocidas convencionalmente como Heurística, Crítica, Hermeneútica y Exposición.

La investigación sobre la historia de la educación matemática iniciada en Alemania en el último cuarto del siglo XIX, fue impulsada por el prestigioso matemático Felix Klein en el seno de la CIEM, aunque a partir de 1920 se produce la decadencia de estos estudios históricos. Después del periodo antihistoricista de las reformas de la enseñanza de

las Matemáticas en las décadas de los cincuenta y sesenta, ha aumentado notablemente el interés por la Historia de la Educación Matemática, suscitado, en parte, por las actividades llevadas a cabo con la intención de cambiar el currículo de Matemáticas y el fracaso que ha seguido a los proyectos de reforma curricular.

e) Investigación-acción

Otra idea generalizada (y tal vez justificada) acerca de la investigación experimental es que se ocupa de problemas que se encuentran muy alejados de los llamados “problemas reales”, y que sus aplicaciones prácticas y su potencial para generar tecnología son muy escasos. Se tiene el sentimiento de que las cuestiones abordadas con la metodología experimental son demasiado “teóricas”, identificando, no se sabe bien por qué, teoría a inutilidad. Ese sentimiento de inutilidad práctica ha llevado a “reclamar investigación que pueda guiar e informar a la práctica” (Kilpatrick, 1988), y de ese reclamo han surgido un conjunto de técnicas (predominantemente cualitativas) que constituyen la corriente metodológica denominada de investigación-acción. La investigación-acción en educación pretende resolver problemas reales y concretos, sin ánimo de realizar ninguna generalización con pretensiones teóricas. Su objetivo consiste en mejorar la práctica educativa real en una situación (espacial y temporal) determinada.

En el momento actual encontramos en Educación Matemática investigaciones realizadas con mezcla de tipos de investigación experimental, interpretativa e histórica lo que da una gran riqueza a la investigación en nuestro campo tanto en metodología como en resultados.

4. Investigación cuantitativa versus investigación cualitativa

En el pensamiento epistemológico actual ha surgido una polémica sobre los métodos y técnicas de investigación, planteada en términos dicotómicos y auto-excluyentes. La polémica se centra entre los partidarios de la investigación experimental y los de la investigación cualitativa. A esta polémica no es ajena la investigación en Educación Matemática.

Por su interés histórico, nos ha parecido conveniente hacer referencia al trabajo de Cook y Reichardt (1986), esclarecedor en un momento de gran tensión entre los partidarios e ambos tipos de investigación. Gracias

a este trabajo y a otros similares hoy en día se admiten en Investigación en Educación matemática tanto los métodos experimentales como los interpretativos. En su trabajo Cook y Reichardt (1986) aseguraban que debate establecido no debía interpretarse como una simple cuestión de procedimientos, sino que muchos participantes lo plantean como un choque entre dos paradigmas metodológicos:

“Según esta concepción, cada tipo de método se halla ligado a una perspectiva paradigmática distinta y única y son estas dos perspectivas las que se encuentran en conflicto” (p. 27).

Cook y Reichardt (1986) consideraron que en los planteamientos de esta polémica subyacían dos cuestiones:

- el nexos entre paradigma y método,
- la elección forzada entre paradigma cualitativo y cuantitativo.

En un agudo análisis exponían la falacia de ambas suposiciones, redefinían las cuestiones suscitadas acerca de los tipos de métodos y resaltaban algunos de los beneficios potenciales del empleo conjunto de métodos cualitativos y cuantitativos. En particular, concluían que los atributos de los paradigmas no están inherentemente ligados a métodos cualitativos o cuantitativos y, recíprocamente, ambos tipos de procedimientos son consistentes tanto con los atributos del paradigma cuantitativo como cualitativo. En cuanto a la elección entre paradigmas, ponían de manifiesto que, puesto que todos los atributos que constituyen un paradigma son lógicamente independiente (según su argumentación), no existe ninguna razón que impida al investigador mezclar y acomodar los atributos de los dos paradigmas para lograr la combinación que resulte más adecuada al problema de investigación. Hay que redefinir el debate, de modo que, en vez de ser rivales incompatibles, los métodos puedan emplearse conjuntamente según lo exija la investigación.

Desde un cierto punto de vista, la combinación y aplicación conjunta de métodos y paradigmas, no es trivial. Quizá una de las posturas más claras a favor de la conciliación de ambos métodos en la investigación sobre educación matemática, es la de Kilpatrick (1981), que sensatamente y para finalizar, escribía

“Sería desafortunado que una fuerte reacción contra los métodos tradicionales llevara consigo tirar al niño (cuantitativo) con el agua de la bañera (pruebas estadísticas). Mejor que abandonar los métodos cuantitativos en fa-

vor de los cualitativos, deberíamos dirigir nuestros esfuerzos a enriquecer ambos. En particular, los investigadores en educación matemática deberían estudiar nuevas técnicas de análisis exploratorio de datos y presentación, y deberían también considerar el uso de técnicas para el re-análisis de datos y el meta-análisis de investigaciones" (p. 374).

5. Difusión de la investigación

Como parte de la contribución de los investigadores al desarrollo de la educación matemática, es necesaria la difusión de los resultados de sus investigaciones y la conexión con las necesidades de la práctica escolar y la formación del profesorado.

La difusión se lleva a cabo principalmente a través de libros especializados, artículos en revistas y ponencias o comunicaciones a encuentros, congresos y jornadas de educación matemática. En Rico, Sierra y Castro (2000) puede verse un listado completo. Aquí nos limitaremos a presentar algunas líneas importantes de difusión.

Entre los numerosos libros que se publican sobre educación matemática, hay que destacar las colecciones de Editorial Síntesis *Matemáticas: cultura y aprendizaje* y *Educación Matemática en Secundaria*, que ponen a disposición de los educadores matemáticos el conocimiento fundado disponible sobre un tópico específico, o la colección *Mathema* de Editorial Comares, en la que se recogen trabajos de investigación en Educación Matemática.

A partir de 1983 comenzaron a publicarse en España revistas específicas de educación matemática, donde los especialistas del campo publican regularmente artículos: *Enseñanza de las Ciencias* (Universidades Autónoma de Barcelona y Valencia), *SUMA* (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas), *Epsilon* (Sociedad Andaluza "Thales" de Educación Matemática), *Números* (Sociedad Canaria de Profesores de matemáticas "Isaac Newton") y *Uno. Revista de Didáctica de la Matemática* (Editorial Graó, Barcelona). También aparecen artículos de investigación en Didáctica de la Matemática en las revistas de Psicología o Pedagogía que se editan en España.

Actualmente son cuatro revistas especializadas en la investigación en Educación Matemática las que están incluidas en el índice internacional más influyente, el *ISI Web of Knowledge (ISI WoK): Journal for Research*

in Mathematics Education (JRME), publicada por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM); *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, que edita el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), y más recientemente el *Boletim de Educação Matemática (Bolema)* y *Enseñanza de las Ciencias*. Las tres primeras están hechas en el continente americano: la primera en Estados Unidos, la segunda en México y la tercera en Brasil. La cuarta es la única europea y está publicada en España.

En los encuentros, congresos y jornadas que habitualmente se celebran en nuestro país se difunde la investigación de nuestro campo de conocimiento, en particular, en las Jornadas nacionales y regionales de las Sociedades de Profesores de Matemáticas.

En el campo de la aplicación, libros de texto y materiales didácticos incorporan resultados de la investigación en Educación Matemática. La proliferación de editoriales y la producción masiva de libros de texto hace imposible un control de ellos, pero se puede asegurar que hay una tendencia general a incorporar información procedente de resultados de investigación, aunque, como es bien conocido, siempre existirá un desfase entre investigación y aplicación.

6. Presentación de una investigación

Parece conveniente presentar un ejemplo de Investigación en Educación matemática. El que se presenta forma parte de una línea de investigación sobre análisis de manuales escolares llevada a cabo en el Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de Universidad de Salamanca.

Título: Evolución histórica del concepto de límite funcional y continuidad en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995.

INTRODUCCIÓN

Nuestro interés por el análisis de los libros de texto (manuales escolares) parte de la hipótesis de que la práctica de la enseñanza no está tan determinada por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de texto utilizados en el aula. La producción abundante de manuales, la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia en el aula de este

material, su función como transmisor de contenidos socialmente aceptados, hace que resulte interesante estudiar la contribución que han tenido en la historia de la educación matemática.

El análisis de libros de texto se ha llevado a cabo en diferentes ámbitos de investigación. Si bien los historiadores de la educación han realizado aportaciones como tesis doctorales, exposiciones, coloquios, etc. relacionados con los manuales escolares, son escasos los trabajos referidos a las matemáticas. Esto se detecta, en el caso de Francia, en el trabajo de Choppin (1993) en el que hace un balance bibliométrico de la investigación francesa sobre la historia de los manuales escolares. Las razones de dicha escasez se pueden deber, a juicio de Choppin, tanto a la falta de formación matemática de los historiadores como al escaso interés de los matemáticos por este tema. Centrándonos en el campo de la educación matemática, Howson (1995) distingue entre investigaciones realizadas sobre textos "a posteriori", es decir, la forma en que se ha usado un libro de texto, cómo ha contribuido al proceso de aprendizaje y qué obstáculos se han presentado, que son escasas y las realizadas "a priori", que son más numerosas. Entre estas últimas hemos encontrado diversos trabajos con diferentes enfoques. También se han llevado a cabo algunos estudios comparativos como el que aparece publicado en un monográfico de TIMSS (Third International Mathematic and Science Study) realizado por Howson (1995) sobre libros de texto para niños de 13 años de ocho países diferentes.

Por último, resulta imprescindible destacar el trabajo de Schubring (1987) sobre metodología de análisis histórico de libros de texto, en el que se considera necesaria una aproximación global que analice en primer lugar los cambios en las sucesivas ediciones de un libro de texto, para pasar luego a buscar los cambios en otros libros de texto, y por último, relacionar estos cambios con los que se han producido en el contexto, es decir, cambios en los programas, en los decretos ministeriales, en los debates didácticos, en la evolución de las matemáticas, en la epistemología, etc.

En España, algunos investigadores han tratado temas diversos en la línea de investigación basada en el análisis histórico de manuales: los libros de aritmética y geometría (Sierra, Rico y Gómez, 1997); los trabajos de Gómez (1995a, 1995b, 1996) sobre métodos de cálculo en los libros de Aritmética a lo largo de la historia; la evolución de los conceptos de límite funcional y continuidad en los libros de texto de secundaria

(Sierra, González y López, 1999, 2003); la tesis doctoral de Maz (2005) y publicaciones posteriores, en las que incide en la forma de presentar los números negativos en los textos de Matemáticas en los siglos XVIII y XIX; el trabajo colectivo de Maz, Torralbo y Rico (eds.) (2006) sobre José Mariano Vallejo y las tesis de Carrillo (2005) sobre la metodología de la Aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales y López (2011) sobre la formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto en el periodo 1839-1971.

Descripción de la investigación

Hemos realizado un estudio sobre la evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y C.O.U. en el periodo comprendido entre 1940 y 1997.

La producción de libros de texto se lleva a cabo dentro de un contexto determinado y responde a las corrientes epistemológicas y didácticas al uso, además existiendo en el caso español disposiciones oficiales sobre el currículo, los libros de texto tienden a adaptarse a ellas. Por esta razón, hemos agrupado los libros en periodos que, en líneas generales corresponden a los sucesivos planes de estudio (Rico y Sierra, 1994):

- Periodo comprendido entre 1940 y 1967. Este periodo abarca desde el final de la Guerra Civil hasta 1967 en que se publican los textos piloto para la introducción de la matemática moderna en el Bachillerato. Tiene un punto de inflexión en 1953, año en el que se publica un nuevo plan de estudios (modificado parcialmente en 1957). Se han analizado cinco libros de este periodo.
- Periodo comprendido entre 1967 y 1975. Este periodo abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) en 1975, derivado de la Ley General de Educación de 1970. Se han analizado nueve libros de diversos autores y editoriales, entre ellos los textos piloto publicados por la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos de Enseñanza Media.
- Periodo comprendido entre 1975 y 1995. Este periodo comprende desde la implantación del BUP hasta el inicio de los nuevos Bachilleratos derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990. Se han analizado cinco libros.
- Periodo comprendido entre 1995 y 1997. Comprende los dos pri-

meros años de la implantación de los nuevos Bachilleratos derivados de la LOGSE; las ideas constructivistas sobre el aprendizaje y la enseñanza comprensiva en el marco de un currículo abierto, son ejes fundamentales en esta nueva Ley. Se han analizado cinco libros de los Bachilleratos de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología.

Dentro de cada periodo hemos realizado un análisis de los libros de texto en tres dimensiones:

- Análisis conceptual, que se refiere a cómo se define y organiza el concepto a lo largo del texto, representaciones gráficas y simbólicas utilizadas, problemas y ejercicios resueltos o propuestos, así como ciertos aspectos materiales del libro de texto que determinan la presentación del concepto.
- Análisis didáctico-cognitivo, que se refiere tanto a la explicitación de los objetivos que los autores pretenden conseguir, como al modo en el que se intenta que el alumno desarrolle ciertas capacidades cognitivas (Duval, 1995).
- Análisis fenomenológico, que se caracteriza por los fenómenos que se toman en consideración con respecto a los conceptos en cuestión, en nuestro caso el de límite funcional y la continuidad. Aquí se considera el análisis fenomenológico didáctico, en el que intervienen los fenómenos que se proponen en las secuencias de enseñanza que aparecen en los libros analizados (Puig, 1997).

El siguiente cuadro resume lo dicho anteriormente:

Análisis conceptual	Análisis didáctico-cognitivo	Análisis fenomenológico
Secuenciación de contenidos. Definiciones: tipo y papel que juegan en el texto. Ejemplos y ejercicios. Representaciones gráficas y simbólicas. Aspectos materiales.	Objetivos e intenciones del autor (expresadas habitualmente en el prólogo). Teorías de enseñanza-aprendizaje subyacentes. Capacidades que se quieren desarrollar.	En torno a las propias matemáticas. En torno a otras ciencias. Fenómenos de la vida diaria.

Resultados

Los resultados obtenidos han sido muy amplios por lo que aquí se presenta una breve síntesis de los mismos:

Se han establecido las características del currículo de Matemáticas en cada uno de los periodos considerados; en particular, se ha determinado la orientación que los currículos oficiales querían dar a los conceptos de límite y continuidad, presentando, cuando existen, los objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación.

Se han detectado las corrientes internacionales que han influido en el currículo español y en los manuales escolares.

En cuanto a los libros de texto, en cada uno de los periodos se ha establecido una clasificación de los mismos por bloques: libros que se mantienen anclados en el periodo anterior, los que siguen las orientaciones ministeriales de dicho periodo y libros que anticipan las características del periodo siguiente.

De acuerdo con la metodología establecida se ha llevado a cabo el análisis conceptual, cognitivo y fenomenológico de los libros escogidos:

En lo que se refiere al análisis conceptual para cada uno de los manuales seleccionados se han realizado tablas de secuenciación de los conceptos de límite funcional y continuidad; se han establecido los tipos de definiciones de límite funcional predominantes en cada periodo: por sucesiones, métrica o topológica; se ha determinado si la definición de continuidad es de tipo intuitivo o formal; se han clasificado los ejemplos y ejercicios; se ha establecido el tipo de representaciones gráficas así como la simbolización introducida en los libros.

En cuanto al análisis didáctico-cognitivo se ha establecido para cada uno de los libros (o bloques de libros) las teorías de enseñanza o aprendizaje subyacentes así como la epistemología de las matemáticas dominante, lo que ha llevado a determinar las capacidades que se pretenden desarrollar en los alumnos.

En el análisis fenomenológico se han descrito, de modo pormenorizado, las situaciones en las que se presentan ambos conceptos, determinado si son de la propia matemática, de otras disciplinas o de la vida "cotidiana".

Conclusiones

En general, y hasta la última reforma derivada de la LOGSE, el currículo oficial se caracteriza por ser cerrado, con indicaciones precisas acerca del contenido, dispersas sobre la metodología y prácticamente nulas sobre la evaluación. Además, han existido periodos caracterizados por el carácter experimental de los programas oficiales, como ha sido el caso de la matemática moderna o de las ideas constructivistas preconizadas en la última reforma. Se puede afirmar que hay como “puntos de transición” en el cambio de estos programas oficiales. Sin embargo, a pesar del carácter cerrado de los programas, se observa que el currículo no ha sido uniforme en cada una de las épocas; al analizar los libros de texto, hemos demostrado las diferencias notables existentes entre ellos, a pesar de que en cada época deberían ajustarse a las disposiciones oficiales.

También se observa, tanto en los programas oficiales como en los libros de texto, la influencia de las corrientes internacionales.

En los puntos de transición a los que hemos hecho referencia anteriormente, aparecen libros de texto que marcan diferencias con el periodo anterior, en particular, nos referimos a los textos piloto elaborados por la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media y los libros del Grupo Cero de Valencia. También se constata el paso progresivo de los “libros de autor”, a los “libros de editoriales”, como Magisterio Español, SM, Anaya y Santillana, por citar las cuatro más importantes del mercado español, durante los últimos veinticinco años.

- Particularizando al límite y la continuidad, tanto en los programas oficiales como en los libros de texto, se observa una evolución desde la consideración de ambos conceptos ligados al de función, pasando por un largo periodo en el que tienen entidad propia, hasta las últimas reformas en las que se enfatiza el carácter instrumental de los mismos.

- En cuanto al límite, hay un periodo inicial (hasta los años 50) en el que se dan definiciones “oscuras” mezclándose el concepto de variable y el concepto de continuidad seguido de un periodo en el que aunque se clarifica el concepto de límite, este concepto se define mediante sucesiones. En el periodo de la matemática moderna se pone el énfasis en la presentación topológica del concepto, aunque hay una traducción inmediata a la definición métrica; sin embargo, esta tendencia no es general a todos los autores. Con la implantación del Bachillerato Unificado

y Polivalente (BUP), en 1975, derivado de la Ley General de Educación (LGE), se consolida la tendencia de la matemática moderna, considerando el concepto de límite en sí mismo, definiéndose límites laterales, y presentando todos los casos finitos e infinitos del límite y de la variable. Los últimos libros, antes de la implantación de los nuevos Bachilleratos, en 1995, derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), tienen una tendencia a presentar el concepto de límite en el marco de fenómenos de la naturaleza o situaciones de la vida diaria.

El concepto de continuidad, hasta la ordenación del BUP en 1975, se define en general a partir del límite, aunque casi todos los autores presentan previamente una idea intuitiva de este concepto. En el periodo 1975-1990 se rompe la tendencia anterior, algunos autores comienzan con la continuidad y siguen con el límite, y otros mezclan ambos conceptos. La mayoría de los autores utilizan el concepto de continuidad por la derecha y por la izquierda ligado a límites laterales. En los años inmediatamente posteriores a la promulgación de la LOGSE, aunque se mantienen los programas de 1975, hay una tendencia a presentar el concepto de continuidad de modo más intuitivo, relacionándolo igual que el límite, con situaciones de la vida diaria y fenómenos naturales.

Finalmente, en el último periodo, debido quizás a la reducción del Bachillerato a dos años, se observa una cierta “condensación” de los contenidos de ambos conceptos, con una tendencia por parte de la mayoría de los autores a dar mucha información en poco espacio.

[Una versión completa de esta investigación puede verse en Sierra, González y López, 1999 y 2003]

Conclusión

En este trabajo se ha argumentado que la investigación en Educación Matemática debe tener como objetivo prioritario la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, lo que ha llevado a extender dicha investigación a ámbitos (por ejemplo el de la afectividad) hasta hace poco ignorados. Asimismo y de acuerdo con el objeto de estudio los investigadores utilizan distintos tipos de metodologías para acrecentar de modo progresivo y acumulativo los conocimientos acerca de los métodos de enseñanza y de los problemas del aprendizaje de las Matemática. En los últimos años, la vieja polémica investigación experi-

mental contra investigación cualitativa-interpretativa ha sido superada y actualmente hay trabajos relevantes que mezclan ambos tipos; un recorrido por las revistas especializadas así lo pone de manifiesto.

Hay cada vez mayor nivel de exigencia en el proceso de difusión de la investigación; en estos momentos la publicación de artículos en Educación Matemática en las revistas especializadas del campo cumple las mismas condiciones que los de sus homólogos en otras ramas de las matemáticas; en definitiva se ha producido un proceso de “normalización” en dicha investigación.

La demanda social de unas matemáticas más funcionales, evaluaciones internacionales como las de Proyecto PISA, la necesidad de que los ciudadanos comprendan la complejidad del mundo que les rodea, entre otros factores, es lo que ha hecho, a nuestro juicio, que aumente la presión para que nuestra disciplina desarrolle una investigación cualificada.

Referencias bibliográficas

- Begle, E. y Glenadine, E. (1980). Why do Research?. En: R. J. Shumway (ed), *Research in Mathematics Education* (pp. 3-19). Reston: N.C.T.M.
- Blanco, L. (2011). La investigación en Educación Matemática. *Educatio Siglo XXI*, 29 (1), 109-128.
- Bunge, M. (1969). *La investigación científica. Su estrategia y su filosofía*. Barcelona: Ariel.
- Carrillo, D. (2005). *La Metodología de la Aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes*. Murcia: Departamento de Didáctica de las Ciencias Matemáticas y Sociales.
- Choppin, A. (1980). L'histoire des manuels scolaires. Un bilan bibliométrique de la recherche française. *Histoire de l'Éducation*, 58, pp. 165-185.
- Cook, T. D. y Reichardt, Ch. S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Madrid: Morata.
- Eisenhart, M. A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (2), 99-114.
- Fox, D. (1981). *El proceso de investigación en educación*. Navarra: EUNSA.
- Freudenthal, H. (1982). Fiabilité, validité et pertinence—critères de la recherche sur l'enseignement de la mathématique. *Educational Studies in Mathematics*, 13 (4), 395-408.
- Gómez, B. (1995a). Los métodos de cálculo mental vertidos por la tradición reflejada en los libros de aritmética. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5, 91-101.
- Gómez, B. (1995b). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra. *Suma*, 20, 61-68.
- Gómez, B. (1996). Desarrollo histórico de la enseñanza de la aritmética. El caso de los algoritmos de cálculo. *Aula*, 50, 11-16.

- Gutiérrez, A. (1991). La investigación en Didáctica de las Matemáticas. En A. Gutiérrez (ed.), *Area de conocimiento Didáctica de la Matemática* (pp. 149-194). Madrid: Síntesis.
- Howson, G. (1995). *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 texts*. Vancouver: Pacific Educational Press.
- Johnson, D. C. (1980). The research process. En R. J. Shumway (ed), *Research in mathematics education*. Reston: N.C.T.M., pp 29-46.
- Kilpatrick, J. (1981). Research on mathematical learning and thinking in the United States. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 2 (3), 363-379.
- Kilpatrick, J. (1988). Change and stability in research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, 202-204.
- Kilpatrick, J. (2007) . *Criteria for Quality in Mathematics Education Research*. Conferencia plenaria a i-math. Consolider Ingenio 2010. Universidad de Valencia.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 25-53). Badajoz: SEIEM. Ediciones Universidad de Extremadura.
- López, C. (2011). *La formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto*. Salamanca: Dpto. de Teoría e Historia de la Educación (Tesis doctoral inédita).
- Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Granada: Editorial de la Universidad de Granada.
- Maz, A., Torralbo, M. y Rico, L. (eds.) (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*. Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Rico, L. (1999). Educación matemática, investigación y calidad. En J. P da Ponte y L. Serrazina (eds.) *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália* (pp. 303-312). Santarem: Secção de Educação Matemática de SPCE.
- Rico, L. y Sierra, M. (1994). Educación Matemática en la España del siglo XX. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra *Educación Matemática e Investigación* (pp.99-207). Madrid: Síntesis
- Rico, L. y Sierra, M. (2000). Didáctica de la Matemática e Investigación. En, J. Carrillo y L.C. Contreras (eds.), *Matemática española en los albores del siglo XXI* (pp. 77-132). Huelva: Hergué Editorial,
- Rico, Sierra y Castro (2000). Didáctica de la Matemática. En L. Rico y D. Madrid (eds.), *Fundamentos didácticos de las áreas curriculares* (pp. 351-406). Madrid: Síntesis.
- Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the learning of mathematics*, 7(3), 41-51.
- Sierra, M, Rico, L. y Gómez, B. (1997). El número y la forma: libros e impresos para la enseñanza de la Aritmética y la Geometría. En: A. ESCOLANO (ed.), *Historia Ilustrada del Libro escolar en España. Del Antiguo Régimen a la Segunda República* (pp. 373-398). Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.
- Sierra, M., González, M^a T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463-476.

- Sierra, M., González, M^a T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles del siglo XX. *Educación Matemática*, 15 (1), 21-51.
- Torralbo, M., Fernández Cano, A., Rico, L, Maz, A. y Gutiérrez, M.P. (2003). Tesis doctorales españolas en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(2), 295-305.
- Vallejo, M., Fernández Cano, A., Torralbo, M. y Maz, A. (2007). La investigación española en educación matemática desde el enfoque conceptual inserto en sus tesis doctorales. *Enseñanza de las Ciencias*, 25 (2), 259-266.

