Los libros de texto y la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

ANDRÉS NORTES CHECA
ROSA NORTES MARTÍNEZ-ARTERO
Universidad de Murcia

Resumen:
Se hace unan breve revisión del tratamiento de problemas en algunos libros de texto desde 1955 hasta la actualidad y en especial del tercer ciclo de Primaria, porque los alumnos de 11/12 años se encuentran en el paso de las operaciones concretas a las formales, analizando estrategias de resolución de problemas. Aplicamos, posteriormente, cuatro de estos problemas a futuros maestros y obtenemos algunas de las estrategias utilizadas por los estudiantes para su resolución. Por último, establecemos una propuesta para la mejora de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en los libros de texto.

Palabras clave:
Libros de texto, Resolución de problemas, enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Abstract:
A brief review is presented on how maths problems have been dealt with in a number of textbooks from 1955 up to the present. Special attention is paid to the analysis of the problem-solving strategies used by 11 and 12 year olds in the third cycle of primary education since these children are supposed to be moving from concrete to formal operations. In addition, four of the problem types identified were given to future primary school teachers so as to elicit their most common problem-solving strategies. Finally, a number of suggestions are made to improve the teaching and learning of maths in textbooks.

Key words:
Textbooks, problem-solving, teaching and learning of maths.

Résumé:
Nous faisons une rapide révision du traitement des problèmes de certains manuels scolaires de 1955 à nos jours, et spécialement ceux du troisième cycle de l'école primaire, parce que les élèves de 11/12 ans se trouvent justement entre l'étape des opérations concrètes et celle des formelles, par l'analyse des stratégies de résolution de problèmes. Nous appliquons, par la suite, quatre de ces problèmes aux futurs maîtres et nous arrivons à obtenir certaines des stratégies utilisées par les étudiants pour la résolution de problèmes. Finalement, nous établissons une proposition pour l'amélioration de l'enseignement/apprentissage des mathématiques dans les manuels scolaires.

Mots clés:
Manuel scolaires, Résolution de problèmes, Enseignement/apprentissage des mathématiques.

Fecha de recepción: 17-01-2011
Fecha de aceptación: 24-02-2011

Introducción

Los libros de texto han desempeñado un papel preponderante en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a lo largo de los años. Su utilización ha sido decisiva para lograr en los alumnos una serie de conocimientos matemáticos y también, por qué no, para lo contrario, para crear una animadversión a las matemáticas, debido a la incapacidad, dificultad, etc., para presentar sus contenidos de forma clara, amena y rigurosa.

¿Qué se entiende como libro de texto? Gómez (2000, p. 77) define el libro de texto como "una publicación especializada, con identidad propia, que nace en respuesta a las necesidades del sistema general y público de enseñanza y del modelo de enseñanza simultánea. Es un libro fácilmente reconocible por su estructura y porque está rotulado claramente indicando la materia que trata y a quién va dirigido" y González y Sierra (2004) utilizan el término libro de texto para "designar aquellos libros que utilizan habitualmente profesores y alumnos a lo largo del curso escolar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un área de conocimiento" (p. 391).

El libro de texto, incluidos los manuales, es un material existente en nuestro sistema educativo actual y su uso es de "obligado cumplimiento" por la mayoría de los profesionales de la enseñanza. Baste el dato que nos aporta la Asociación Nacional Española de Editores de Libros y Material de Enseñanza (ANELE) y recogido por Bayona (2009, p. 25): "El libro de texto es la principal herramienta de los docentes y el 81,3% de ellos reconoce emplearlo bastante o mucho en la labor diaria. Es el recurso didáctico que utilizan más (4,2 en una escala de 1 a 5), superando a los materiales propios (3,9) y guías didácticas (3,6) que son los siguientes recursos por el grado de utilización".

Los libros de texto se han utilizado en la enseñanza en todos los tiempos. Antiguamente a los 10 años había un examen de Ingreso, se continuaba con un bachillerato de siete años y se terminaba con un examen de Estado en la Universidad. Después, con el plan de estudios de 1953 (Ley de 26 de febrero de 1953) y el plan de bachillerato de 1957 (Decreto de 31 de mayo de 1957), el bachillerato se dividía en dos tramos, bachiller elemental (10 a 14 años) y bachiller superior (15 y 16 años), terminando con el curso Preuniversitario. Más adelante la Ley de 1970 (Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa de 4 de agosto de 1970), el periodo educativo entre los 6 y los 18 años lo dividía en la EGB (8 cursos), el Bachiller (3 cursos) y el COU. Posteriormente en 1990 la LOGSE (Ley Orgánica General del Sistema Educativo) y actualmente la Ley Orgánica 2/2006 de 3 de mayo, de Educación en donde la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato constituyen el bloque de los estudios no universitarios. En todo este periodo se han estado utilizando libros de texto, en algunos casos llamados manuales de la asignatura. Gómez (2009) establece una diferenciación entre libros de texto y manuales. Matiza que a partir de la implantación del sistema público de enseñanza nace el Manual. "Un manual es un libro de texto que es utilizado en la Escuela, que es recomendado por los profesores y que nace en respuesta a las necesidades del sistema de enseñanza. Además es un libro de texto que tiene una estructura, un diseño editorial y un sistema de comercialización específico" (p. 23).

Si nos atenemos a lo expuesto anteriormente los libros de texto están encaminados a desarrollar los contenidos establecidos por los decretos educativos correspondientes a los distintos niveles de la enseñanza obligatoria. Y uno de esos contenidos actuales es la resolución de problemas. En el Decreto de currículo de la Región de Murcia (CARM, 2007), en la introducción del área de Matemáticas se menciona: "La resolución de problemas actúa como eje vertebrador que recorre transversalmente todos los bloques y por ello se incluye con especial relevancia en cada uno de ellos" (p. 26440).

Antecedentes de problemas en los libros de texto

Para ver cómo eran tratados en este periodo los problemas, hemos revisado los libros de texto Edelvives (1955, 1957) y SM (1973, 1984, 1985), correspondientes a los periodos antes mencionados. Estos libros están redactados para alumnos de 11-12 años, los dos primeros para Primer Curso de Bachillerato y los tres últimos para 6.º EGB.

1. Plan 53. En Edelvives (1955) cuyo contenido se ajusta al Plan 1953 en su pág. 5 viene: "ADVERTENCIA. El carácter más bien práctico que debe darse a esta asignatura en el Primer Curso nos ha inducido a poner abundantes ejercicios en Aritmética y figuras en Geometría, lo que explica la apariencia de voluminosidad que tiene el libro", lo que nos pone alerta ante lo que nos viene. El libro está desarrollado a lo largo de 239 páginas, distribuidas en 37 lecciones, agrupadas en dos bloques, el primero de Aritmética con 236 preguntas y 952 ejercicios, y el segundo de Geometría con 191 preguntas y 131 ejercicios, y seguidos de un apartado denominado "Problemas de repaso", con 539 enunciados. Estos problemas de repaso van divididos en varios apartados con los siguientes títulos: El primero sin título (problemas numéricos), el segundo Problemas sobre fracciones, el tercero Medidas de longitud, al que siguen, Medidas de superficie, Medidas de volumen, Medidas de capacidad y Medidas de peso. Hay otra sección titulada Ejercicios de Geometría.

El contenido del libro está desarrollado en preguntas numeradas, muchas de ellas son simplemente una definición o una receta, distribuidas en 37 lecciones que terminan con una sección titulada "Ejercicios". A título indicativo en Medidas de Peso, el último ejercicio de la lección 19 dice: "*858.Un vendedor compró cierto artículo a 2,50 pts el kilogramo y lo vendió a 2,90 pts. ¿Cuántos kilos vendió, sabiendo que ganó 50 pts?"* (p. 108). Y en Medidas de peso, el último "problema de repaso" dice: *"376.Un tendero de comestibles compró 340 kg de azúcar, que vendió al por menor a 1,20 pts hectogramo. ¿A cuánto había pagado los 100 kg si ganó 1020 pts?"* (p. 219).

2. Plan 57. En Edelvives (1957), ajustado al plan 1957, correspondiente también a Primer Curso de Bachillerato, no especifica una parte de Aritmética y otra separada de Geometría, sino que en las lecciones se van intercalando ambos contenidos, así la Lección 7.ª es *La división* y la Lección 8.ª es *La recta, el plano y el segmento*. Comparado con Edelvives (1955) no es en este caso un recetario de contenidos como ocurría en el caso anterior, ya que la mayoría de las preguntas va acompañada de un desarrollo y de un ejemplo aclaratorio, conteniendo en total 255 preguntas y 738 ejercicios en las 208 páginas de que consta. Este libro

tiene una estructura más didáctica que el anterior para poder entender el contenido que presenta, si bien los dibujos y gráficos que lo acompañan son en su mayoría tomados del anterior.

En este libro tan solo aparece el término "problema" una vez y es en la Lección 14 "La regla de tres simple" y en la pregunta 108, titulada "*Problemas sobre cambio de unidad*" que contiene resueltos:

- Problema 1: *"Una pulgada inglesa mide 2,4 cm. ¿Cuántas pulgadas inglesas medirá un segmento de 40 cm?"* (p. 89).
- Problema 2: *"¿Cuántos hm mide una carretera de 24,854 km?"* (p. 90).

3. Ley del 70. En SM (1973), a diferencia de los libros anteriores aparece escrito por un equipo de autores, encabezados por Jacinto Martínez, que estaría durante muchos años como autor en esta editorial. Como es sabido en el prólogo los autores tratan de presentar aquellos aspectos más relevantes del contenido del libro y en él se especifica: "En la Enseñanza de las Matemáticas se ha venido cometiendo el error de medir las magnitudes antes de conocerlas, con lo que se llegaba a una petición de principio en virtud de la cual se producía una desorientación mayúscula en la mente de los pequeños escolares, que por milagro, y siempre a trompicones, podían entender lo que les explicábamos. Hay que establecer, pues, mentalmente la distinción entre magnitud y su medida, tal como se hace en este libro" (p. 7).

El libro consta de 247 páginas repartidas en 32 lecciones o capítulos que contienen 203 preguntas (párrafos según los autores) enumeradas correlativamente, terminando cada capítulo con una sección de Ejercicios.

Aquí hemos encontrado la palabra "problemas" en tres preguntas, la 81, 90 y 91; la primera en la lección 13 "Multiplicación de los números racionales positivos", así:

- *1.A Luis le regalaron los 2/3 de los 3/4 de un pastel, y a su hermano el resto. ¿Qué partes de pastel recibió cada uno?* (p. 112).
- *2.Un comerciante vende 2/5 de tonelada de carbón a 3/7 de pesetas el kilogramo. ¿Cuánto cobrará?* (p. 112).

Y los siguientes en la Lección 15, "División de números racionales positivos", con estos enunciados:

- 90. Problema 1.º. *Un labrador ha dividido su campo en 8 parcelas iguales. ¿Cuántas parcelas contienen los ¾ del campo?* (p. 126).

- 91. Problema 2.º. *¿Cuántas veces cabe 2/9 en 2/3?* Se desarrolla y termina "Para dividir dos fracciones se multiplica la fracción dividendo por la fracción divisor invertida" (p. 127).

Fue a partir de la Ley del 70 cuando las editoriales comenzaron el desarrollo creciente de la edición de libros de texto, cuidando su edición con dibujos y gráficos actualizados, con cuadernos complementarios, libros para el profesor, etc., haciendo grandes tiradas y siendo utilizados masivamente en todo el territorio nacional.

4. Remodelación Ley 70. Fue en 1981 cuando el MEC, con los *"Programas Renovados"*, matizó algunos contenidos de la Ley para que se volviera a la aplicación práctica de contenidos que habían tenido antes, eliminando, en parte, el encorsetamiento que habían hecho las editoriales al utilizar la teoría de conjuntos de una manera formalista en lugar de lo que se pretendía de que solo fuera marco de referencia.

En este contexto muchas editoriales renuevan su material y SM (1984) aprovecha el libro anterior dándole una maquetación distinta, no agrupando su contenido en "párrafos" sino en "preguntas", si bien no lo modifica ni tampoco los ejercicios que lo integran.

En SM (1985), la editorial saca una nueva colección encabezada por Serafín Mansilla, Mari Paz Bujanda y Juan Ayuso, -los dos primeros siguen en la actualidad desarrollando libros para esta editorial-, en donde presentan una nueva forma de tratar los contenidos. Por un lado reducen el número de capítulos, siendo en este caso 24, incluyendo en cada uno de ellos un apartado denominado "Las matemáticas en la vida" y que lo definen los autores en la presentación diciendo: "Para profundizar aún más la vertiente interdisciplinar y práctico-experimental, hemos insertado al final de cada capítulo una sección titulada LAS MATEMÁTICAS EN LA VIDA; en esta sección proponemos cuestiones variadas de matemáticas relacionadas con las áreas de Pretecnología, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, etc., que indudablemente motivarán al alumno y estimularán su ingenio y capacidad creativa" (p. 7).

La maquetación del libro presenta cada pregunta en una página que se completa con una serie de actividades (sin denominar) referidas a dicha pregunta en número variable hasta completar la página.

La palabra "problema" aparece en primer lugar en la pág. 61 y es en la pregunta 6, denominada "Dos problemas prácticos de aplicación del m.c.d. y el m.c.m., enunciados así:

- *Una habitación de 78 dm de largo y 30 dm de ancho se quiere embaldosar con baldosas cuadradas. a) ¿Cuántos metros deberá medir de lado cada baldosa si no se quiere romper ninguna? Y b) ¿Cuánto medirá el lado de la mayor baldosa que se puede emplear?*
- *Tres vapores salen del mismo puerto. El primero sale cada 15 días, el segundo cada 12 días y el tercero cada 25 días. Si hoy salen juntos los tres, ¿cuándo volverán a salir los tres juntos por primera vez?*

En la pág. 247 se incluyen "Dos problemas prácticos resueltos" correspondientes a la longitud de la circunferencia de una moneda de 25 pesetas y la obtención del radio de la Tierra a partir de la definición de metro. Y en la pág. 265 "Dos problemas prácticos", uno titulado *Terreno cultivable para calcular la superficie* y otro, *Piezas de repuesto para calcular las planchas que se necesitan para cumplimentar un pedido*. Ambos vienen desarrollados paso a paso.

En la pág. 77 dentro de LAS MATEMÁTICAS EN LA VIDA viene "El problema del agua y de la leche": "*En un vaso hay 4 cucharadas de leche, y en el otro vaso la misma cantidad de agua. María pasa una cucharada de leche del primer vaso al segundo y agita a éste último para mezclar los dos líquidos. A continuación Fernando pasa una cucharada de la mezcla al primer vaso. María y Fernando se preguntan: ¿Hay más agua en el vaso de la leche que leche en el vaso del agua o al revés?* En esta sección se incluyen una serie de problemas clásicos pero sin la denominación de problema.

De los libros reseñados anteriormente extraemos que el término "problema" no es utilizado de forma clara, ya que en los capítulos aparece una sección de ejercicios, sean de la dificultad que sean y en algunos casos emplea el término problema para presentar a continuación un enunciado que puede ser un simple ejercicio. Además, cuando se presenta al final del libro un bloque de Problemas, vienen a ser del tipo de los ejercicios que aparecen al finalizar cada capítulo y que en esa ocasión se denominaban ejercicios y no problemas. Por tanto, no hay una clara distinción entre lo que se denomina ejercicio y en lo denominado problema, ni tampoco una clara alusión al término utilizado.

La resolución de problemas en los libros de texto actuales

En la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, la resolución de problemas forma un eje vertebrador de todos los contenidos. Si nos atenemos a la Enseñanza Primaria, en el Anexo II del R.D. 1513/2006, correspondiente a Áreas de educación primaria, en la introducción de Matemáticas se manifiesta: "Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje matemático a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática" (MEC 2006, p. 43096).

Y en el R.D. 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas en la Educación primaria, en el *criterio de evaluación* n.º 8 correspondientes al Tercer Ciclo (5.º y 6.º) se menciona como último punto: "En un contexto de resolución de problemas sencillos, anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos para abordar el proceso de resolución" (MEC 2006, p. 43101). Y añade: "Este criterio está dirigido especialmente a comprobar la capacidad en la resolución de problemas, atendiendo al proceso seguido. Se trata de verificar que ante un problema los alumnos y las alumnas tratan de resolverlo de forma lógica y reflexiva y comprobar que comprenden la importancia que el orden y la claridad tienen en la presentación de los datos y en la búsqueda de la solución correcta, para detectar los posibles errores, para explicar el razonamiento seguido y para argumentar sobre la validez de una solución".

Pero si nos adentramos en la *Contribución del área al desarrollo de las competencias básicas* menciona que "los contenidos asociados a la resolución de problemas constituyen la principal aportación que desde el área se puede hacer a la *autonomía e iniciativa personal*. Además las competencias de *aprender a aprender* y *comunicación lingüística* desde el área de Matemáticas se ven impulsadas y la aportación a la *competencia social y ciudadana* "se refiere al trabajo en equipo que en Matemáticas adquiere una dimensión singular si se aprende a aceptar otros puntos de vista distintos al propio, en particular a la hora de utilizar estrategias personales de resolución de problemas" (p. 43096).

No vamos a insistir en la trascendencia que hoy día tiene la resolución de problemas en nuestro ordenamiento educativo, cuya misión principal es enseñar a nuestros alumnos a pensar matemáticamente. Y es por ello que la mayoría de las editoriales de libros de texto han dedicado secciones en sus libros de Primaria para desarrollar distintas estrategias de resolución de problemas y especialmente tras la publicación del Real Decreto 1513/2006.

La resolución de problemas definida como "aquella tarea a la que una persona se enfrenta y necesita/desea encontrar una solución, no poseyendo un procedimiento fácil y accesible y haciendo intentos para encontrarla" (Nortes, 2007) es la que estamos intentando analizar, y no como la aplicación directa de fórmulas, reglas o procedimientos que el profesor ha explicado o que vienen indicados en el libro de texto. Va más allá de la simple aplicación, del aprendizaje por recuerdo y repetición de los problemas tipo.

En Blanco y Blanco (2009) se recogen las propuestas que se plantean con el objetivo de enseñar a resolver problemas (Bransford y Stein, 1997; Guzmán, 1991) señalan que el primer paso para resolver los problemas es: 'analizar/comprender lo que el problema/situación problemática nos plantea'. Esto es, analizar la información desde la perspectiva de las matemáticas, situando la información en un contexto concreto. El segundo es: 'diseñar estrategia/s para alcanzar el objetivo que la tarea nos proponga', para dar respuesta al reto planteado (p. 83).

Pifarré y Sanuy (2001) proponen para mejorar el proceso y las estrategias para resolver problemas matemáticos cuatro elementos: a) Contextualizar los problemas en situaciones cotidianas del entorno del alumno; b) Utilizar métodos de enseñanza que hagan visibles las acciones para resolver un problema; c) Diseñar diferentes tipos de materiales didácticos que guíen los diferentes procedimientos para resolver un problema y d) Crear espacios de discusión y de reflexión como el trabajo en pequeños grupos.

Rico (2006) recoge la formalización de la metodología de resolución de problemas con el proceso de matematización en el marco de PISA y la resume en tres fases: La matematización horizontal con la traducción de los problemas desde el mundo real al matemático, la matematizacion vertical con el planteamiento de cuestiones en las que se utilizan conceptos y destrezas matemáticas, y la tercera con la validación y reflexión del proceso completo de matematización.

¿Y por qué hemos elegido para el análisis y desarrollo de este artículo el tercer ciclo de Primaria? Porque los alumnos de este nivel, entre 11 y 12, años se encuentran en el paso de las operaciones concretas a las formales según la teoría de Piaget. Con este cambio que se produce "el niño pasa de las cosas concretas realizadas con objetos tangibles y manipulables sometidos a experiencias efectivas, a objetos ausentes reemplazados por entes" (Nortes y Serrano 1991, p. 72). En lo referente a la resolución de problemas cuando el adolescente considera un problema trata de prever todas las posibles relaciones que podrían ser válidas respecto de los datos para determinar cuál de las relaciones tiene validez. Según Piaget (1982) lo que caracteriza el estadio de las operaciones formales es la capacidad del adolescente para razonar.

Por todo lo anterior, hemos querido conocer cómo tratan los libros de texto de Primaria la cuestión de Resolución de problemas. Hemos acudido a libros editados después de este R.D. 1513/2006, en concreto en 2009, y hemos tomado una muestra de editoriales extendidas en todo el país con un porcentaje alto de centros que utilizan sus libros, para ver como lo trabajan.

Hemos seleccionado cinco libros del tercer ciclo de Primaria y hemos encontrado en estos libros apartados en cada unidad dedicados a la resolución de problemas, con los siguientes títulos:

	SM 5.º	SM 6.º	ANAYA 5.º	SANTILLANA 6.º	EDELVIVES 5.º
U.1	Redondear para estimar resultados.	Estudiar casos más sencillos.	Sigo unos pasos.	Pasos para resolver un problema.	Obtener los datos de un texto y resolver.
U.2	Responder preguntas intermedias.	Aproximar la solución.	Ordeno el enunciado.	Buscar datos en varios gráficos.	Pasos en la resolución de problemas.
U.3	Elegir los datos y estimar el resultado.	Calcular el valor de la unidad.	Hago un dibujo o un esquema.	Buscar datos en varios textos o gráficos.	Utilizar un esquema o un dibujo para resolver gráficamente un problema.
U.4	Empezar por el final.	Buscar las respuestas posibles.	Selecciono los datos que necesito.	Hacer una tabla.	Obtener los datos de un gráfico para resolver un problema.
U.5	Ayudarse de un dibujo.	Estudiar casos más sencillos.	Tanteo, experimento, pruebo.	Hacer un dibujo.	Inventar un enunciado a partir de una pregunta y su solución.

U.6	Eliminar posibles respuestas.	Utilizar un dibujo.	Hago preguntas intermedias.	Ensayo y error.	Anticipar una solución aproximada al problema y comprobar el resultado.
U.7	Dividir el problema en diferentes etapas	Tantear.	Elijo las operaciones.	Representar la situación.	Operar convirtiendo los datos a la misma clase de unidades.
U.8	Buscar datos en un gráfico.	Utilizar porcentajes para comparar resultados.	Utilizo una buena notación.	Anticipar una solución aproximada.	Operar en forma simple o en forma compleja.
U.9	Utilizar las mismas unidades.	Utilizar las mismas unidades.	Expreso con claridad el proceso.	Representar datos con dibujos.	Interpretar de forma lógica los resultados de un problema.
U.10	Utilizar las mismas unidades.	Representar números enteros en el plano.	Invento nuevos problemas.	Imaginar el problema resuelto.	Inventar dos preguntas para un mismo enunciado y resolverlas.
U.11	Eliminar posibles respuestas.	Estudiar el caso general.	Reviso la resolución.	Resolver un problema empezando por el final.	Calcular el área de figuras compuestas.
U.12	Empezar por casos más sencillos.	Descomponer una figura en polígonos de área conocida.	Busco todos los casos posibles.	Representar gráficamente la situación.	Inventar el enunciado de un problema y resolverlo con la estrategia más apropiada.
U.13	Utilizar la regla y el compás.	Ayudarse de un dibujo.	Busco regularidades.	Reducir el problema a otro problema conocido.	
U.14	Situar puntos en el plano.	Aplicar etapas sucesivas.	Resuelvo problemas en el plano.	Empezar con problemas más sencillos.	
U.15	Escribir el enunciado de un problema.	Escribir el enunciado de un problema.	Utilizo la lógica y el ingenio.	Hacer un diagrama de árbol.	

Estrategias más utilizadas

A la vista de las estrategias mostradas, confeccionamos en cuadros las que más se repiten, cómo la tratan y añadiendo un ejemplo de uno de los libros.

Pasos para resolver un problema

ANAYA 5.º	EDELVIVES 5.º	SANTILLANA 6.º
1. Aclaramos los datos y la pregunta. 2. Hacemos un dibujo o un esquema. 3. Pensamos un plan y hacemos las operaciones. 4. Escribimos la solución y la comprobamos.	1. Leemos el enunciado hasta comprenderlo e identificamos la pregunta. 2. Buscamos los datos necesarios para resolverla. 3. Utilizamos esos datos para operar y obtener la solución. 4. Escribimos la solución del problema.	1. Comprende. 2. Piensa. 3. Calcula. 4. Comprueba. Ejemplo. Pedro compró una lavadora que costaba 579 €. Pagó con dos billetes de 200 € uno de 100 € y cinco billetes de 20€. ¿Cuánto le devolvieron?

Buscar datos en gráficos

SM 5.º	SANTILLANA 6.º
1. Enunciado con gráfico de barras. 2. Comprender el enunciado. 3. Resolver completando una tabla. 4. Comprobar la solución. Ejemplo. Las ventas de teléfonos móviles de una campaña en el primer trimestre de 2008 y 2009 están recogidas en estos gráficos. ¿En qué año hubo mejores resultados? (Dibujos con los datos).	1. Enunciado con gráfico lineal y gráfico de barras. (A continuación preguntas relacionadas con los gráficos aplicando operaciones y cálculos).

Representar

SANTILLANA 6.º	ANAYA 5.º	SM 5.º	EDELVIVES 5.º
1. En algunos problemas, sobre todo geométricos, es útil "hacer un dibujo" que represente el enunciado. Ejemplo. Montse ha dibujado un ángulo de 40º y su ángulo suplementario. Después, ha trazado las bisectrices de los dos ángulos. ¿Qué ángulo forman esas dos bisectrices?	1. Aclaramos los datos y la pregunta con un dibujo o un esquema. 2. Pensamos un plan y hacemos las operaciones. 3. Escribimos la solución y la comprobamos.	El enunciado viene acompañado de un dibujo que aporta un dato. 1. Comprende el enunciado. 2. Resuelve. 3. Comprueba la solución.	En algunos problemas "utilizar un esquema o un dibujo para resolver gráficamente un problema" se traduce en: a) Dibujar los datos. b) Representar las soluciones.

Ayuda

ANAYA 5.º	SM 5.º	SANTILLANA 6.º
-Utilizo una buena notación. -Utilizo la lógica y el ingenio.	-Utilizar la regla y el compás. Ejemplo. Marta quiere dibujar mosaicos. Para uno de ellos necesita construir un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 3,5 cm y 4 cm, respectivamente. ¿Cómo puede construirlo de manera exacta?	-En algunos problemas es útil "hacer una tabla" que recoja los números que cumplen ciertas condiciones. -Los "diagramas de árbol" son útiles para organizarse a la hora de resolver problemas.

Invento

ANAYA 5.º	EDELVIVES 5.º
Una forma de avanzar en la resolución de problemas consiste en ser capaz de inventar nuevos problemas. Ejemplo. (Hay un dibujo que representa a los alumnos de 4.º curso, hay 30 niños y un interrogante para niñas y se indica niñas (9/10 niños).	Inventar un enunciado a partir de una pregunta y su solución. Si conocemos la pregunta y la solución de un problema podemos inventar un posible enunciado, pero sin olvidar que este enunciado debe responder a la pregunta que se plantea y a la solución dada.

Anticipar una solución aproximada

EDELVIVES 5.º	SANTILLANA 6.º	SM 6.º
-Anticipar una solución aproximada al problema y comprobar el resultado. Para anticipar una solución aproximada, primero redondeamos los precios a la unidad. Luego planeamos el problema y realizamos las operaciones.	-Halla una solución aproximada. Después, resuélvelo y comprueba que la solución exacta se corresponde con la solución aproximada. Ejemplo. Marcos ha comprado en la frutería 4 kg de naranjas a 2,75 € el kilo, 3 kg de manzanas a 1,39 € el kilo y 2 kg de plátanos a 1,78 € el kilo. ¿Cuánto ha pagado Marcos por su compra?	-Aproximar la solución.

Ensayo-error (tanteo, experimento, pruebo)

ANAYA 5.º	EDELVIVES 5.º	SANTILLANA 6.º
-Tanteo, experimento, pruebo. El tanteo, ayudado por el cálculo mental, resulta a veces el método más sencillo.	-Tantear. Ejemplo. Fermín y María han comprado una lámpara y una bombilla de bajo consumo para la habitación de sus hijas. Si han pagado 23,80 € en total y el precio de la bombilla es dos quintas partes del de la lámpara, ¿cuánto le ha costado cada artículo?	-Ensayo-error. Resuelve el problema haciendo pruebas sucesivas. Fíjate en el resultado de las pruebas anteriores antes de hacer las pruebas siguientes.

Empezar por el final

SM 5.º	SANTILLANA 6.º
Ejemplo. Julia divide en 4 cajas iguales las lechugas que recogió de la huerta. Se queda con una caja para ella y el resto las vende en el mercado. Reparte entre sus vecinos 2/3 de las lechugas que hay en su caja. Si después de repartirlas le quedan 5 lechugas, ¿cuántas lechugas recogió Julia?	En algunos problemas, para resolverlos, tenemos que comenzar utilizando los datos del final e ir avanzando hacia atrás.

Empezar por casos más sencillos

SM 5.º	SM 6.º	SANTILLANA 6.º	ANAYA 5.º
-Empezar por casos más sencillos.	-Estudiar casos más sencillos. Ejemplo. Rodrigo coloca su colección de sellos en un álbum de un modo muy original. En la primera página pone 1 sello, en la segunda 3, En la tercera 5 y así sucesivamente. ¿Cuántos sellos tiene si completa un álbum de 12 páginas?	-Empezar con problemas más sencillos. En algunos problemas es útil resolver otros más sencillos primero para obtener pistas.	-Busco regularidades. En algunas ocasiones, para resolver un problema, conviene experimentar primero con los casos más sencillos y, observando su comportamiento, descubrir la forma de resolver los casos más complicados.

Buscar las respuestas posibles

SM 6.º	ANAYA 5.º
Ejemplo. En la sala nido del hospital hay más de 10 niños recién nacidos, pero menos de 50. Para que cada enfermero cuide el mismo número de bebés, comprueban que pueden agruparlos de 7 en 7, y de 2 en 2, pero no puede agruparlos de 3 en 3. ¿Cuántos recién nacidos puede haber en la sala?	-Busco todos los casos posibles Algunas veces, se presentan situaciones en las que es necesario elegir entre distintas posibilidades. En estos casos, has de ser capaz de reconocerlas, analizarlas y seleccionar las más adecuadas según los objetivos que se pretenden alcanzar.

Reducir el problema a otro problema conocido

SANTILLANA 6.º
-Resuelve reduciendo primero a un problema que sepas resolver. Ejemplo. Juan está diseñando un salvamanteles rectangular de corcho que tiene huecos circulares. ¿Qué área de corcho en cm^2 tiene el salvamanteles diseñado por Juan? (Dibujo: Rectángulo de 7x4 cuadrados y en cada uno de ellos un círculo. Lado cuadrado 6 cm y radio circulo 2 cm).

Hemos elegido un problema en cada una de estas estrategias para que se pueda conocer el nivel de la actividad planteada en los libros de texto y ver el gran abanico de estrategias, que bajo distinta denominación y nombre se presentan.

Una aplicación a futuros maestros

Incluimos en el examen correspondiente a la convocatoria de febrero de 2010 un problema extraído de un libro del tercer ciclo de Primaria y en el texto pusimos como encabezamiento: *Este problema es de Primaria. Resuélvelo con los contenidos de este nivel e indica la estrategia utilizada*.

Los problemas seleccionados fueron cuatro, los que viene a continuación, uno en cada modelo de examen. Los alumnos debían de resolver el problema indicando el razonamiento y la estrategia utilizada.

Estos problemas en los libros de texto venían, dentro del bloque de resolución de problemas con los siguientes aspectos representativos así:

Título	TANTEO, EXPERIMENTO, PRUEBO (U5)
Texto	Ahora vamos a resolver problemas por tanteo. El tanteo, ayudado del cálculo mental, resulta a veces el método más sencillo.
Ejemplo	El domingo era el cumpleaños de mi tío Francisco y nos invitó al circo a toda la familia. En total éramos nueve, y las entradas costaron 155 €. ¿Cuántos adultos y cuántos niños fuimos juntos al circo? (Nota: En la taquilla Niños 15 € y Adultos 20 €).
Resolvemos el problema	1.Aclaramos lo que sabemos y lo que nos preguntan. 2.Resolvemos por tanteo. Construimos una tabla. 3.Escribimos la solución.
Editorial	ANAYA, 5.º Primaria (2009).

Título	BUSCO REGULARIDADES (U13)
Texto	En algunas ocasiones, para resolver un problema, conviene experimentar primero con los casos más sencillos y, observando su comportamiento, descubrir la forma de resolver los casos más complicados.

Ejemplo	Ana y Roberto juegan construyendo filas de casillas adosadas, con palillos y bolas de plastilina. ¿Cuántos palillos se necesitan para construir una tira de 25 casillas? (Nota: Ilustración varios cuadraditos con palillos y unidos en los vértices con plastilina).
Resolvemos el problema	1. Dibujamos los casos sencillos y contamos los palillos necesarios. (1 cuadradito, 2, 3, 4,…). 2. Recogemos los datos en una tabla. Casillas y palillos. 3. Escribimos la solución correcta.
Editorial	ANAYA, 5.º Primaria (2009).

Título	HACER UNA TABLA (U4)
Texto	En algunos problemas, es útil hacer una tabla que recoja los números que cumplen ciertas condiciones.
Ejemplo	Lourdes colecciona muñecas. Tiene menos de 40. Al agruparlas de 6 en 6 sobra 1 muñeca, y al agruparlas de 7 en 7 sobran 2 muñecas. ¿Cuántas muñecas tiene Lourdes?
Solución	Se pone una tabla con las dos condiciones.
Editorial	SANTILLANA, 6.º Primaria (2009).

Título	RESOLVER UN PROBLEMA EMPEZANDO POR EL FINAL (U11)
Texto	En algunos problemas, para resolverlos, tenemos que comenzar utilizando los datos del final e ir avanzando hacia atrás.
Ejemplo	María estuvo mirando el precio de un televisor en enero. Decidió no comprarlo y volvió a la tienda en febrero. Vio que habían rebajado el precio un 20%. Cuando fue a comprarlo a mitad de marzo, el precio era 30 € menor que en febrero. El televisor le costó 370 €. ¿Cuánto costaba en enero?
Solución	1. Hacemos un esquema y escribimos los datos. En los recuadros irán los precios sucesivos (enero, febrero y marzo). 2. Avanzamos hacia atrás empezando por el final (marzo, febrero, enero).
Editorial	SANTILLANA, 6.º Primaria (2009).

Los problemas propuestos, los resumidos en la siguiente tabla:

Tanteo, experimento, pruebo (Anaya 5.º)	Busco regularidades (Anaya 5.º)	Hacer una tabla (Santillana 6.º)	Resolver un problema empezando por el final (Santillana 6.º)
El domingo era el cumpleaños de mi tío Francisco y nos invitó al circo a toda la familia. En total éramos nueve, y las entradas costaron 155 €. ¿Cuántos adultos y cuántos niños fuimos juntos al circo? (Nota: En la taquilla Niños 15 € y Adultos 20 €).	Ana y Roberto juegan construyendo filas de casillas (cuadrados) adosadas, con palillos y bolas de plastilina. ¿Cuántos palillos se necesitan para construir una tira de 25 casillas?	Lourdes colecciona muñecas. Tiene menos de 40. Al agruparlas de 6 en 6 sobra 1 muñeca, y al agruparlas de 7 en 7 sobran 2 muñecas. ¿Cuántas muñecas tiene Lourdes?	María estuvo mirando el precio de un televisor en enero. Decidió no comprarlo y volvió a la tienda en febrero. Vio que habían rebajado el precio un 20%. Cuando fue a comprarlo a mitad de marzo, el precio era 30 € menor que en febrero. El televisor le costó 370 €. ¿Cuánto costaba en enero?

Corregidos los problemas, hemos seleccionado algunos de los razonamientos, tanto correctos como incorrectos y aquellos otros que se basan en la aplicación de contenidos no desarrollados en Primaria:

A) ENTRADAS CIRCO

Estrategia	Resolución – Explicación
Razonamiento	Sabiendo que la entrada de un niño es de 15 euros hay que suponer que debe de haber un número impar de niños para que el resultado total acabe en 5, por tanto se realizarán estimaciones aproximadas para ir descartando los primeros números impares (1, 3, 5, 7). Se llega a descartar el 1, el 3 y el 7 quedando como valor final el 5. Son 5 niños y 4 adultos.

<table>
<tr><td>Una tabla</td><td colspan="2">
<table>
<tr><td>Niños</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Ad.</td><td>8</td><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Coste</td><td>175</td><td>170</td><td>165</td><td>160</td><td>155</td><td>150</td><td>145</td><td>140</td></tr>
</table>
Para resolver este problema podemos aplicar la tabla. Aquí colocamos las posibles situaciones que se puedan dar y las soluciones.</td></tr>
<tr><td>Comprobación</td><td>
<table>
<tr><td>Niños</td><td>Adultos</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Imposible</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Imposible</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Imposible</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Imposible</td></tr>
<tr><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Imposible</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Imposible</td></tr>
</table></td><td>15x5=75
155-75=80</td></tr>
<tr><td>Tanteando</td><td>
<table>
<tr><td>20 €</td><td>20</td><td>15 €</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>40</td><td></td><td>30</td></tr>
<tr><td></td><td>60</td><td></td><td>45</td></tr>
<tr><td></td><td>80</td><td></td><td>60</td></tr>
<tr><td></td><td>100</td><td></td><td>75</td></tr>
</table></td><td>Tanteando nos damos cuenta que al buscar las entradas necesarias de niños que acabe en 5 (ya que el otro precio acaba en 0) y que cumpla con los adultos necesarios hasta ser nueve y esto lo cumplen los 75 € en niños y los 80 € en adultos, es decir 5 niños y 4 adultos.</td></tr>
<tr><td>Tabla</td><td colspan="2">Crear una tabla en la que aparezcan el número de personas y el tipo (adulto o niño).
<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Niño</td><td>15</td><td>30</td><td>45</td><td>60</td><td>75</td><td>90</td><td>105</td><td>120</td><td>135</td></tr>
<tr><td>Adul.</td><td>20</td><td>40</td><td>60</td><td>80</td><td>100</td><td>120</td><td>140</td><td>160</td><td>180</td></tr>
</table>
Una vez se ha llenado la tabla se busca la combinación del número de entradas de adultos y de niños cuya suma de precios sea igual a 155 euros.</td></tr>
</table>

Respuestas erróneas o no válidas para los contenidos de Primaria

Estrategia	Resolución – Explicación
	$155=5^2x7$
	m.c.d. (20, 15) = 5. A continuación divido 20:5=4. Por tanto 4 son las personas adultas. El valor de las entradas adultos es 20x4=80. Este valor se lo resto al total del dinero 155-80=75 y a continuación lo divido entre el valor de las entradas de niño
Ecuaciones	15x+20y=155 x+y=9
Método de sustitución	Total sistemas 12 casos.

B) construyo con palillos

Estrategia	Resolución – Explicación
Dibujo	Para construir una tira de 25 casillas se necesitan 76 palillos. Nos encontramos ante un problema de operaciones combinadas ya que es una suma reiterada. Multiplicaré 25x4 pero como 24 casillas se valen de un lado de su casilla anterior, éstas tienen un lado menos. Por lo tanto: (25x4)-(24x1)=76.
Dibujo	Dibuja las 25 casillas y hace: 4 + 3x24=76 palillos.
Dibujo	Dibuja las 25 casillas. Operación: 25x3=75 y 75+1=76 palillos.
Dibujo	Para la primera casilla se utilizan 4, pero para las demás 3. Por tanto: 3x24 + 4 = 76 palillos.
Dibujo	Se puede resolver dibujando los palillos y contando uno a uno los que hay.
Dibujo	Dibuja 3 cuadrados. La estrategia utilizada es el uso de la multiplicación con ayuda del dibujo de los palillos para observar que a partir del segundo cuadrado se usan 3 palillos y en el primero 4. Calcula: 24x3 + 4=76 palillos.
Dibujo	Por razonamiento se sabe que si los cuadrados son separados, es necesario 100 palillos, pero al unirlos, serán necesarios 24 menos, por lo que serán necesario 76 palillos.
Dibujo	La operación que se utilizaría sería el perímetro que forma: (25x2) +2 y añadirle el total (25) menos uno.

Respuestas erróneas

Estrategia	Resolución – Explicación
Dibujo	Dibujo 3 cuadrados separados. 4 palillos por cuadrado: 4x25=100 palillos.
	Dibujo 3 cuadrados unidos. Solo los palillos que lo rodean serían: 25x2 + 2 (laterales) = 52 palillos.
Dibujo	25 casillas han fabricado. 25x3=75 y 2 más, 77 palillos.
Dibujo	Dibujo de dos cuadrados solapados unidos por 2 tiras. Si una unión son 2 palillos, 24 uniones son 48 palillos.
Dibujo	Dibujo de 25 cuadrados separados. Total de palillos: 25x4=100 palillos.
Dibujo	Dibuja 25 cuadrados separados y unidos uno con otro mediante una tira (palillos). Número de palillos (tiras) es 24.
Con las propias manos	20 palillos necesito para construir una tira de 25 palillos.
	Se necesitan 24 palillos ya que si las casillas van adosadas se necesita un palillo entre cada dos casillas pero a la última no le hace falta porque no le sigue otra casilla.
	Se puede utilizar una regla de tres. Si 1 casilla son 4 palillos, 25 casillas son 100 palillos.
Dibujo	Por cada cuadrado que colocas adosas a éste dos palillos, por lo que si pones 25 cuadrados pues lo multiplicas por 2 y te dará el resultado: 25x2=50.

C) MUÑECAS DE LOURDES

Estrategia	Resolución	Explicación
Ensayo-error	1) De 6 en 6: [6, 12, 18, 24, 30, 36] + 1 2) De 7 en 7: [7, 14, 21, 28, 35] + 2 3) Hemos de buscar una relación de: $\dot{6}+1=\dot{7}+2$ 36+1=35+2 37=37	Para resolver este ejercicio en el 3.er ciclo de primaria, utilizaría algún objeto, como una piedra, que equivaliese a una muñeca. Así, iría haciendo grupos de piedras hasta que los niños descubriesen, por sí mismos, la solución mediante ensayo-error.

Hacer agrupaciones	Haciendo 6 conjuntos de 6 elementos y poniendo uno suelto. 6x6=36 y 36+1=37 Haciendo 5 conjuntos de 7 elementos y poniendo 2 sueltos. 7x5=35 y 35+2=37		Utilizo la estrategia de hacer conjuntos, agrupaciones.
Agrupamientos	Tiene que ser menos de 40. Las agrupa de 6 en 6: 6x6=36 y como sobra 1 = 37 Las agrupa de 7 en 7: 7x5=35 y como sobran 2 = 37		La estrategia utilizada es la siguiente: Como se que tiene menos de 40, pero en número cercano a 40 y agrupa de 6 en 6, por la tabla del 6 me fijo en los valores que se acercan a 40: 6x5=30, 6x6=36. 36+1 que sobra =37. Esto se podría demostrar todavía mejor agrupándolas de 7 en 7 con el mismo procedimiento: 7x5=35, 35+2 que sobra =37. Hace 5 grupos de 7 muñecas.
Ensayo-error	n=6x1+1=7 n=6x2+1=13 n=6x3+1=19 n=6x4+1=25 n=6x5+1=31 n=6x6+1=37	n=7x1+2=9 n=7x2+1=16 n=7x3+2=23 n=7x4+2=30 n=7x5+2=37 n=7x6+2=42	
Agrupamiento y Tabla	Poner 40 elementos dos veces y agruparlos en un caso de 6 en 6 y en otro de 7 en 7.	O bien realizar la tabla del 6 añadiéndole una hasta llegar al número más próximo a 40 y realizar lo mismo con la del 7 añadiéndole 2 y comprobar cuando coinciden.	Se pueden realizar de varias maneras la forma visual es agrupando de 6 en 6 y de 7 en 7 y viendo cuando sumando una muñeca a los grupos de 6 y dos muñecas a los grupos de 7 obtiene la misma cantidad de muñecas.

Empezar por el final	De forma analítica en grupos de 6 dividimos 39 entre 6 dando 6 grupos y sobrando 3. Como solo sobra una, serian: 6x6+1=37. En grupos de 7, 39 entre 7 son 5 grupos y sobran 4. Como solo sobran 2 serían: 5x7+2=37. Lourdes tiene 37 muñecas.		Al tener menos de 40 muñecas, nos encontramos con un conjunto que abarca los primeros 39 números naturales. Con estos 39 podemos realizar 6 grupos de 6, Por lo que tendríamos 36 muñecas en el total de los primeros grupos que más la que nos sobra dan un total de 37 muñecas. En cuanto a los grupos de 7, podremos realizar 5 grupos, por lo que tendríamos 35 muñecas en el total de los grupos que más las dos que nos sobran serían 37 muñecas.
Hacemos una tabla	6x1=6 mas 1, 7 6x2=12 mas 1, 13 6x3=18 más 1, 19 6x4=24 mas 1, 25 6x5=30 mas 1, 31 6x6=36 mas 1, 37 6x7=42	7x1=7 mas 2, 9 7x2=14 mas 2, 16 7x3=21 mas 2, 23 7x4=28 mas 2, 30 7x5=35 mas 2, 37 7x6=42	Hemos dividido el ejercicio en tres pasos. En el primero multiplicamos por 6 y por 7 hasta llegar a un número que fuese mayor a 40. Después sumamos los restos que nos quedaban para hallar los posibles números. Para finalizar comparamos para encontrar el número que coincide en ambos casos. El resultado es 37.
Empezar por el final	39:6 son 6 y resto 3 38:6 son 6 y resto 2 37:6 son 6 y resto 1 Tiene 37 muñecas.	Comprobamos que 37:7 son 5 y sobran 2.	
Multiplicación	6x6=36+1=37 37<40	7x5=35+2=37 37<40	Los contenidos utilizados en este problema son los de la multiplicación, se trabaja el agrupamiento de los números. Uso de la multiplicación en contextos reales.

Otras respuestas válidas

-Tiene 37 muñecas. El número de muñecas sale de buscar en la tabla de multiplicar del 6 el valor que más se aproxime al límite (6x6=36<40) y sumándole la muñeca que le sobra. Si agrupamos de 7 en 7 es lo mismo (7x5=35<40) y sumamos las dos que le sobran, 37.
-Agrupación de 6 en 6 (mediante conjuntos) y agrupación de 7 en 7 con 37 fichas. Si siguiéramos agrupando nos pasaríamos de 40, por tanto es 37.
-Establece 6 grupos de a 6 elementos y una suelta. Ahora los rodea de 7 en 7 viendo que salen 5 grupos y sobran 2.
-Escribe números del 1 al 40 y va encerrando de 7 en 7 y corta en 37, para que cumpla la segunda condición. Después con otro color agrupa de 6 en 6 y termina en 37 para que cumpla la primera condición.

Respuestas erróneas o aplicando ecuaciones

Estrategia	Resolución – Explicación
Múltiplos	$n=\dot{6}+1=\dot{6}-1$ $n=\dot{7}+2=\dot{7}-1$
	6+6+6+6+6+6-1 (Interpretación de "sobra 1"). 7+7+7+7+7-2 (Interpretación de "sobran 2").
	Tiene 5 muñecas porque 6x1=6-1=5. 7x1=7-2=5 (Interpretación de "sobra").

D) TELEVISOR

Estrategia	Resolución – Explicación
Empezar por el final	En marzo vale 370 € y luego nos dice que al precio final de febrero le habían quitado 30 € y se queda en 370 €. De aquí por deducción, nos sale que en febrero son: 370+30=400 €. -Nos dice que 400 € es el precio de haber rebajado, es decir, restado el 20% del precio inicial: Precio -20% precio = 400 €. -De aquí deducimos que el precio es el 80% y por lo tanto podemos hacer una regla de tres: Precio ----- 100% 400 ------- 80% Precio = 400·100 / 80 = 500 € -El 100% es 500 €, es decir, en enero valía 500 €.

Empezar por el final	-En marzo le costó 370 €. -En febrero valía 370+30=400. -En enero, sabiendo que con el 20% de descuento cuesta 400 € entendemos que le cuesta el 80% de lo que le habría costado antes de las rebajas. Por eso sabemos que 400 € es el 80% del precio inicial -Si el 80% son 400 €, el precio inicial será x 80 ----- 400 100 ----- x x = 400·100 / 80 = 500.

Respuestas erróneas

Estrategia	Resolución – Explicación
Empezar por el final	-Precio marzo: 370 €. -Precio febrero: 370+30=400 €. -Precio enero: 400+20%.
Empezar por el precio que nos ofrecen	370+30=400 € en febrero. 400x0,2=20%. 400+80=480 € era el precio del televisor en enero.
	-Precio Enero: 100. -Febrero: 20% ----- 0,8 -Marzo: 370 370·0,8=296; 296-30=266 -Precio: 370+266=636.
	-Sumamos el precio más la última rebaja: 370+30=400. -Si le sumamos el 20% a los 400 € nos da el precio de enero: 20x4=80 €. 80+400=480 € costaba en enero.
	Televisor = 370 €. 20% febrero: 370 x 20/100=74. 74+30-370=266 € en enero.
	400x 20/100 = 400/100 x 20/100 = 40000/2000=40/2=20. El televisor costaba en enero: 420 €.
	370+30=400; 400x0,20=80; 370+80=450 €.
Cálculo de % sobre el precio final	La estrategia utilizada es el cálculo de % sobre el precio final e ir sumando el % del precio rebajado en marzo, más el de febrero. 370 – 20%=18,5 370+18,5=388,5 388,5+30=418,5.

	370+30=400 20% de 100 es 20 420 en febrero.
	370+30=400 € en febrero 400 + 20% = 480 € en enero.
	En febrero: 370+30=400 €. 400-20% = precio enero. 400-80=320 € precio enero.
De búsqueda	He utilizado la estrategia de búsqueda y el método heurístico de la síntesis 370+30=400 € en febrero. -En enero cuesta 480 €.
	370+30=400; 400x20=8000; 8000:100 = 80. En enero costaba: 400+80=480.

Resolución por ecuaciones, no válidas en Primaria

x=precio televisor x-0,20x-30=370; 0,8x=400; x=500 El televisor costaba 500 €.
Enero: x Febrero: 0,8x Marzo: 0,8x-30 0,8x-30=370; 0,8x=400; x=500.
x=Enero x-0,2x-30=370; 0,8x=400; x=400/0,8=500.
x-0,20x-30=370; x=500 €.

A la vista de los resultados anteriores podemos hacer un breve análisis cualitativo y ver:

- La gran dispersión de estrategias que han utilizado los alumnos para resolver estos cuatro problemas.
- Que una misma estrategia es utilizada de forma distinta por los alumnos.
- Los razonamientos que acompañan la resolución del problema son muy variados.
- Los cuatro problemas son de dificultad variable y ello se ve en el caso del "Precio del televisor" que fue resuelto por muy pocos alumnos y algunos emplearon la aplicación de una ecuación para resolverlo.

- Hay bastantes errores en la comprensión del enunciado, cosa que se ve en el problema "Construyo con palillos".

Queda también comprobado que lo que para alumnos de Primaria puede constituir un problema, para algunos alumnos de maestro en formación es un simple ejercicio y para otros es más que un problema ya que no logran ni realizar un razonamiento válido, ni aplicar los cálculos correctamente.

Las editoriales cuyos libros hemos seleccionado consideran que quizás sea mejor enseñar estrategias específicas ligadas a clases de problemas que enseñar a los alumnos estrategias generales de resolución de problemas. De ahí que en cada UD han incluido una estrategia y problemas resueltos y a resolver con su aplicación.

Como indica Beagle (1979) -recogido por Castro (2008)- "hay bastantes indicadores de que las estrategias de resolución de problemas dependen tanto del estudiante como del problema, por lo que es demasiado simplista tratar de determinar una o varias estrategias que deberían ser enseñadas a todos (o a la mayoría) de los estudiantes" (p. 145).

Conclusiones y propuestas

La primera definición de libro de texto, según Escolano (1997) -recogida por Sierra (2009)- es la que aparece en el Informe del Real Consejo de Instrucción Pública, de 22 de agosto de 1846: "Las obras contextuales deben contener la parte elemental de la materia que forma objeto de la asignatura con claridad, buen método y exactitud (…)" (p. 3).

Con esta definición estarán de acuerdo la mayoría de editoriales que se dedican a la publicación de libros para la enseñanza obligatoria, pero en muchos casos se va más allá como indican Monterrubio y Ortega (2009), "el libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real" (p. 38) y a veces como afirman Ruesga, Valls y Rodríguez (2006) llegan a condicionar de forma importante el tipo de enseñanza que se realiza al utilizar muchos profesores los libros docentes de forma cerrada.

En la revisión de los libros de los distintos planes hemos constatado lo que Maz (2009) indica: "El análisis de textos escolares en cualquiera de los niveles educativos arroja no solo información sobre el contenido de los conocimientos, sino que también lo hace sobre aspectos pedagógicos, curriculares o sociales" (p. 6).

Aprender a resolver problemas es la destreza más importante que los estudiantes pueden aprender en cualquier lugar del mundo. De ahí que los futuros maestros deben de conocer las distintas estrategias de resolución para poder comunicárselas a sus alumnos el día de mañana. En los resultados que hemos expuesto anteriormente se nota, que aun siendo problemas para alumnos de Primaria no se tienen asumidas totalmente las distintas estrategias y en muchos casos cuando se aplican es con errores importantes. Además, un factor fundamental que no debemos de olvidar es el bagaje de contenidos matemáticos, ya que ahí es donde se producen verdaderas lagunas de conocimientos cuyo relleno es necesario.

Los problemas que hemos planteado están recogidos en los libros de texto de Primaria, pero en otros casos los propone el profesor ya que "en matemáticas el aprendizaje no debe confiarse exclusivamente a lo que está escrito en los manuales" (Gómez 2009, p. 33). Sin embargo, como indica Puig (2008) es muy raro que los estudiantes resuelvan problemas propuestos por ellos mismos, aunque muchos investigadores en educación matemática consideran de gran importancia el valor educativo debido a que el aprendizaje lo realiza el estudiante de un modo socializado e interactivo. Se ha dado el caso de preguntar en alguna ocasión a nuestros alumnos que inventaran un problema aportando los datos necesarios para hallar el área de un hexágono y muy pocos lo han realizado con éxito.

Los Problemas y su resolución es algo consustancial a las Matemáticas (COCKCROFT, PISA, RESOLUCION DE PROBLEMAS) tanto ahora como antaño, lo único que se ha cambiado es el marco de su resolución. Ahora es muy importante el contexto de resolución y la aplicación a la vida cotidiana mientras que antes no lo era, baste ver los enunciados aquí mencionados en los libros anteriores a los decretos actuales.

En numerosas ocasiones se han levantado voces dentro de las reuniones de la SEIEM sobre quienes deberían elaborar los libros de texto para que éstos recogieran las novedades de la investigación en didáctica de las matemáticas. A este respecto Guillén, González y García (2009), indican en las conclusiones de un reciente trabajo: "cómo se puede incidir para que los resultados de la investigación y propuestas que se han hecho contemplando estos resultados, se vean reflejadas en libros de texto muy usados por los profesores para preparar sus clases. Posiblemente en este caso, se mejorara el panorama actual de la enseñanza/aprendizaje de la geometría en los niveles escolares" (p. 256). Y más recientemente Konic, Godino y Rivas (2010) consideran que el libro de texto es uno de los referentes básicos para la organización del proceso educativo y debe ser objeto de revisión permanente, y tras analizar el capítulo de números decimales de un libro de 4.º de Primaria, se preguntan "¿en qué medida concuerdan los libros de texto de educación primaria con los resultados de las investigaciones didácticas en el tema de los números decimales?" (p. 57).

En otras ocasiones ha habido críticas duras como la de Gómez (2009) al hablar de los libros de texto realizados por equipos editoriales cuando dice: "el conocimiento escolar se vuelve una especie de conocimiento comunitario, una propiedad común que no tiene derechos de autor, por lo que raramente se dice qué parte del texto es original o de producción propia, y cuál se ha tomado copiado de otro autor, haciendo de los manuales una obra de autoría colectiva más que de una persona, de tal modo que sería más propio hablar de desarrolladores de manuales que de autores de manuales" (p. 24).

Resulta pues necesario como indica Santos-Trigo (2008) que matemáticos, educadores y profesores trabajen conjuntamente en el diseño de planes y programas que reflejen la esencia de lo que significa aprender matemáticas y en algunos países la resolución de problemas ha influido en esta estructura, pero resulta difícil evaluar y contrastar el impacto de estos programas porque el desarrollo y las metas pueden ser distintas.

Un libro de texto se puede considerar como un poliedro que tiene varias caras y a todas tiene que satisfacer. Desde la editorial se debe buscar un equipo de autores solvente y de prestigio, debe de planificar una maquetación atractiva y una línea que recoja los contenidos de obligado cumplimiento decretados por el MEC y las distintas Comunidades Autónomas. Debe de atender al aspecto económico, debe de atender al profesorado encargado de recomendar dichos libros, debe de ofrecer un precio competitivo con las demás editoriales, debe de encontrar una recepción por parte de los alumnos, debe… Y como resume Beas (1999) "los libros de texto son el resultado de una elaboración compleja, no solo por el personal especializado que los diseña y edita, sino por la diversidad de intereses y objetivos que inciden" (p. 29).

Desde aquí, y como una propuesta, con la finalidad de mejorar la enseñanza-aprendizaje de las distintas materias en general y de las matemáticas en particular, proponemos que:

- El Ministerio de Educación mantenga los mismos contenidos para todo el territorio nacional (contenidos mínimos).
- Que el Ministerio de Educación estableciera un concurso en donde todos aquellos equipos editoriales de Matemáticas presentaran su propio proyecto.
- Que reconocidos Profesores e Investigadores en Educación Matemática tanto a nivel nacional como internacional estudiaran estos proyectos educativos.
- Que eligieran el mejor proyecto y ese equipo y editorial trabajara en la elaboración del libro de texto correspondiente que tendría una tirada para todo el territorio nacional.

De esta forma al existir un concurso no valdría el repetir cuestiones ya tratadas y basarse los autores en proyectos editoriales ya desarrollados en planes anteriores, sino buscarían aquellos aspectos didácticos más avanzados teniendo en cuenta las últimas investigaciones en educación matemática, serían unos libros de texto novedosos, realizados con rigor, claridad y experimentados.

En segundo lugar sería un producto económico porque al ser una tirada de ejemplares a nivel nacional se abaratarían los costos y el precio, saliendo beneficiados, tanto las empresas que los realizaran como los compradores de los libros.

En tercer lugar se contaría con la garantía de un equipo de autores innovadores, investigadores e impuestos en los últimos avances de la didáctica de las matemáticas.

En esta labor los investigadores en general y los de la SEIEM en particular, podrían hacer una gran colaboración ya que al haber desarrollado muchas investigaciones en los distintos campos de las matemáticas a nivel de infantil, de primaria y de secundaria, tanto en la realización y dirección de tesis doctorales, como de artículos de investigación, podrían aportar esos conocimientos, formando parte de equipos de autores de textos.

Si esta propuesta es demasiado ambiciosa nos quedamos con una alternativa que si sería más factible y es que en el seno de la SEIEM, se crearan grupos de trabajo con investigadores que han trabajado los distintos campos de las matemáticas y elaboraran un proyecto para los distintos niveles de la enseñanza obligatoria y se lo ofrecieran a las editoriales para su publicación, o por qué no, que fuera el propio MEC, quien se encargara de materializarlo y publicarlo.

En cualquiera de los casos anteriores, sería el momento de aglutinar algunas de las investigaciones más recientes y ofrecer a la Sociedad unos manuales con el convencimiento de que las Matemáticas pueden ser enseñadas y aprendidas con menor dificultad de la que actualmente tienen, con mayor aprovechamiento y en definitiva engendrando una actitud positiva hacia las matemáticas, al menos como la que tienen los alumnos de infantil.

Referencias bibliográficas

Bayona Aznar, B. (2009). *Reflexiones y propuestas sobre las políticas de gratuidad de los libros de texto en España*. Madrid :ANELE .

Beas, M. (1999). Los libros de texto y las comunidades autónomas: una pesada Torre de Babel. *Revista Complutense de Educación, 10(2)*, 29-52.

Blanco, B. y Blanco L. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Números 71*, 75-85.

CARM (2007). *Decreto 286/2007 de 7 de septiembre por el que se establece el currículo de la educación primaria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia*. Murcia: BORM 12.9.2007.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XII*, 113-140. Badajoz: SEIEM.

Gómez, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. En Antonio Martinón (Ed.*). Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos*, 77-80. Madrid: Nivola.

Gómez, B. (2009). El análisis de manuales de identificación de problemas de investigación en didáctica de las Matemáticas. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 21-35. Santander: SEIEM.

González y Sierra (2004). Metodología del análisis del libro de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias 22(3)*, 389-408.

Guillén, G., González, E. y García, M.A. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis de los cuerpos de revolución. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 247-258. Santander: SEIEM.

Konic, P, Godino, J.D. y Rivas, M. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números, 74*, 57-74.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En

M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 5-20. Santander: SEIEM.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas en la Educación primaria*. BOE 8.12.2006. Madrid.

Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 37-53. Santander: SEIEM.

Nortes Checa, A. (2007). *Matemáticas y su didáctica*. Murcia: DM.

Nortes, A. y Serrano, J.M. (1991). *Operaciones concretas y formales*. Murcia: Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Murcia.

Piaget, J. (1982). *Estudios sobre lógica y psicología*. Madrid: Alianza Universidad.

Pifarré, M. y Sanvy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias 19(2)*, 297-308.

Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XII*, 93-111. Badajoz: SEIEM.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación, extraordinario*, 275-294.

Ruesga, P., Valls, F. y Rodriguez, T. (2006). Un instrumento para seleccionar libros de texto de matemáticas. Aplicación al bloque curricular de Geometría. *REIFOP, 9(1)*, 1-13. Obtenido el 26 de agosto de 2010, desde http://aufop.com/home/

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de Problemas Matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XII*, 159-187. Badajoz: SEIEM.

Sierra, M. (2009). Introducción al Seminario sobre análisis de libros de texto. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 3-4. Santander: SEIEM.

Libros de texto

Anaya (2009). *Matemáticas 5.º Primaria. Tercer Ciclo*. Madrid: Anaya.

Edelvives (1955). *Matemáticas primer curso* (Nociones de Aritmética y Geometría). Plan 1953. Zaragoza: Luis Vives.

Edelvives (1957). *Matemáticas primer curso*. Plan 1957. Zaragoza: Luis Vives.

Edelvives (2009). *Matemáticas 5.º. Proyecto "Mundo Agua"*. Zaragoza: Luis Vives.

Santillana (2009). *Matemáticas 6.º Primaria. Proyecto "La casa del saber"*. Madrid: Santillana.

SM (1973). *Cálculo 6.º curso EGB*. Madrid: SM.

SM (1984). *Cálculo 6.º curso EGB*. Madrid: SM.

SM (1985). *Matemáticas 6.º EGB*. Pitágoras. Madrid: SM.

SM (2009). *Matemáticas 5.º Primaria. "Timonel"*. Madrid: SM.

SM (2009). *Matemáticas 6.º Primaria. "Timonel"*. Madrid: SM.