El soporte de una distribución «a priori». Algunos resultados y aplicaciones (*)

POR

RAMON ARDANUY ALBAJAR

RESUMEN

En diversas cuestiones de la Inferencia Bayesiana, Programación Estocástica, Teoría de la Probabilidad, etc., aparece el concepto de soporte de una probabilidad «a priori» o en general de una distribución de probabilidad. En esta comunicación analizamos dicho concepto en el caso en que el espacio de estados de la naturaleza tenga una estructura topológica general, vemos algunas de sus posibles aplicaciones en la Inferencia Bayesiana en este contexto más general y finalmente estudiamos condiciones necesarias y suficientes sobre la topología del espacio de estados para que todas las distribuciones «a priori» tengan soporte no vacío y más aún para que la probabilidad del soporte sea uno.

1. INTRODUCCION

En diversas cuestiones de la Inferencia Bayesiana, tales como la tratada por Blyth (1951) al estudiar la admisibilidad de estimadores Bayes, la efectuada por Freedman (1963) al analizar la consistencia de estima-

(*) Comunicación presentada por RAMÓN ARDANUY ALBAJAR (Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias, Murcia) a la XI Reunión Nacional de Estadística, Investigación Operativa e Informática (Sevilla, 1979).

dores Bayes, etc., aparece el concepto de soporte de una distribución «a priori». En Programación Estocástica, Garstka y Wets (1974) utilizan esta noción de soporte para definir el concepto de función de decisión, y en Teoría de la Probabilidad lo trata Billingsley (1968), entre otros.

Billingsley trabaja con distribuciones de probabilidad definidas en espacios métricos, y para éstas define el soporte como cualquier conjunto de Borel de probabilidad 1. Evidentemente, esta definición tiene el inconveniente de la no unicidad.

En el texto de Zacks encontramos el concepto de soporte de una distribución «a priori» («topological carrier») como el mínimo conjunto compacto de probabilidad uno. Con esta definición, el soporte de una distribución «a priori» no tiene por qué existir, ni incluso en los casos más frecuentes de espacios paramétricos Euclídeos. El propio ejemplo de soporte dado por Zacks es contradictorio.

Garstka y Wets lo definen como el mínimo conjunto cerrado de probabilidad uno. Con esta definición sucede que todas las distribuciones de probabilidad sobre $\mathbb{R}^n$, espacios que son los utilizados por estos autores, tienen soporte. En realidad, ésta es una definición que en los casos interesantes coincidirá con la que adoptaremos nosotros y que es la adoptada por Ferguson (1967) para el caso en que el espacio paramétrico es la recta real. En esta misma línea se encuentran las halladas en los trabajos de Blyth y Freedman y en realidad este concepto responde a otro más general que es el de soporte de una medida [ver Morán (1967), (1968) y (1970); Kirk (1969); Schwartz (1973); etc.].

Vamos a suponer que el espacio H de los estados de la Naturaleza tiene una estructura general de espacio topológico, siendo $\mathcal{G}$ la familia de abiertos y $\mathcal{B}$ la σ —álgebra de Borel. Por H^* representaremos, siguiendo la notación de Ferguson, el conjunto de todas las probabilidades «a priori» de Borel.

2. DEFINICION DE SOPORTE Y SU APLICACION A UN TEOREMA DE BLYTH

Definición 1:

Un estado $\theta \in \mathrm{H}$ diremos que soporta probabilidad de una distribución «a priori» $P \in \mathrm{H}^*$ si cualquier abierto G que contenga a θ tiene probabilidad positiva. Esto es, dado $G \in \mathcal{G}$ tal que $\theta \in G$ se tiene que $P(G) > 0$.

No es difícil probar que en el caso en que H sea un espacio métrico esta definición equivale a decir que todas las bolas abiertas de centro θ y radio $\varepsilon > 0$ tienen probabilidad positiva, con lo cual enlazamos con la definición utilizada por Ferguson.

Definición 2:

Denominaremos soporte de una distribución «a priori» P y lo representaremos por Sop(P) al conjunto de estados que soportan probabilidad. Así pues:

$$\mathrm{Sop}(P) = \{\theta \in H \mid G \in \mathcal{G} \wedge \theta \in G \Longrightarrow P(G) > 0\}$$

En primer lugar interesa probar que Sop(P) es un conjunto de Borel, y en segundo lugar encontrar condiciones sobre la topología del espacio de estados para que los soportes sean no vacíos, y más aún para que tengan probabilidad uno. Esto último será objeto de estudio en el siguiente apartado.

Proposición 1:

Sop(P) es la intersección de todos los conjuntos cerrados de probabilidad uno y por tanto es cerrado.

Demostración:

Sea $\mathcal{F}$ la familia de conjuntos cerrados de probabilidad 1, $\mathcal{F}$ es no vacía, ya que en particular $H \in \mathcal{F}$; formemos el conjunto cerrado:

$$F_0 = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \qquad [1]$$

Si $\theta \notin \mathrm{Sop}(P)$ entonces existirá un abierto G de probabilidad nula conteniendo a θ y como $G^c \in \mathcal{F}$ el estado θ no podrá pertenecer a F_0. Recíprocamente, si $\theta \notin F_0$ existirá un $F \in \mathcal{F}$ de forma que $\theta \notin F$, pero entonces F^c es un abierto de probabilidad nula que contiene al estado θ, por lo que $\theta \notin \mathrm{Sop}(P)$.

Así pues, los complementarios de Sop(P) y del cerrado F_0 definido en [1] son iguales, por lo que ambos conjuntos coinciden.

En virtud de esta proposición, vemos que el concepto de soporte está en la línea en que lo conciben Garstka y Wets, aunque señalamos de antemano que esta intersección de cerrados de probabilidad 1 no tiene por qué ser de probabilidad uno; es más, en espacios topológicos muy generales, puede incluso llegar a ser $F_0 = \emptyset$.

Observemos también que de esta proposición se infiere que el complementario del soporte de P es la unión de todos los abiertos de probabilidad cero, lo cual nos pone en la línea del concepto de soporte utilizado por Schwartz (1973) para medidas de Radon.

El siguiente teorema es una formulación del teorema dado por Blyth (1951) para el caso de un espacio de estados H general.

Teorema 1:

Si la función de riesgo $R(\theta, \delta)$ es una función continua de $\theta \varepsilon \mathrm{H}$ para toda regla de decisión δ, aleatorizada o no, y δ_0 es una regla Bayes frente a una distribución «a priori» $P \varepsilon \mathrm{H}^*$ cuyo soporte es H y cuyo riesgo Bayes sea finito, entonces δ_0 es una regla admisible.

Demostración:

Si δ_0 no fuera admisible existiría una regla δ' y un estado θ_0, tales que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} R(\theta, \delta') \leqq R(\theta, \delta_0) & \text{para todo } \theta \in \mathrm{H} \\ R(\theta_0, \delta') < R(\theta_0, \delta_0) & \end{array} \right. \qquad [2]$$

con lo cual vemos que δ' también será Bayes frente a P, y por tanto:

$$r^*(P) = r(P, \delta') = \int_{\theta \varepsilon \mathrm{H}} R(\theta, \delta')\, P(d\theta) \qquad [3]$$

donde $r^*(P)$ es el riesgo Bayes.

Consideremos la función de H en $\mathbb{R}$ dada por:

$$\Psi(\theta) = R(\theta, \delta_0) - R(\theta, \delta') \qquad [4]$$

Ψ es una función continua, no negativa, y tal que $\Psi(\theta_0) > 0$; en consecuencia, existirá un abierto G conteniendo a δ_0, tal que

$$\Psi(\theta_0) > \frac{1}{2}\,\Psi(\theta_0) \quad \text{para } \theta \in G \qquad [5]$$

con lo cual, por [3], [4], [5] y teniendo en cuenta que $\theta_0 \in \mathrm{Sop}(P)$ sucede que:

$$0 = r(P, \delta_0) - r(P, \delta') = \int_{\theta \in H} \Psi(\theta)\; P(d\theta) \geqq$$

$$\geqq \int_{\theta \in H} \Psi(\theta)\; P(d\theta) \geqq \frac{1}{2}\,\Psi(\theta_0)\; P(G) > 0$$

lo cual es evidentemente una contradicción. En consecuencia, δ_0 debe ser admisible.

3. CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES

En este apartado vamos a ver condiciones para que el soporte de una distribución «a priori» sea no vacío y de probabilidad uno, así como una condición necesaria y suficiente sobre la topología de H para que todas las distribuciones «a priori» tengan soporte de probabilidad uno.

Definición 3:

Una probabilidad P sobre H diremos que es τ-suave (resp. débilmente τ-suave) si dada cualquier red creciente (*) $\{ G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ de abiertos de H, (tal que $\cup\, G_\lambda = H$), entonces:

$$P\left[\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda\right] = \sup \{P(G_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$$

Proposición 2:

Una distribución P es débilmente τ-suave si y sólo si de cada red creciente $\{ G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ de abiertos que recubren H se puede extraer una sucesión creciente $\{ G_{\lambda_n} \}_{n=1}$ tal que $P(\bigcup_{n=1} G_{\lambda_n}) = 1$.

(*) Λ está parcialmente ordenado de forma que: i) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, entonces existe $\lambda_3 \in \Lambda$, tal que $\lambda_1 \leqq \lambda_3$ y $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$; ii) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ y $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, entonces $G_{\lambda_1} \subset G_{\lambda_2}$.

Demostración:

Si P es débilmente τ - suave y $\{ G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ es una red creciente de abiertos que recubren H , entonces:

$$\sup \{ P(G_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \} = 1 \qquad [6]$$

y basta formar la sucesión $\{G_{\lambda_n}\}_{n=1}$ siguiente: para cada n = 1, 2, 3, ..., existe por [6] un $\lambda'_n \in \Lambda$ tal que:

$$P(G_{\lambda'_n}) \geqslant 1 - \frac{1}{n}$$

con lo cual basta tomar $\lambda_1 = \lambda'_1$ y para $n > 1$ que sea $\lambda_n \geqslant \lambda'_n$ y

$\lambda_n \geqslant \lambda_{n-1}$ con lo cual $\{G_{\lambda_n}\}_{n=1}$ es una sucesión creciente cuya unión tiene probabilidad uno.

El recíproco es inmediato, puesto que sería $1 = \lim\limits_{n\to\infty} P(G_{\lambda_n})$ y por tanto se verificaría [6].

Proposición 3:

Una probabilidad P sobre H es τ - suave si y sólo si de cada red creciente $\{ G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ de abiertos se puede extraer una sucesión parcial creciente $\{G_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que:

$$P(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\lambda_n})$$

Demostración:

Es similar a la de la proposición anterior.

Teorema 2:

Si una probabilidad P sobre H es débilmente τ - suave, entonces $\mathrm{Sop}(P) \neq \emptyset$; además, si P es τ - suave entonces la probabilidad del soporte es uno.

Demostración:

Si suponemos que el soporte de P es vacío y $\mathcal{H}$ es la familia de abiertos de probabilidad cero, entonces $\mathcal{H}$ ordenado con la inclusión es una red creciente de abiertos cuya unión es H ; por tanto, en virtud de la proposición 2, existirá una sucesión parcial creciente $\{G_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ de forma que $1 = \lim_{n\to\infty} P(G_{\lambda_n})$, lo cual es absurdo, ya que cada G_{λ_n} es de probabilidad nula. Por tanto, $\mathrm{Sop}(P) \neq \emptyset$.

Supongamos P τ - suave y sea $\mathcal{H}$ como antes, sabemos que la unión de los abiertos que forman $\mathcal{H}$ es:

$$\bigcup_{G\in\mathcal{H}} G = \mathrm{Sop}(P)^c$$

con lo cual, sin más que aplicar la proposición 3 y tener en cuenta la continuidad de P, se deduce que $P(\mathrm{Sop}(P)^c) = 0$ y por tanto que la probabilidad del soporte es uno.

Como ejemplo de probabilidades cuyo soporte sea de probabilidad uno tenemos las de Radon, puesto que entonces si K es un compacto contenido en el complementario del soporte

$$K \subset \mathrm{Sop}(P)^c = \bigcup_{G\in\mathcal{H}} G \qquad [7]$$

estará recubierto por la familia $\mathcal{H}$ de los abiertos de probabilidad cero; en consecuencia, existirá un subrecubrimiento finito y por tanto $P(K)=0$, por lo que

$$P(\mathrm{Sop}(P)) = 1 - P(\mathrm{Sop}(P)^c) = 1 - \sup\{\, P(K) \mid K \text{ compacto y } K \subset \mathrm{Sop}(P)^c \,\} = 1.$$

En particular, si H es un espacio métrico entonces, como toda probabilidad ajustada («tight») (*) es regular y por tanto de Radon, la probabilidad del soporte será uno.

Proposición 4:

Si una probabilidad $P \in H^*$ no es débilmente τ - suave, entonces existe una probabilidad $Q \in H^*$ absolutamente continua con respecto a P tal que $\mathrm{Sop}(Q) = \emptyset$.

(*) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto K_ε, tal que $P(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Ver Billingsley o Varadarajan, por ejemplo.

Demostración:

Si P no es débilmente τ - suave existirá una red creciente de abiertos $\{ G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ tal que:

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = H \\ \sup \{ P(G_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \} = p < 1 \end{cases} \qquad [8]$$

por ser Λ una red creciente y utilizando un argumento similar al dado en la demostración de la proposición 2 podemos encontrar una sucesión creciente, $\{G_{\lambda_n}\}_{n=1}$, de dichos abiertos tal que

$$P = \lim_{n \to \infty} P(G_{\lambda_n}) = P(\bigcup_{n=1} G_{\lambda_n}) \qquad [9]$$

sea entonces Z el conjunto:

$$Z = (\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\lambda_n})^c \qquad [10]$$

es claro que $P(Z) = 1 - p > 0$ y que la probabilidad de Borel $Q = P(\cdot \mid Z)$ es absolutamente continua con respecto a P. Veamos que su soportes es el vacío.

Como Z^c es abierto y $Q(Z^c) = P(Z^c \mid Z) = 0$, se tendrá que

$$\mathrm{Sop}(Q) \subset Z \qquad [11]$$

además, si $\theta \in Z$, por [8] y [10] existirá un $\lambda \in \Lambda$- $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots,\}$ tal que $\theta \in G_\lambda$, entonces $Q(G_\lambda) = 0$, ya que si no:

$$\begin{aligned} P(G_\lambda \cup Z^c) &= P((G_\lambda \cup Z^c) \cap Z) + \\ &+ P((G_\lambda \cup Z^c) \cap Z^c) = P(G_\lambda \cap Z) + \\ &+ P(Z^c) = Q(G_\lambda)\ P(Z) + p > p \end{aligned} \qquad [12]$$

y por otra parte como para cada n existe $\lambda'_n \in \Lambda$ tal que $G_\lambda \cup G_{\lambda_n} \subset$ $\subset G_{\lambda'_n}$ será:

$$P(G_\lambda \cup Z^c) = \lim_{n\to\infty} P(G_\lambda \cup G_{\lambda_n}) = \sup_{n\geq 1} P(G_\lambda \cup G_{\lambda_n}) \leq$$

$$\leq \sup_{n\geq 1} P(G_{\lambda'_n}) \leq \sup_{\lambda \varepsilon \Lambda} P(G_\lambda) = p \qquad [13]$$

y [13] está en contradicción con [12]; por tanto, debe ser $Q(G_\lambda) = 0$ y en consecuencia $\theta \notin Sop(Q)$; por ello,

$$Z \subset Sop(Q)^c \qquad [14]$$

de [11] y [14] se deduce inmediatamente que Q tiene soporte vacío, con lo cual queda probada la proposición.

Proposición 5:

Si una probabilidad $P \varepsilon H^*$ no es τ-suave, entonces existe una probabilidad $Q \varepsilon H^*$ absolutamente continua con respecto a P y tal que $Q(Sop(Q)) = 0$.

Demostración:

Si P no es τ-suave, existirá una red creciente de abiertos, $\{G_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\}$, cuya unión denotaremos por G tal que $P(G) = P(\bigcup_{\lambda\varepsilon\Lambda} G_\lambda) >$
$> \{ P(G_\lambda) \mid \lambda \varepsilon \Lambda \} \geq 0.$ [15]

de esta forma:

$$0 \leq \sup_{\lambda\varepsilon\Lambda} P(G_\lambda \mid G) = \frac{1}{P(G)} \sup_{\lambda\varepsilon\Lambda} P(G_\lambda) = p < 1 \qquad [16]$$

Utilizando un razonamiento similar al efectuado en la proposición 2 podemos encontrar una sucesión creciente $\{G_{\lambda_n}\}_{n=1}$ tal que:

$$P(\bigcup_{n=1} G_{\lambda_n} \mid G) = \lim_{n\to\infty} P(G_{\lambda_n} \mid G) = p < 1 \qquad [17]$$

con lo cual, si Z es el conjunto

$$Z = G - \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\lambda_n} = G \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\lambda_n} \right]^c \qquad [18]$$

se tendrá, en virtud de [15] y [17], que

$$P(Z) = P\left(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\lambda_n} \right]^c \mid G \right) \cdot P(G) = (1-p)\, P(G) > 0 \qquad [19]$$

por lo que tiene sentido la probabilidad condicionada a Z:

$$Q = P(\cdot \mid Z) \qquad [20]$$

que claramente es una probabilidad de Borel absolutamente continua respecto a P.

Por otra parte, si $\theta \varepsilon Z$ existirá $\lambda \varepsilon \Lambda - \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$ tal que $\theta \varepsilon G$; además $Q(G) = 0$ ya que si fuera positivo sería:

$$P(G_\lambda \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\lambda_n} \right] \mid G) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\lambda_n} \mid G) + P(G_\lambda \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\lambda_n} \right]^c \mid G) =$$

$$= p + \frac{P(G_\lambda \cap Z)}{P(G)} = p + Q(G_\lambda) \cdot \frac{P(Z)}{P(G)} = p + (1-p)\, Q(G_\lambda) > p \qquad [21]$$

y por otra parte por un razonamiento análogo al de [13] sería:

$$P(G_\lambda \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\lambda_n} \right] \mid G) \leq \sup_{\lambda \varepsilon \Lambda} Q(G_\lambda) = p \qquad [22]$$

en contradicción con [21]; por ello, debe ser $Q(G_\lambda) = 0$ lo cual implica que θ no pertenece al soporte de Q y en consecuencia:

$$Z \subset Sop(Q)^c \qquad [23]$$

implicando que Q es una probabilidad de Borel cuyo soporte tiene probabilidad cero, ya que:

$$0 \leq Q(Sop(Q)) = 1 - Q(Sop(Q))^c \leq 1 - Q(Z) = 1 - P(Z \mid Z) = 1 - 1 = 0$$

con lo cual queda probada la proposición.

Siguiendo a Adamski (1977) y otros autores, daremos la siguiente definición:

Definición 4:

Un espacio topológico H se dirá:

a) τ - espacio si cada medida finita de Borel es τ - suave.

b) τ - espacio débil si cada medida finita de Borel es débilmente τ - suave (*).

En este mismo artículo de Adamski pueden encontrarse caracterizaciones notables de los τ - espacios y τ - espacios débiles en los casos en que H es metrizable o paracompacto.

Teorema 3:

Supongamos que H * es la familia de probabilidades de Borel sobre el espacio de estados H , entonces:

a) Cada P ε H * tiene soporte no vacío si y sólo si H es un τ - espacio débil.

b) P(Sop(P)) = 1 para todo P ε H * si y sólo si H es un τ - espacio.

Demostración:

a) Si H es un τ - espacio débil, entonces cada P ε H * es débilmente τ - suave por ser una medida finita de Borel y en virtud del teorema 2 será Sop(P) $\neq \emptyset$.

Por otra parte, si H no es un τ - espacio débil, existirá una medida finita de Borel μ que no será débilmente τ - suave, como μ es no negativa y no puede anularse idénticamente la probabilidad P ε H * definida por:

$$P = \frac{1}{\mu(\text{H})}\,\mu$$

no será débilmente τ - suave y, por la proposición 4, $\exists$ Q ε H * con soporte vacío.

(*) Tanto en *a*) como en *b*) se supone que las medidas son no negativas.

b) Si H es un τ - espacio, entonces cada P ε H * es τ - suave y en virtud del teorema 2 el soporte de P tendrá probabilidad uno.

Por otro lado, si H no es un τ - espacio, podemos encontrar, en forma similar a la realizada en *a*), una probabilidad P ε H * que no sea τ - suave y por la proposición 5 existirá Q ε H * tal que Q(Sop(Q)) = = 0 $\neq$ 1, con lo cual queda probado el teorema.

Como ejemplo de τ - espacios débiles tenemos los espacios de Lindelöf, es decir, aquéllos que de cada recubrimiento abierto se puede extraer un subrecubrimiento numerable, y como ejemplo de τ - espacios tenemos los que son totalmente de Lindelöf, esto es, aquéllos en los que cada subespacio es de Lindelöf. En Adamski encontramos que una condición necesaria y suficiente para que un espacio metrizable H sea τ - espacio es que contenga un subconjunto denso cuyo cardinal sea de medida cero (*); así obtenemos, por ejemplo, que todos los espacios métricos separables serán τ - espacios y en consecuencia todas las probabilidades de Borel definidas sobre los mismos tendrán soporte de probabilidad uno.

AGRADECIMIENTO: Quiero agradecer al Profesor Gabriel Vera Botí las sugerencias que me ha dado en la preparación del artículo.

(*) Se dice que un cardinal *m* es de medida cero si cada medida finita sobre el conjunto de partes de X, con Card(X) = *m*, que se anule en todos los puntos de X se anula idénticamente.

REFERENCIAS

ADAMSKI, W. (1977), «τ - smooth Borel Measures on Topological Spaces», *Math. Nachr.*, vol. 78, págs. 97-107.

BILLINGSLEY, P. (1968), *Convergence of Probability Measures*, John Wiley and Sons, Inc., New York.

BLYTH, C. R. (1951), «On minimax Statistical Decision Procedures and their Admissibility», *Ann. Math. Statist.*, vol. 22, págs. 22-42.

FERGUSON, T. S. (1967), *Mathematical Statistics, a Decision Theoretic Approach*, Academic Press, New York.

FREEDMAN, D. A. (1963), «On the Asymptotic Behavior of Bayes Estimates in the Discrete Case», *Ann. Math. Statist.*, vol. 34, págs. 1386-1403.

GARSTKA, S. J., and R. J. WETS (1974), «On Decision Rules in Stochastic Programming», *Mathematical Programming*, vol. 7, págs. 117-143.

KIRK, R. B. (1969), «Measures in Topological Spaces and B-compactness», *Indagationes Matematica*, vol. 31, fasc. 2, págs. 172-183.

MORAN, W. (1967), «Measures and Mappings on Topological Spaces», *Proc. London Math. Soc.* (3), vol. 19, págs. 493-508.

MORAN, W. (1968), «The Additivity of Measures on Completely Regular Spaces», *J. London Math. Soc.*, vol. 43, págs. 633-639.

MORAN, W. (1970), «Measures on Metacompact Spaces», *Proc. London Math. Soc.* (3), vol. 20, págs. 507-524.

SCHWARTZ, L. (1973), *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cilindrical Measures*, Oxford University Press.

VARADARAJAN, V. S. (1965), «Measures on Topological Spaces», *Amer. Math. Soc. Trans.*, Serie 2, vol. 48, págs. 161-228.

ZACKS, S. (1971), *The Theory of Statistical Inference*, John Wiley and Sons, Inc., New York.