Teoría de los operadores lineales en espacios de Hilbert

POR

MANUEL LOPEZ RODRIGUEZ

PREFACIO

En este trabajo se expone una parte del programa del Seminario de Análisis Matemático I desarrollado en la Universidad de Murcia en el Curso Académico 1978-79.

El contenido de los tres primeros capítulos es clásico y sus resultados más importantes se pueden encontrar en una u otra de las referencias en la bibliografía. En el capítulo 4 se presentan resultados recientes del autor, no publicados, relativos a extensiones autoadjuntas de operadores diferenciales matriciales simétricos.

En su mayor parte este trabajo es autocontenido y su lectura sólo requiere conocimientos básicos de análisis, álgebra y topología adquiridos en el primer ciclo de la licenciatura de Matemáticas.

Desearía agradecer a la Universidad de Murcia la publicación de este trabajo y a los estudiantes del citado Seminario su colaboración en la revisión del manuscrito.

Murcia, abril 1979

CAPÍTULO 1

ESPACIOS METRICOS, NORMADOS Y DE HILBERT

Definición 1.1.—Se llama pseudométrica (p. m.) en un conjunto E, a una función

$$d\colon\ E \times E \to \mathbb{R}$$

satisfaciendo las condiciones siguientes:

1. desigualdad triangular,

$$d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(b, c), \qquad \forall\, a, b, c \in E;$$

2. para todo punto a en E se tiene

$$d(a, a) = 0.$$

Estas dos propiedades implican las siguientes:

3. $d(a, b) \geqslant 0, \qquad \forall a, b \in E;$

4. $d(a, b) = d(b, a), \quad \forall a, b \in E.$

La p. m. d se dice que es una métrica si satisface además

5. $d(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b, \quad \forall a, b \in E.$

Definición 1.2.—Se llama espacio pseudométrico a un conjunto E dotado de una pseudométrica d y la topología definida por d. Un espacio p. m. se dice que es un espacio métrico si y sólo si su p. m. es una métrica.

Definición 1.3.—Sean E y F espacios p. m. Una función

$$f\colon E \to F$$

se dice que es una isometría si y sólo si para todo par a, b de elementos en E se tiene

$$d_E(a, b) = d_F(f(a), f(b)).$$

Teorema 1.4.—Si E es un espacio métrico completo y $A \subset E$ entonces $\bar{A}$ es completo.

Demostración. Inmediata.//

Definición 1.5.—Si E y F son espacios p. m., se dice que una función $f\colon E \to F$ es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{(1.1)} \qquad d(a, b) < \delta \implies d(f(a), f(b)) < \varepsilon.$$

Teorema 1.6—Sean E y F espacios p. m. y métrico completo, respectivamente. Si $f\colon A \to F$, $A \subset E$ es uniformemente continua existe una única extensión continua g de f a $\bar{A}$. Además g es uniformemente continua.

Demostración. Sea $x \in \bar{A}$, y seleccionemos $(x_n) \subset A$ tal que $(x_n) \to x$.
Para todo $\varepsilon > 0$, se toma $\delta > 0$ como en (1.1). Así, puesto que (x_n) es una SC (sucesión de Cauchy), existe N_0 tal que

$$d_E(x_n, x_m) < \delta \qquad \text{si} \qquad n, m > N_0.$$

Por tanto

$$d_F(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad n, m > N_0, \quad \text{y}$$

$(f(x_n))$ es una SC en F. Como F es completo, $(f(x_n))$ tiene límite. Este es independiente de (x_n). En efecto, si (y_n) es otra sucesión en A que también converge a x, se tiene que

$$d_E(x_n, y_n) \to 0, \quad \text{lo que implica} \quad d_F(f(x_n), f(y_n)) \to 0,$$

y por tanto $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$, para $n \to \infty$.

Denotando por $g(x)$ este límite, vamos a demostrar que es continuo. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ sean $x, y \in \bar{A}$ tales que $d(x, y) < \delta/3$, donde δ ha sido definida al comienzo de la demostración. Si $(x_n) \to x$, $(y_n) \to y$, se tiene, para $n > N_0$,

$$d(x, x_n) < \frac{\delta}{3} \quad , \quad d(y, y_n) < \frac{\delta}{3}.$$

Por tanto $d(x_n, y_n) < \delta$ y así $d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. Tomando el límite para $n \to \infty$,

$$d(g(x), g(y)) \leqslant \varepsilon$$

lo que termina la demostración.//

Denotaremos por $C(A, B)$ el conjunto de todas las aplicaciones continuas y acotadas de un espacio p. m. A en otro B. Si $B = \mathbb{C}$, se pondrá simplemente $C(A)$.

Definición 1.7.—Un conjunto M en un espacio p. m. E se dice acotado si existen $a \in E$ y $r \in \mathbb{R}^+$ fijos, tales que $d(a, m) < r$, para todo $m \in M$.

Una función $f: E \to F$, E espacio topológico y F espacio p. m., se dice que es acotada si y sólo si el conjunto $f(E)$ es acotado en el espacio p. m. F.

Teorema 1.8.—$C(A, B)$ es un espacio p. m. si se define la p. m. d por

$$d_C(f, g) = \sup_{x \in A} d_B(f(x), g(x)) \quad , \quad f, g \in C(A, B).$$

$C(A, B)$ es un espacio métrico (completo), si B es un espacio métrico (respectivamente completo).

Demostración. Sólo probaremos la última parte. Sea (f_n) una SC en $C(A, B)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$d_C(f_n, f_m) < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n, m > N.$$

Por tanto, para todo x y todo $m, n > N$ se tiene $d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$. La sucesión $(f_n(x))$ es pues de Cauchy en B. Ello implica que $(f_n(x)) \to f(x)$ puntualmente. Queda por demostrar que:

i) $f \in C(A, B)$,

ii) $(f_n) \to f$ en la métrica de $C(A, B)$.

En efecto, f es acotada pues

$$d(f_n(x), f(x)) = \lim_{m \to \infty} d(f_n(x), f_m(x))$$

y por tanto, para todo $x \in A$, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$(1.2) \qquad d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \qquad \text{si} \qquad n > N.$$

Para uno de tales n, f_n es acotada, es decir, existen a, r tales que $d(a, f_n(x)) < r$, para todo x. Entonces,

$$d(a, f(x)) \leqslant d(a, f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) < r + \varepsilon \quad , \quad \forall x,$$

y f es acotada.

f es también continua. En efecto, dado x_0 y $\varepsilon > 0$, se puede escoger un n (el mismo que en el párrafo anterior), y, para este n fijo, un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B(x_0, \delta)$,

$$B(x_0, \delta) = \{ x \mid d(x_0, x) < \delta \},$$

es la bola abierta de centro x_0 y radio $\delta > 0$, se tiene

$$d(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon,$$

puesto que f_n es una función continua. Entonces para todo $x \in B(x_o, \delta)$ y usando (1.2), se tiene

$$d(f(x), f(x_o)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_o)) + d(f_n(x_o), f(x_o)) < 3\,\varepsilon,$$

por lo que $f \in C(A, B)$.

Para demostrar ii), dado $\varepsilon > 0$ existe N, el mismo que en (1.2), tal que

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in A} d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon, \qquad \forall n > N.$$

Por tanto $(f_n) \rightarrow f$ en la métrica de $C(A, B)$.//

Definición 1.9.—Un espacio métrico E se llama complección de un espacio p. m. A si:

1) E es completo;
2) hay una isometría φ de A sobre un subconjunto denso E_1 de E, es decir, $\overline{E}_1 = E$.

Teorema 1.10.—Sea A un espacio p. m. Entonces A tiene una complección, $\hat{A}$, y si E y F son complecciones de A, hay una isometría de E sobre F.

Demostración. Sea $a \in A$. Para todo $x \in A$ sea f_x la función definida por

$$f_x(y) = d(y, x) - d(y, a).$$

La función f_x es claramente acotada, pues

$$| f_x(y) | = | d(y, x) - d(y, a) | \leq d(x, a),$$

y continua

$$| f_x(y_1) - f_x(y_2) | \leq | d(y_1, x) - d(y_2, x) | +$$

$$+ | d(y_1, a) - d(y_2, a) | \leq 2\, d(y_1, y_2).$$

La función $\varphi : A \rightarrow C(A, \mathbb{R})$ definida por

$$\varphi(x) = f_x$$

es una isometría. En efecto,

$$d(f_x, f_y) = \sup_{u \in A} | f_x(u) - f_y(u) | =$$

$$= \sup_{u \in A} | d(u, x) - d(u, y) | = d(y, x);$$

por tanto $d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y))$.

Si se toma $E_1 = \varphi(A)$, $\bar{E}_1 = \hat{A}$ es una compleción de A, por los teoremas 1.4 y 1.8.

Sean $\bar{E}_1 = E$, $\bar{F}_1 = F$ dos complecciones de A, y

$$\varphi: A \rightarrow E_1 \quad , \quad \psi: A \rightarrow F_1$$

isometrías.

Se define $\Phi: E_1 \rightarrow \bar{F}_1$ por $\Phi(z) = \psi(x)$, donde x es un punto de A tal que $\varphi(x) = z$. Se tiene:

i) Φ es una función. En efecto, supongamos que $y \in A$ es tal que $\varphi(y) = z$. Hay que demostrar que $\psi(x) = \psi(y)$. Como φ es una isometría,

$$d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(z, z) = 0$$

y por tanto

$$d(\psi(x), \psi(y)) = d(x, y) = 0$$

puesto que ψ es también una isometría. Pero al ser $\bar{F}_1$ espacio métrico se tiene que $\psi(x) = \psi(y)$ por lo que Φ es una función.

ii) Φ es una isometría. En efecto, sean

$$\Phi(x) = \psi(u) \quad , \quad \Phi(y) = \psi(v),$$

donde

$$\varphi(u) = x \quad , \quad \varphi(v) = y.$$

Entonces,

$$d(x, y) = d(\varphi(u), \varphi(v)) = d(u, v) = d(\psi(u), \psi(v)) = d(\Phi(x), \Phi(y)).$$

El teorema 1.6 da una extensión única de $\Phi: E_1 \to F$ a $\Psi: E \to F$ y ésta es una isometría «sobre». En efecto, si $z \in F$, entonces $z = \lim\limits_n z_n$, y $(z_n) \subset F_1$. Para todo n existe $x_n \in E_1$ tal que $z_n = \Phi(x_n)$. Como (z_n) es una SC, también lo es (x_n) y poniendo $x = \lim\limits_n x_n$ se tiene

$$\Psi(x) = \Psi(\lim_n x_n) = \lim_n \Psi(x_n) = \lim_n \Phi(x_n) = \lim_n z_n = z,$$

y por tanto Ψ es una aplicación «sobre». Finalmente, si $x, y \in E$, sean $(x_n) \to x$, $(y_n) \to y$, donde $(x_n) \subset E_1$, $(y_n) \subset E_1$. Entonces,

$$d(\Psi(x), \Psi(y)) = d(\lim_n \Phi(x_n), \lim_n \Phi(y_n)) =$$

$$= \lim_n d(\Phi(x_n), \Phi(y_n)) = \lim_n d(x_n, y_n) =$$

$$= d(\lim_n x_n, \lim_n y_n) = d(x, y),$$

lo que demuestra que es una isometría.//

Definición 1.11.—Se dice que una sucesión (x_n) en un espacio p.m. es absolutamente convergente si $\Sigma d(x_n, x_{n+1}) < \infty$. Se dice que dos SC (x_n) e (y_n) son equivalentes si $d(x_n, y_n) \to 0$ para $n \to \infty$.

Un punto de la complección de un espacio p.m. puede representarse por:

1) la clase de todas las SC de las que es límite; o
2) la clase de sucesiones absolutamente convergentes equivalente.

En efecto, sea $x \in \hat{A}$. Puesto que $\hat{A} = \overline{\varphi(A)}$ en la construcción en el teorema 1.10, para todo n existe x_n tal que

$$d_{\hat{A}}(x, \varphi(x_n)) < \frac{1}{2^n}.$$

Entonces,

$$d_A(x_n, x_{n+1}) = \underset{A}{d}(\varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Así $\Sigma d_A(x_n, x_{n+1}) < \infty$ y (x_n) es absolutamente convergente.

Definición 1.12.—Se dice que un conjunto en un espacio topológico es disperso si su clausura no contiene ningún conjunto abierto no vacío.

Se dice que un conjunto es de primera categoría si es unión contable, finita o numerable, de conjuntos dispersos.

Teorema 1:13. (Teorema de la Categoría de Baire).—Un espacio métrico completo no es de primera categoría.

Demostración. Sea E un espacio métrico completo y supongamos que E es de primera categoría, es decir,

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m,$$

donde ningún $\overline{A}_m$, contiene un conjunto abierto no vacío.

Usaremos el hecho de que A es disperso si y sólo si dada una bola $B(a, r)$, se puede encontrar otra $\overline{B}(b, r') \subset B(a, r)$, disjunta con A. Existen pues a_1 y $r_1 < 1$ tales que $\overline{B}(a_1, r_1)$ no intersecta A_1, y a_2, $r_2 < 1/2$ tales que $\overline{B}(a_2, r_2)$ está contenida en $B(a_1, r_1)$ y no intersecta A_2. Prosiguiendo de este modo y definidos $a_1, a_2, \ldots, a_m$, se eligen a_{m+1} y $r_{m+1} < 1/(m+1)$ tales que

$$\overline{B}(a_{m+1}, r_{m+1}) \subset B(a_m, r_m)$$

y no intersecta A_{m+1}. Si $n > m$ es claro que

$$d(a_m, a_n) < r_m < \frac{1}{m}.$$

Por tanto (a_n) es una SC. Si $a = \lim_n a_n$ $a \in \overline{B}(a_m, r_m)$, $\forall m$, y

$$a \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Contradicción.//

Definición 1.14.—Se dice que un subconjunto A de un espacio métrico es totalmente acotado, TA, si para todo $\delta > 0$ existe un conjunto finito de a_ν tal que

$$A \subset \bigcup B(a_\nu, \delta).$$

Un conjunto A es una δ-red si para todo $x, y \in A$, $x \neq y$, se tiene $d(x, y) \geq \delta$.

Teorema 1.15.—Un subconjunto A de un espacio métrico es TA si y sólo si toda δ-red en A es finita para todo $\delta > 0$.

Demostración. Inmediata.//

Teorema 1.16.—Si A es un espacio métrico y $S \subset A$, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:
a) S es compacto;
b) Toda sucesión en S contiene una subsucesión convergente a un punto de S;
c) S es completo y TA.

Demostración. *a*) $\Rightarrow$ *b*). Sea (a_n) una sucesión en S. Si (a_n) no contiene ninguna subsucesión convergente a un punto de S, para cada $x \in S$ existe un δ_x tal que $B(x, \delta_x)$ contiene a a_n sólo para un número finito de n.

Por *a*) se puede obtener un número finito de estas bolas que recubren S y contienen a a_n sólo para un número finito de n. Contradicción.

b) $\Rightarrow$ *c*). Si (a_n) es una SC en S, el hecho de que una SC converge si y sólo si contiene una subsucesión convergente, y condición *b*) implican que S es completo. Si S no fuera TA existiría un δ para el cual la δ-red en S no sería finita. Existe por tanto una sucesión en la δ-red que no tiene subsucesión convergente. Contradicción.

c) $\Rightarrow$ *a*). Para todo m, sea

$$\{B(\overset{m}{a_r}, \frac{1}{2^m})\}_{r=1}^{N_m}$$

un recubrimiento finito de S, y (0_α) un recubrimiento abierto de S.

Si (0_α) no contiene ningún recubrimiento finito, existe $\overset{1}{a_{r1}}$ tal que $B(\overset{1}{a_{r1}}, \frac{1}{2})$ no tiene recubrimiento finito y existe $\overset{2}{a_{r2}}$ tal que $B(\overset{2}{a_{r2}}, \frac{1}{2^2})$ intersecta a $B(\overset{1}{a_{r1}}, \frac{1}{2})$ y no tiene recubrimiento finito. Por inducción existe a_{rm} tal que

$$B(\overset{m}{a_{rm}}, \frac{1}{2^m}) \cap B(\overset{m-1}{a_{r,\,m-1}}, \frac{1}{2^{m-1}}) \neq \emptyset,$$

y no tiene recubrimiento finito, para todo m.

La sucesión $(\overset{m}{a_{rm}})_1^\infty$ es absolutamente convergente y, por tanto, de Cauchy. En efecto,

$$d(\overset{m-1}{a_{r,\,m-1}}, \overset{m}{a_{rm}}) < \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m}.$$

Por tanto, por ser S completo, existe $a \in S$ tal que $a = \lim_m \overset{m}{a_{rm}}$. También existen 0_α, y k tales que

$$B(a, \frac{1}{2^k}) \subset 0_\alpha.$$

Por otra parte, se tiene que

$$d(a_{rm}, a_{rn}) \leq d(\overset{m}{a_{rm}}, \overset{m+1}{a_{r,\,m+1}}) + \ldots + d(\overset{n-1}{a_{r,\,n-1}}, \overset{n}{a_{rn}}) <$$

$$< (\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}) + (\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}}) + \ldots = \frac{3}{2^m},$$

para todo $n > m$.

Así,

$$d(a, a_{r_m}^{m}) = \lim_n d(a_{r_n}^{n}, a_{r_m}^{m}) \leq \frac{3}{2^m}.$$

Por tanto, para todo

$$x \in B(a_{r_m}^{m}, \frac{1}{2^m})$$

se tiene

$$d(a, x) \leq d(a, a_{r_m}^{m}) + d(a_{r_m}^{m}, x) < \frac{3}{2^m} + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{m-2}}$$

Tomando $m > k + 3$, se tiene que

$$d(a, x) < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \text{para todo} \quad x \in B(a_{r_m}^{m}, \frac{1}{2^m}),$$

y por tanto

$$B(a_{r_m}^{m}, \frac{1}{2^m}) \subset B(a, \frac{1}{2^k}) \subset 0_\alpha,$$

para todo $m > k + 3$. Contradicción.//

Definición 1.17.—Se dice que un subconjunto M de un espacio lineal E sobre $\mathbf{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbf{C}$) es una variedad lineal si x, $y \in M$ implica $\alpha x + \beta y \in M$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$.

Se llama variedad afín al conjunto

$$a + M = \{ a + x \mid x \in M, \quad M \quad \text{variedad lineal}\},$$

y subespacio a una variedad lineal cerrada.

Definición 1.18.—Si E es un espacio lineal sobre $\mathbf{K}$, una función $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ se dice que es una norma si satisface,
N1. $\|x\| \geqq 0$, $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$;
N2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
N3. $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$;
para todo par $x, y \in E$, y todo $\lambda \in \mathbf{K}$.

Definición 1.19.—Un espacio normado es un espacio métrico lineal cuya métrica viene definida por la norma, es decir,

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Teorema 1.20.—Sean E y F espacios normados y U una aplicación lineal de E en F. Las siguientes propiedades son equivalentes:
i) U es continua;
ii) Existe un punto en el que U es continua;
iii) Existe una constante $K < \infty$ tal que

$$\| Ux \|_F \leqq K \| x \|_E , \qquad \forall x \in E.$$

Demostración. Inmediata.//

Definición 1.21.—Para cualquier aplicación lineal continua $U : E \to F$, E y F espacios normados, se pone

$$\|U\| = \inf \{ K \mid \|Ux\| \leqq K \|x\| \}.$$

Teorema 1.22.—Si U es una aplicación lineal continua de E en F, E y F espacios normados, se tiene,

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ux \|}{\| x \|} = \sup_{x \in E} \{ \|Ux\| \mid \|x\| \leqq 1 \} =$$

$$= \sup_{x \in E} \{ \|Ux\| \mid \|x\| = 1 \}.$$

Demostración. Inmediata.//

Definición 1.23.—Un espacio de Banach es un espacio normado completo.

Sea E un espacio lineal sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbf{C}$.

Definición 1.24.—Una aplicación $B : E \times E \to \mathbf{K}$ se dice que es una forma hermitiana si

i) $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$,

ii) $B(\lambda x+\mu y, z) = \lambda B(x, z) + \mu B(y, z)$,

para todo x, y, z en E, y todo λ y μ en $\mathbf{K}$. B se dice positiva definida si $x \neq 0$ implica $B(x, x) > 0$, y positiva semi-definida si $B(x, x) \geq 0$ para todo $x \in E$.

Nota. De i) e ii) se sigue que

$$B(x, \lambda y+\mu z) = \bar{\lambda} B(x, y) + \bar{\mu} B(x, z).$$

Si $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ se dice que B es bilineal (lineal en ambas variables). Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ se dice que B es sesquilineal (lineal en la primera variable y antilineal en la segunda).

Ejemplos. En $\mathbf{C}^2$, $B(x, y) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, es positiva definida.

En $\mathbb{R}^2$, $B(x, y) = ax_1y_1 + h(x_1y_2+x_2y_1) + by_1y_2$, es:
positiva semi-definida si $a, b > 0$, $ab - h^2 = 0$;
positiva definida si $a, b > 0$, $ab - h^2 > 0$.

Teorema 1.25. (Desigualdad de Schwarz).—Sea B una forma positiva semi-definida en un espacio lineal E. Entonces para cualquier x, y en E,

$$|B(x, y)| \leq B(x, x)^{\frac{1}{2}} B(y, y)^{\frac{1}{2}} . \tag{1,3}$$

Si B es positiva definida, la igualdad ocurre en (1.3) si y sólo si x e y están relacionados linealmente, es decir, existen $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ tales que $\lambda x = \mu y$.

Demostración. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $x, y \in E$, se tiene

$$B(\lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y) \geqq 0.$$

Por tanto,

$$|\lambda|^2 B(x, x) + \lambda\bar{\mu} B(x, y) + \bar{\lambda}\mu \overline{B(x, y)} + |\mu|^2 B(y, y) \geqq 0. \tag{1.4}$$

Sean λ un número real arbitrario y

$$\mu = \operatorname{sgn} B(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad B(x, y) = 0, \\ \dfrac{B(x, y)}{|B(x, y)|} & \text{si} \quad B(x, y) \neq 0. \end{cases}$$

Sustituyendo en (1.4) se obtiene,

$$\lambda^2 B(x, x) + 2\lambda |B(x, y)| + B(y, y) \geqq 0 \tag{1.5}$$

y por consiguiente

$$|B(x, y)|^2 \leqq B(x, x) B(y, y).$$

Si la igualdad ocurre, debe existir un λ tal que el primer miembro de (1.5) es cero, por lo que (1.4) se anula para μ elegido como antes. Por tanto,

$$B(\lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y) = 0$$

lo que, al ser B positiva definida, implica $\lambda x+\mu y = 0$.//

Definición 1.26.—Un espacio unitario, o de pre-Hilbert, es un espacio lineal dotado de una forma hermitiana definida positiva, que se denota por (x, y), y de una norma definida por

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}.$$

Nota. La función $\|\cdot\|$ claramente satisface N1 y N2 de la definición 1.18. El siguiente teorema prueba que también satisface N3.

Teorema 1.27. (Desigualdad triangular).—Si E es un espacio unitario, para todo x, y en E, se tiene

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

La igualdad ocurre si y sólo si existen λ, μ , $\mu \geq 0$, tales que $\lambda x = \mu y$.

Demostración.

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x+y, x) + (x+y, y) \leq \qquad (\alpha)$$

$$\leq |(x+y, x)| + |(x+y, y)| \leq \qquad (\beta)$$

$$\leq \|x+y\| \ \|x\| + \|x+y\| \ \|y\| \qquad (\gamma)$$

y por tanto

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| . \qquad (\delta)$$

La igualdad ocurre en (δ) si y sólo si ocurre en todas las desigualdades de la demostración. Por otra parte, la igualdad en (β) implica, por el teorema 1.25, que existen λ, μ tales que $\lambda x = \mu y$, y la igualdad en (α) ocurre si y sólo si $(x+y, x)$ y $(x+y, y)$ son ambos no negativos, es decir, si $\lambda = 0$ o si $y = \eta x$, para algún $\eta \in \mathbf{K}$. En este último caso, por sustitución se tiene que

$$(1+\eta)(x, x) \geq 0, \quad (1+\eta)\bar{\eta} \geq 0$$

y por tanto η es real no negativo.//

Definición 1.28.—Un espacio unitario completo se llama espacio de Hilbert.

Teorema 1.29—Para todo par de elementos x, y en un espacio de Hilbert se tiene,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demostración. Inmediata.//

Definición 1.30.—Dos elementos x, y de un espacio de Hilbert H se dice que son ortogonales si y sólo si $(x, y) = 0$, y se escribe $x \perp y$. Si $S \subset H$, se dice que x es ortogonal a S, y se escribe $x \perp S$, si y sólo si x es ortogonal a todos los elementos de S. Se define

$$S^{\perp} = \{ x \mid x \perp S \}.$$

Teorema 1.31. (Teorema de Pitágoras).—Si x e y son elementos ortogonales en un espacio de Hilbert, se tiene,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demostración. Inmediata.//

Teorema 1.32.—Sea K un subespacio de un espacio de Hilbert H y sea $x \in H$. Si se define

$$d(x, K) = \inf \{ \|y-x\| \mid y \in K \},$$

entonces existe un único punto $z \in K$ tal que

$$\|x-z\| = d(x, K).$$

Demostración. Por hipótesis existe una sucesión $(z_n) \subset K$ tal que $\|x-z_n\| \to d(x, K)$ para $n \to \infty$.

Por el teorema 1.29, para todo par m, n, de enteros positivos, se tiene,

$$\left\|\frac{x-z_n}{2} + \frac{x-z_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{z_n-z_m}{2}\right\|^2 = 2\left(\left\|\frac{x-z_n}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-z_m}{2}\right\|^2\right).$$

Por tanto,

$$\| z_n - z_m \|^2 = 2 \{ \| x - z_m \|^2 + \| x - z_n \|^2 - 2 \| x - \frac{z_n + z_m}{2} \|^2 \} \leq$$

$$\leq 2 \| x - z_m \|^2 + 2 \| x - z_n \|^2 - 4 d^2$$

puesto que

$$\frac{z_n + z_m}{2} \in K \quad \text{y} \quad \| x - \frac{z_n + z_m}{2} \| \geq d(x, K) = d.$$

Cuando m, n tienden a ∞, $\| x - z_m \|$ y $\| x - z_n \|$ tienden a d, por lo que (z_n) es una SC. Existe por tanto $z \in K$ tal que $z = \lim_n z_n$, y

$$\| x - z \| = \lim_n \| x - z_n \| = d(x, K).$$

Finalmente, si existen y, z en K tales que $d(x, y) = d(x, z) = d(x, K)$, se considera la sucesión (z_n) en K definida por $z_{2m} = y$, $z_{2m+1} = z$. Por lo anterior se tiene

$$\| z_m - z_{m+p} \| \to 0, \qquad \text{para} \quad n \to \infty,$$

lo que implica $y = z$.//

Teorema 1.33.—Sea M un subespacio de un espacio de Hilbert H, y sea $x \in H$. Entonces existe un único $y \in M$ tal que $(x - y) \perp M$. Además, $d(x, M) = \| x - y \|$.

Demostración. Por el teorema anterior existe $y \in M$ tal que $d(x, y) = d(x, M) = \| x - y \|$.

Sea $z \in M$. Si $\lambda \in \mathbf{K}$, $y - \lambda z \in M$ y por tanto

$$\| x - y + \lambda z \|^2 \geq \| x - y \|^2.$$

Así,

$$\bar{\lambda}(x - y, z) + \lambda \overline{(x - y, z)} + | \lambda |^2 \| z \|^2 > 0,$$

para todo λ, y tomando $\lambda = t\,\mathrm{sgn}\,\overline{(x-y, z)}$, $t \in \mathbb{R}$, se obtiene, para todo número real t,

$$2t\,|(x-y, z)| + t^2\,\|z\|^2 \geq 0$$

lo que implica $(x-y, z) = 0$, es decir, $(x-y) \perp M$ ya que z es arbitrario.

Si $(x-y_1) \perp M$, $(x-y_2) \perp M$ siendo y_1, y_2 elementos de M, se tiene que $(y_1-y_2) \perp M$, lo que implica $(y_1-y_2, y_1-y_2) = 0$ y por tanto $y_1 = y_2$.//

La letra H representará siempre un espacio de Hilbert. Si $C \subset H$, denotaremos por $Sp\{C\}$ la variedad lineal de H generada por los elementos de C. H' denotará al dual de H, es decir, al conjunto de todos los funcionales lineales continuos en H.

Teorema 1.34.—Sea $S \subset H$. Entonces $\overline{Sp\{S\}} = H$ o existe $a \in H$ tal que $a \perp S$ y $\|a\| = 1$.

Demostración. Sea $M = \overline{Sp\{S\}} \neq H$, y $x \notin M$. Entonces existe $y \in M$ tal que $(x-y) \perp M$, y se define

$$a = \frac{x-y}{\|x-y\|}.//$$

Teorema 1.35. (Teorema de representación de F. Riesz).—Sea $u \in H'$. Entonces existe un único $a_u \in H$ tal que, para todo $x \in H$, se tiene

$$u(x) = (x, a_u).$$

Demostración. Al ser u continua, $M = u^{-1}(0)$ es cerrado. Si $M = H$ se toma $a_u = 0$. Si $M \neq H$ existe $b \perp M$, $\|b\| = 1$.

Para todo $x \in H$,

$$u\left(x - \frac{u(x)}{u(b)}\,b\right) = 0$$

y así

$$x - \frac{u(x)}{u(b)} b \in u^{-1}(0) = M.$$

Por tanto, $x - \frac{u(x)}{u(b)} b$ es ortogonal a b y por consiguiente

$$(x, b) - \frac{u(x)}{u(b)} (b, b) = 0.$$

Tomando $a_u = \overline{u(b)}\, b$, se tiene $u(x) = (x, a_u)$, $\forall x \in H$.

Para probar la unicidad, sean a_1 y a_2 tales que $u(x) = (x, a_1) = (x, a_2)$, para todo $x \in H$. Entonces, $(x, a_1 - a_2) = 0$, para todo $x \in H$, en particular para $x = a_1 - a_2$, lo que implica $a_1 = a_2$.//

Denotaremos por φ la correspondencia entre H y H' dada por el teorema de representación de Riesz, es decir, $\varphi : x \to \varphi_x$ donde

$$\varphi_x(y) = (y, x) \quad , \qquad \forall y \in H.$$

Entonces H' tiene estructura de espacio de Hilbert con producto escalar definido por

$$(\varphi_x, \varphi_y) = (y, x)$$

y, como φ preserva la norma, es un homeomorfismo de H y H' considerados como espacios topológicos.

Igualmente $H'' = (H')'$, como dual de H', es también un espacio de Hilbert y la correspondencia Φ de H en H'' definida por $\Phi(x) = \Phi_x$, donde

$$\Phi_x(\varphi_y) = \varphi_y(x) = (x, y) \quad , \qquad \forall \varphi_y \in H',$$

es un isomorfismo isométrico de H sobre H''. Los espacios de Hilbert son, pues, reflexivos.

Definición 1.36.—Sea M un subespacio de H. La aplicación $P_M : H \to H$ definida para todo $x \in H$ por

$$P_M x = y$$

si y sólo si $y \in M$, $(x - y) \perp M$, se llama proyección ortogonal sobre M.

Teorema 1.37.—P_M es un operador lineal acotado, $\| P_M \| \leq 1$ y

1) $P_M^2 = P_M$,

2) $(P_M x, y) = (x, P_M y)$, para todo $x, y \in H$.

Recíprocamente, si P es un operador lineal en H tal que

1′) $P^2 = P$,

2′) $(Px, y) = (x, Py)$, para todo $x, y \in H$,

entonces PH es un subespacio de H y $P = P_{PH}$.

Demostración. La primera parte es evidente. Para probar 1), se tiene que $P_M x \in M$. Como trivialmente $(P_M x - P_M x) \perp M$, por definición $P_M(P_M x) = P_M x$.

Igualmente, para probar 2), se tiene que para todo x, y en H, $(y - P_M y) \perp M$, $P_M x \in M$, luego $(P_M x, y - P_M y) = 0$, es decir,

$$(P_M x, y) = (P_M x, P_M y).$$

Intercambiando x e y, se obtiene

$$(x, P_M y) = (P_M x, P_M y) = (P_M x, y).$$

Para probar el recíproco supondremos que P es también continua. Esta restricción será eliminada en el teorema 2.5.

Si $(x_n) \subset PH$, por 1′) y la continuidad de P existe (y_n) tal que $Py_n = x_n$, para todo n, y se tiene

$$Px_n = P(Py_n) = Py_n = x_n.$$

Si (x_n) converge a x, se tiene

$$x = \lim_n x_n = \lim_n Px_n = P(\lim_n x_n) = Px,$$

y por consiguiente $x \in PH$, y PH es cerrado.

Por 1') y 2') se tiene, para todo x, y,

$$(Px,y-Py) = (Px,y) - (Px,Py) = (Px,y) - (P^2x,y) = (Px,y) - (Px,y) = 0,$$

es decir, $(y - Py) \perp PH$ luego $Py = P_{PH}y$.//

Definición 1.38.—Sea E un espacio lineal normado y sea $\{v_\alpha \mid \alpha \in A\}$ un subconjunto de E. Se pone

$$v = \sum_{\alpha \in A} v_\alpha$$

si y sólo si para toda bola $B(v, r)$ existe un conjunto finito $J_n \subset A$ tal que

$$\sum_{\alpha \in J} v_\alpha \in B(v, r),$$

para todo conjunto finito J que contenga a J_n.

Definición 1.39.—Se dice que un conjunto $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ en un espacio unitario es ortonormal (ON) si $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$, donde $\delta_{\alpha,\beta}$ es la función delta de Kronecker.

Teorema 1.40.—Si $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es un conjunto ON en un espacio unitario U y $x \in U$, entonces:

i) $\{\alpha \mid (x, \varphi_\alpha) \neq 0\}$ es contable (finito o numerable);

ii) $\sum_{\alpha\in A} |(x, \varphi_\alpha)|^2 \leqq \|x\|^2$.

Así $\sum_{\alpha\in A} (x, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha$ existe y es la proyección ortogonal de x sobre $\overline{Sp\{\varphi_\alpha\}}$

Demostración. Para todo conjunto finito $J \subset A$,

$$(x - \sum_{\alpha\in J} (x, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha) \perp Sp\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J},$$

por lo que $\sum_{\alpha\in J} (x, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha$ es la proyección ortogonal de x sobre $Sp\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J}$.

Puesto que

$$x = x - \sum_{\alpha\in J} (x, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha + \sum_{\alpha\in J} (x, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha,$$

el teorema de Pitágoras implica

$$\|x\|^2 = \|x - \sum_{\alpha\in J} (x, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha\|^2 + \|\sum_{\alpha\in J} (x, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha\|^2 \geqq$$

$$\geqq \|\sum_{\alpha\in J} (x, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha\in J} |(x, \varphi_\alpha)|^2.$$

Tomando el supremo sobre J,

$$\| x \|^2 \geq \sum_{\alpha \in A} |(x, \varphi_\alpha)|^2,$$

lo que demuestra ii).

Para probar i), sean $c = \sum_{\alpha \in A} |(x, \varphi_\alpha)|^2 < \infty$, y

$$S_n = \{ \alpha \mid |(x, \varphi_\alpha)|^2 \geq \frac{1}{n} \}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Entonces, $\operatorname{Card}\{S_n\} \leq n\,c$,

y S_n es por tanto finito. Como

$$S = \{ \alpha \mid (x, \varphi_\alpha) \neq 0 \} = \bigcup S_n,$$

se sigue que S es contable, lo que demuestra i).//

Definición 1.41.—Se dice que un conjunto ON $\{\varphi_\alpha\}$ es completo (ONC) si $\overline{Sp\{\varphi_\alpha\}} = H$.

Teorema 1.42.—Sea $\{e_\alpha\}$ un conjunto ON en H. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\{e_\alpha\}$ es ONC;

b) $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$, para todo $x \in H$;

c) $\| x \|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2$, para todo $x \in H$;

d) Si $x \in H$ es tal que $(x, e_\alpha) = 0$, para todo α, entonces $x = 0$.

Demostración. Se probará la siguiente cadena de implicaciones:

$$b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow b).$$

b) $\Rightarrow$ c). Se sigue de la igualdad

$$\|x\|^2 = \|x - \sum_{\alpha \in J} (x, e_\alpha)e_\alpha\|^2 + \|\sum_{\alpha \in J} (x, e_\alpha)e_\alpha\|^2$$

para cualquier índice finito J, como en el teorema anterior. En efecto,

$$\left| \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in J} |(x, e_\alpha)|^2 \right| = \|x - \sum_{\alpha \in J} (x, e_\alpha)e_\alpha\|^2$$

y, por b), el segundo miembro puede hacerse tan pequeño como se quiera.

c) $\Rightarrow$ d). Evidente.

d) $\Rightarrow$ b). Por el teorema 1.40 la suma

$$P_A x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\gamma)e_\alpha$$

está definida para todo $x \in H$ y es la proyección de x sobre $\overline{Sp\{e_\alpha\}}$. Por tanto

$$(x - P_A x, e_\alpha) = 0,$$

para todo $\alpha \in A$ luego por d), $x - P_A x = 0$. Así,

$$x = P_A x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha)e_\alpha.$$

b) $\Rightarrow$ a). Evidente.

a) $\Rightarrow$ b). Para cualquier $J \subset A$, J finito, la proyección de x sobre $\overline{Sp\{e_\alpha | \alpha \in J\}}$ es

$$P_J x = \sum_{\alpha \in J} (x, e_\alpha) e_\alpha$$

y por tanto

$$(x - P_J x) \perp \overline{Sp\{e_\alpha | \alpha \in J\}}.$$

Por a), dado $\varepsilon > 0$ existe J finito tal que

$$\| x - \sum_{\alpha \in J} c_\alpha e_\alpha \| < \varepsilon.$$

Por tanto, como $P_J x$ es el punto más próximo a x en $\overline{Sp\{e_\alpha | \alpha \in J\}}$, se tiene

$$\| x - \sum_{\alpha \in J} (x, e_\alpha) e_\alpha \| \leq \| x - \sum_{\alpha \in J} c_\alpha e_\alpha \| < \varepsilon.$$

Si $J' \supset J$,

$$\| x - \sum_{\alpha \in J'} (x, e_\alpha) e_\alpha \| \leq \| x - \sum_{\alpha \in J} (x, e_\alpha) e_\alpha \| < \varepsilon.$$

Así,

$$x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha . //$$

Teorema 1.43. (Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt).—Sea $(a_n)_1^\infty$ una sucesión de elementos en un espacio unitario. Entonces hay una sucesión ON $(e_n)_1^R$, donde $R = \operatorname{rang}(a_n)$ es el número de vectores linealmente independientes en la sucesión (a_n), tal que

$$\operatorname{Sp}\{(e_n)\} = \operatorname{Sp}\{(a_n)\}.$$

Demostración. Pongamos $b_1 = a_{r1}$, donde

$$a_{r1} = \inf\{a_n \mid a_n \neq 0\}.$$

Entonces

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}.$$

Supongamos $e_1, \ldots, e_{m-1}$ elegidos de modo que

$$\operatorname{Sp}\{e_1, \ldots, e_k\} = \operatorname{Sp}\{a_1, \ldots, a_{rk}\},$$

donde $\operatorname{rang}(a_1, \ldots, a_{rk}) = k$, se verifica para $k \leq m - 1$.

Sea a_{rm} el primer elemento en (a_n) que no depende linealmente de $e_1, \ldots, e_{m-1}$. Poniendo

$$b_m = a_{rm} - \sum_{j=1}^{m-1} (a_{rm}, e_j)e_j$$

y

$$e_m = \frac{b_m}{\|b_m\|}$$

se tiene

$$\operatorname{Sp}\{e_1, \ldots, e_m\} = \operatorname{Sp}\{a_1, \ldots, a_{rm}\},$$

y la demostración se completa por inducción.//

Definición 1.44.—Se dice que un espacio topológico es separable si contiene un conjunto denso contable de puntos.

Teorema 1.45.—Un espacio de Hilbert H es separable si y sólo si contiene una sucesión ONC (finita o infinita).

Demostración. Sea H separable y (a_n), $n = 1, 2, \ldots$, denso en H. La sucesión (e_n) obtenida en el teorema 1.43 es ONC.

Recíprocamente, sea (e_n) una sucesión ONC en H. Para todo m, el conjunto de puntos S_m de la forma

$$\sum_{j=1}^{m} r_j e_j \, , \qquad r_j \text{ racional en } \mathbf{K},$$

es contable. Por tanto $\cup S_m$ es contable.

Para todo $x \in H$, $\varepsilon > 0$, existe m tal que

$$\| x - \sum_{j=1}^{m} (x, e_j) e_j \| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Eligiendo r_j racional tal que

$$| (x, e_j) - r_j | < \frac{\varepsilon}{2m}$$

se tiene

$$\| x - \sum_{j=1}^{m} r_j e_j \| < \varepsilon . //$$

Teorema 1.46.—a) Todo espacio de Hilbert contiene un conjunto ONC.
b) Dos conjuntos ONC en un espacio de Hilbert tienen el mismo car-

dinal. c) Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si y sólo si todos sus conjuntos ONC tienen el mismo cardinal.

Demostración. a) Sea G el conjunto de todos los conjuntos ON en H. Claramente $G \neq \emptyset$ (si H no es trivial), y se pueden ordenar por inclusión.

Si $\{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es una cadena en G, entonces $\cup \{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es una cota superior. Así G tiene un elemento maximal, digamos $\{e_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Este elemento es un conjunto ONC en H. Si no, existiría $x \neq 0$, $(x, e_\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in I$, y

$$\{e_\alpha\} \subset \{e_\alpha\} \cup \frac{x}{\|x\|}$$

estrictamente. Contradicción.

b) Sean $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ y $\{f_\beta \mid \beta \in B\}$ dos conjuntos ONC en H. Si A o B es finito se sabe que $\mathrm{Card}\{A\} = \mathrm{Card}\{B\}$. En general, para todo α, existe un conjunto contable B_α tal que $(e_\alpha, f_\beta) = 0$ si $\beta \notin B_\alpha$, y

$$e_\alpha = \sum_{\beta \in B_\alpha} (e_\alpha, f_\beta) f_\beta.$$

Entonces $B = \cup B_\alpha$ porque si existiese $\beta \notin \cup B_\alpha$ se tendría $(f_\beta, e_\alpha) = 0$, para todo α, es decir, $f_\beta = 0$, contradicción.

c) Si $\varphi : H_1 \to H_2$ es una isometría «sobre», la imagen por φ de un conjunto ONC en H_1 es un conjunto ONC en H_2. Recíprocamente, si

$$(e_\alpha)_{\alpha \in A} \subset H_1, \qquad (f_\beta)_{\beta \in B} \subset H_2,$$

y $\mathrm{Card}\{A\} = \mathrm{Card}\{B\}$, existe una biyección $\varphi : A \to B$. Si se define

$$\psi(\Sigma \lambda_\alpha e_\alpha) = \Sigma \lambda_\alpha f_{\varphi(\alpha)}$$

entonces ψ es una isometría que se extiende a una isometría de H_1 sobre H_2.//

Teorema 1.47. (Teorema de la acotación uniforme).—Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, una familia de aplicaciones lineales continuas de un espacio de Banach E en un espacio normado F tal que para cada $x \in E$ el conjunto

$$\{U_\alpha x \mid \alpha \in A\}$$

es acotado en F.

Entonces existe una constante K tal que

$$\| U_\alpha x \| \leq K \| x \|,$$

para todo $x \in E$ y todo $\alpha \in A$, es decir, $\| U_\alpha \| \leq K$, para todo $\alpha \in A$.

Demostración. Sea

$$S_n = \{ x \mid \|U_\alpha x\| \leq n \quad , \qquad \forall \alpha \in A\}$$

para $n = 1, 2, \ldots,$.

Puesto que U_α es continua, S_n es cerrado, para todo n. Además

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} S$$

y, por el teorema 1.13 (Teor. de la Categoría de Baire), existen $a \in E$, $r > 0$ y n_0 tales que

$$B(a, r) \subset S_{n_0}.$$

Por tanto, para todo x,

$$\| x \| < r \Rightarrow \| U_\alpha(a+x) \| \leq n_0 .$$

Así,

$$\| U_\alpha x \| = \| U_\alpha(a+x) - U_\alpha a \| \leq 2n_0 ,$$

para todo x tal que $\| x \| < r$.

Si $z \in E$, $z \neq 0$, se tiene que

$$\left\| \frac{rz}{2 \| z \|} \right\| < r$$

por lo que para todo $\alpha \in A$, $z \in E$,

$$\| U_\alpha z \| \leq \frac{4n_0}{r} \| z \|.//$$

Si E es un espacio normado y E' su dual se pone $<x', x> = x'(x)$ para todo $x \in E$, $x' \in E'$.

Definición 1.48.—En un espacio normado E, la familia de conjuntos

$$N(x_0; x'_1 \ldots, x'_k; \varepsilon) = \{x| \ |<x'_j \ x - x_0>| < \varepsilon, 1 \leq j \leq k\},$$

para cualquier elección de $x'_1, \ldots, x'_k$ en E', y $\varepsilon > 0$, define una base de entornos de x_0 para una topología en E llamada topología débil, o d-topología.

Teorema 1.49.—Una sucesión (x_n) en un espacio de Hilbert H converge a x en la topología débil,

$$(x_n) \xrightarrow{d} x ,$$

si y sólo si para todo $y \in H$,

$$(x_n, y) \rightarrow (x, y) \quad \text{para} \quad n \rightarrow \infty .$$

Demostración. Inmediata.//

Teorema 1.50.—La topología débil en un espacio de Hilbert es Hausdorff.

Demostración. Si $x \neq 0$,

$$N(0; \ x; \ \tfrac{1}{2} \| x \|^2) \cap N(x; \ x; \ \tfrac{1}{2} \| x \|^2) = \emptyset.//$$

La topología débil es más débil que la topología fuerte. Se tiene, sin embargo, el siguiente teorema.

Teorema 1.51.—Si (x_n) es una sucesión débilmente convergente en un espacio de Hilbert, entonces la sucesión de normas $(\|x_n\|)$ es acotada. Si $(x_n) \to x$ en la topología débil y $(\|x_n\|) \to \|x\|$, entonces $(x_n) \to x$ en la topología de la norma, o f-topología.

Demostración. Si $(x_n) \xrightarrow{d} x$, entonces, para todo $y \in H$, se tiene,

$$|(x_n, y)| \leqq |(x_n - x, y)| + |(x, y)|.$$

Por la convergencia débil, existe n_0 tal que

$$|(x_n - x, y)| < 1,$$

para todo $n > n_0$. Por tanto, para todo n,

$$|(x_n, y)| \leqq \max\{|(x_1, y)|, \ldots, |(x_{n_0}, y)|, 1 + |(x, y)|\}.$$

La sucesión $((x_n, y))$ es pues acotada para cada $y \in H$. Aplicando el teorema de la acotación uniforme se obtiene

$$|(x_n, y)| \leqq K \|y\|, \qquad K \text{ constante},$$

para todo $y \in H$, $n = 1, 2, \ldots$. Tomando $y = x_n$, se tiene

$$(x_n, x_n) = \|x_n\|^2 \leqq K \|x_n\|,$$

es decir, $\|x_n\| \leqq K$, para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Si $(x_n) \to x$ y $(\|x_n\|) \to \|x\|$,

se tiene

$$\lim_n \|x_n - x\|^2 = \lim_n \{\|x\|^2 - (x, x_n) - (x_n, x) + (x_n, x_n)\} = 0.//$$

Definición 1.52.—Se dice que un conjunto A es relativamente compacto si y sólo si su clausura, $\bar{A}$, es compacta.

Teorema 1.53.—Todo conjunto acotado en H es débilmente relativamente compacto.

Demostración. Es fácil ver que si B es acotado, la clausura débil $\overline{B}$ de B es también acotada. Existe pues

$$C = \sup_{y \in \overline{B}} \{\|y\|\} < \infty.$$

Para cada $x \in H$ se define A_x como el compacto

$$A_x = \{\alpha \mid |\alpha| \leq C\|x\|\} \subset \mathbf{C}$$

Por el teorema de Tychonoff, $A = \prod_{x \in H} A_x$ es compacto en la topología producto.

Para cada $y \in \overline{B}$, la función φ_y definida por

$$\varphi_y(x) = (x, y), \quad \text{para todo } x \in H,$$

pertenece a A. En efecto, la proyección de φ_y sobre cualquier coordenada es $\varphi_y(x)$ y se tiene

$$|\varphi_y(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \ \|y\| \leq C \ \|x\|,$$

es decir, $\varphi_y(x) \in A_x$.

Si se define $\Phi : \overline{B}^d \to A$ como $\Phi(y) = \varphi_y$, para todo $y \in \overline{B}^d$, la aplicación

$$\Phi : \overline{B}^d \to \Phi(\overline{B}^d) \subset A$$

es claramente biunívoca. Vamos a ver que es también bicontinua, es decir Φ es un homeomorfismo, demostrando que la topología inducida en $\overline{B}^d$ por la topología débil en H coincide con la inducida en $\Phi(\overline{B})$ por la topología producto en A. La demostración del teorema quedará así reducida a probar que $\Phi(\overline{B}^d)$ es compacto para lo cual, por ser A compacto, bastará probar que $\Phi(\overline{B}^d)$ es cerrado.

En efecto, un elemento de la base de entornos de la topología inducida en $\Phi(\overline{B})$ por la topología producto en A es de la forma

$$N(\varphi_y) = \{\varphi_z | \ |\varphi_z(x_j) - \varphi_y(x_j)| < \varepsilon \quad , \quad 1 \leq j \leq m < \infty\}.$$

Pero, por definición, éste es la imagen por Φ del elemento de la base de entornos de la topología inducida en $\overline{B}^d$ por la topología débil en H dado por

$$N(y) = \{z | \ |(z - y, x_j)| < \varepsilon \quad , \quad 1 \leq j \leq m < \infty\}.$$

Vamos a ver que $\Phi(\overline{B}^d)$ es cerrado. En efecto, si f pertenece a su clausura, todo entorno de f intersecta a $\Phi(\overline{B}^d)$. En particular, para todo x, y en H, el entorno intersección de los tres siguientes:

$$N(f; x; \varepsilon) = \{g \in A| \ |g(x) - f(x)| < \varepsilon\},$$

$$N(f; y; \varepsilon) = \{h \in A| \ |h(y) - f(y)| < \varepsilon\},$$

$$N(f; x+y; \varepsilon) = \{k \in A| \ |k(x+y) - f(x+y)| < \varepsilon\}.$$

Si φ_z pertenece a la intersección se tiene

$$|\varphi_z(x) - f(x)| < \varepsilon, \ |\varphi_z(y) - f(y)| < \varepsilon, \ |\varphi_z(x+y) - f(x+y)| < \varepsilon,$$

y, como φ_z es lineal,

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq |f(x+y) - \varphi_z(x+y)| +$$

$$+ |\varphi_z(x) - f(x)| + |\varphi_z(y) - f(y)| < 3\,\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene que

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Análogamente se prueba que

$$f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

para todo $x \in H$ y todo λ en **C**. Así, f es lineal. También es continua pues siendo $f \in A$, se tiene $f(x) \in A_x$, para todo $x \in H$, y por tanto,

$$| f(x) | \leq C \, || x ||.$$

Por el teorema de representación de Riesz, existe $u \in H$ tal que $f = \varphi_u$, y $f \in \Phi(\overline{B}^{\alpha})$.//

Teorema 1.54.—Todo espacio de Hilbert es débilmente secuencialmente completo.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy para la topología débil, es decir, para cada $y \in H$ fijo, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$| (x_n - x_m, y) | < \varepsilon \quad , \qquad \text{para todo} \quad m, n > n_0.$$

La sucesión numérica $((y, x_n))_1^{\infty}$ es pues convergente, y por tanto acotada, para cada $y \in H$.

Definiendo $U_n(y) = (y, x_n)$, para todo $y \in H$, $n = 1, 2, \ldots$, se tiene que U_n es un funcional lineal y continuo en H, acotado para cada y fijo y todo n. Por el teorema 1.47 existe una constante K tal que

$$| (x_n, y) | \leq K \, || y ||,$$

es decir,

$$|| x_n || \leq K,$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Si se define

$$\varphi(y) = \lim_n \, (y, x_n),$$

es claro que φ es un funcional lineal en H, continuo porque $||x_n|| \leq K$, para todo n, implica

$$| \varphi(y) | \leq K \, || y ||.$$

Por el teorema de representación de Riesz existe $z \in H$ tal que $\varphi(y) = (y, z)$, para todo $y \in H$, y por tanto, $(x_n) \rightarrow z$ en la topología débil.//

Teorema 1.55.—Todo conjunto acotado en H es relativamente, secuencialmente, débilmente compacto, es decir, de cualquier sucesión acotada se puede seleccionar una subsucesión débilmente convergente.

Demostración. Sea $(x_n)_1^\infty$ una sucesión acotada, es decir, $\| x_n \| \leq K$, para todo $n = 1, 2, \ldots$. Poniendo $G = Sp\,(x_n)_1^\infty$, se tiene

$$H = \overline{G} + G^\perp.$$

La sucesión numérica $((x_1, x_n))_1^\infty$ es acotada pues

$$|(x_1, x_n)| \leq \| x_1 \| \; \| x_n \| \leq K^2, \qquad 1 \leq n < \infty.$$

Contiene por tanto una subsucesión convergente, es decir, existe $(x_{1n})_1^\infty$ tal que $((x_1, x_{1n}))_1^\infty$ es convergente.

Del mismo modo, por la acotación de la sucesión numérica $((x_2, x_{1n}))_1^\infty$ existe una subsucesión (x_{2n}) de (x_{1n}) tal que $((x_2, x_{2n}))_1^\infty$ es convergente.

Aplicando reiteradamente este argumento, se tiene que dado x_m, para todo m, existe una subsucesión (x_{mn}) de $(x_{m-1,\,n})$ tal que

$$((x_m, x_{mn}))_{n=1}^\infty$$

es convergente.

Es claro que la sucesión «diagonal» (x_{nn}) tiene la propiedad de que para todo entero positivo m, la sucesión

$$((x_m, x_{nn}))_{n=1}^\infty$$

es convergente. Por tanto, para todo $z \in \overline{G}$ existe

$$\lim_{n} (z, x_{nn}).$$

Trivialmente, para todo $y \in G^{\perp}$, existe también

$$\lim_{n} (y, x_{nn}).$$

Así, la sucesión $((x, x_{nn}))_1^{\infty}$ es convergente para todo $x \in H$, luego (x_{nn}) es una sucesión de Cauchy para la topología débil en H. Por el teorema 1.54, ésta es débilmente convergente.//

CAPÍTULO 2

OPERADORES LINEALES ACOTADOS

Definición 2.1.—Sean H_i, $(i = 1, 2)$, espacios de Hilbert sobre $\mathbf{K}$. Se dice que T es un operador en H_1, con dominio $\mathcal{D}(T)$, en H_2 si T es una aplicación de un subconjunto $\mathcal{D}(T)$ de H_1 en H_2. Un operador T en H_1 se dice lineal si $\mathcal{D}(T)$ es una variedad lineal en H_1 y

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty,$$

para todo x, y en $\mathcal{D}(T)$ y todo λ, μ en $\mathbf{K}$.

Si el dominio $\mathcal{D}(T)$, (H_2), no se mencionan explícitamente, se supondrá que es todo H_1, (se supondrá que $H_1 = H_2 = H$).

Definición 2.2.—Se dice que un operador lineal T en H es acotado si existe un número $M > 0$ tal que

$$\| Tx \| \leq M \| x \|,$$

para todo $x \in H$.

Teorema 2.3.—a) Un operador lineal es continuo en $x_0 \in H$ si y sólo si es continuo en 0; b) Un operador lineal es continuo en 0 si y sólo si es acotado.

Demostración. a) Inmediata.

b) Si T es continuo en 0, existe δ_0 tal que

$$\|x\| < \delta_0 \qquad \text{implica} \qquad \|Tx\| \leq 1.$$

Sea $z \in H$. Entonces, si $z \neq 0$,

$$v = \frac{z\delta_0}{2\|z\|}$$

satisface $\|y\| < \delta_0$ y por tanto $\|Ty\| \leq 1$. Es decir,

$$\left\| T \frac{z\delta_0}{2\|z\|} \right\| \leq 1 \qquad \text{implica} \qquad \|Tz\| \leq \frac{2}{\delta_0} \|z\|,$$

igualdad que también es válida para $z = 0$. Así T es acotado.

Recíprocamente, si T es acotado existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq$ $\leq M\|x\|$, para todo x en H. Dado $\varepsilon > 0$, se toma $\delta = \varepsilon/M$. Entonces

$$\|x\| < \delta \qquad \text{implica} \qquad \|Tx\| \leq M\delta = \varepsilon.//$$

Teorema 2.4.—El conjunto $\mathcal{B}(H)$ de todos los operadores lineales acotados en H tiene estructrura de espacio de Banach si se definen:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x \quad , \qquad (\lambda T)x = \lambda(Tx) \quad ,$$

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad ,$$

para todo T_1, T_2, T en $\mathcal{B}(H), \lambda \in \mathbf{C}$.

Demostración. Sólo probaremos la completitud. Sea (T_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(H)$. Entonces, para cada $x \in H$ la sucesión (T_nx) es de Cauchy en H, pues

$$\|T_nx - T_mx\| \leq \|T_n - T_m\| \; \|x\|.$$

Si se define $Tx = \lim_n T_n x$, para cada $x \in H$, se tiene que T es lineal. También es acotado pues haciendo $m \to \infty$ en

$$\| T_n x - T_m x \| \leq \| T_n - T_m \| \; \| x \| < \varepsilon \| x \|,$$

para todo $n > n_0$, se tiene

$$\| T_n x - Tx \| < \varepsilon \| x \|$$

y por tanto

$$\| Tx \| \leq \| T_p x - Tx \| + \| T_p x \| \leq (\| T_p \| + \varepsilon) \| x \|, \, p > n_0.$$

Además $\| T_n - T \| \leq \varepsilon$, para todo $n > n_0$, y por tanto $T = \lim_n T_n$ en la topología de la norma de $\mathcal{B}(H)$. Así $\mathcal{B}(H)$ es completo.//

Teorema 2.5.—Sea H un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces:

i) Existe un único $A^* \in \mathcal{B}(H)$, llamado operador adjunto de A, tal que $(Ax, y) = (x, A^* y)$ para todo par x, y de elementos de H. Además

$$\| A \| = \| A^* \| \quad , \quad A^{**} = A \, ,$$

y para todo par de operadores A, B en $\mathcal{B}(H)$, se tiene,

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*, \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbf{C},$$

y

$$(AB)^* = B^* A^*,$$

donde AB es el operador en H definido por $ABx = A(Bx)$, para todo $x \in H$.

ii) Si A y B son operadores lineales en H tales que $(Ax, y) = (x, By)$ para todo x, y en H, entonces A y B pertenecen a $\mathcal{B}(H)$ y se tiene por tanto $B = A^*$.

Demostración. i) Para cada $y \in H$ fijo, el funcional

$$\varphi_y(x) = (Ax, y), \quad \text{para todo} \quad x \in H,$$

es claramente lineal y continuo. En efecto,

$$|\varphi_y(x)| \leq \|A\| \quad \|y\| \quad \|x\| .$$

Por el teorema de representación de Riesz, existe un único $z \in H$ tal que

$$\varphi_y(x) = (x, z),$$

es decir, $(Ax, y) = (x, z)$, para todo $x \in H$.

Si denotamos por A la aplicación definida por

$$A^* y = z,$$

entonces $A^* \in \mathcal{B}(H)$. En efecto, es inmediato comprobar que A^* es lineal. También es continuo pues si en la igualdad

$$(x, A^* y) = (Ax, y) \quad , \qquad \text{para todo} \quad x, y \quad \text{en} \quad H,$$

se toma $x = A^* y$, se tiene

$$\|A^* y\|^2 \leq \|A\| \quad \|A^* y\| \quad \|y\| ,$$

y por tanto,

$$\|A^* y\| \leq \|A\| \quad \|y\| , \qquad \text{para todo} \quad y \in H.$$

Así, $A^* \in \mathcal{B}(H)$ y $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Por lo ya demostrado, aplicado al operador A se tiene, para todo x e y en H,

$$(Ax, y) = (x, A^* y) = (A^{**} x, y),$$

luego $A = A^{**}$ y $\|A\| = \|A^{**}\| \leq \|A^*\| \leq \|A\|$.
Las otras propiedades son inmediatas.

ii) Considérese la familia $\{U_y \mid y \in H - \{0\}\}$ de aplicaciones de H en $\mathbf{C}$ definidas por

$$U_y(x) = \frac{1}{\|y\|}(x, By).$$

Es claro que U_y es lineal, y continua por la desigualdad de Schwarz. Además

$$|U_y(x)| = \frac{1}{\|y\|}|(x, By)| = \frac{1}{\|y\|}|(Ax, y)| \leq \frac{\|Ax\| \ \|y\|}{\|y\|} = \|Ax\|,$$

para todo $y \in H - \{0\}$.

Por el teorema de la acotación uniforme, existe K, constante, tal que

$$|U_y(x)| \leq K \|x\|,$$

para todo x, $y \in H$, $y \neq 0$.

En particular, para $x = By$, $y \neq 0$, se tiene

$$\frac{1}{\|y\|}(By, By) \leq K \|By\|,$$

y por tanto $\|B\| \leq K$. Por i) se sigue $B = A^*$.//

Definición 2.6.—Se dice que F es un funcional sesquilineal acotado en H si F es una forma sesquilineal tal que

$$\sup |F(x, y)| < \infty, \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

Teorema 2.7.—Todo funcional sesquilineal acotado F en H puede representarse en la forma

$$F(x, y) = (Ax, y) \quad , \qquad \text{para todo} \quad x, y \in H,$$

donde A es un operador lineal acotado en H, y esta representación es única.

Demostración. Para cada $x \in H$ fijo, la aplicación

$$\overline{F(x, \cdot)} : H \to \mathbf{C}$$

es lineal y continua. Por el teorema de representación de Riesz existe un único $z \in H$ tal que

$$\overline{F(x,y)} = (y,z) \quad , \qquad \text{para todo} \quad y \in H.$$

Se define un operador A en H asignando z a x, es decir, $z = Ax$, para todo $x \in H$. Se tiene,

$$F(x,y) = (Ax,y) \quad , \qquad \text{para todo} \quad x, y \in H.$$

El operador A es claramente lineal. También es acotado pues si $\|Ax\| \neq 0$,

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{(Ax, Ax)}{\|Ax\|} = \sup_{\|x\|=1} F(x, \frac{Ax}{\|Ax\|}) \leq$$

$$\leq \sup\{|F(x,y)| \mid \|x\| = \|y\| = 1\} < \infty.$$

La unicidad es inmediata.//

Definición 2.8.—Un operador lineal acotado A en un espacio de Hilbert se dice que es hermitiano si $A = A^*$.

Teorema 2.9.—Un operador lineal A en H que satisface una de las condiciones siguientes:

i) $(Ax, y) = (x, Ay)$, para todo x, y en H,
ii) $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$,

también satisface la otra y es, por tanto, hermitiano.

Demostración. ii) $\Rightarrow$ i). Para todo λ, μ en $\mathbf{K}$, $x, y \in H$, se tiene

$$(A(\lambda x + \mu y), \lambda x + \mu y) \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$|\lambda|^2(Ax,x) + \lambda\bar{\mu}(Ax,y) + \bar{\lambda}\mu(Ay,x) + |\mu|^2(Ay,y) \in \mathbb{R}.$$

Tomando

$$\lambda = \mu = 1, \qquad \text{se tiene} \quad (Ax, y) + (Ay, x) = m \in \mathbb{R},$$

$$\lambda = 1, \ \mu = i, \qquad \text{se tiene} \quad (Ax, y) - (Ay, x) = in, \ n \in \mathbb{R}.$$

Por tanto

$$(Ax, y) = \frac{m + in}{2}, \qquad (Ay, x) = \frac{m - in}{2},$$

y así,

$$(Ax, y) = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay).$$

i) $\Rightarrow$ ii). Evidente.

i) implica que A es acotado y hermitiano por el teorema 2.5.//

Teorema 2.10.—Si A es un operador lineal hermitiano en H, se tiene,

$$\| A \| = \sup \{ |(Ax, x)| \mid \|x\| = 1 \}.$$

Demostración. Sea

$$C = \sup \{ |(Ax, x)| \mid \|x\| = 1 \}.$$

Como $|(Ax, x)| \leq \|A\| \ \|x\|^2$, se tiene $C \leq \|A\|$. Recíprocamente, de la identidad

$$(Ax, y) + (Ay, x) = \frac{1}{2} \{(A(x + y), x + y) - (A(x - y), x - y)\},$$

para todo x, y en H, se sigue

$$|(Ax, y) + (Ay, x)| \leq \frac{1}{2} C (\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2) =$$

$$= C (\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Tomando $y = \lambda z$, con $\|z\| = \|x\| = |\lambda| = 1$, se tiene,

(2.1) $$|\bar{\lambda}(Ax, z) + \lambda(Az, x)| \leq 2\,C\,,$$

lo que implica

(2.2) $$|(Ax, z)| \leq C\,,$$

pues si $(Ax, z) \neq 0$, se toma

$$\lambda = \frac{(Ax, z)}{|(Ax, z)|}$$

en la desigualdad (2.1).

Se sigue que $\|Ax\| \leq C$, para todo $x, \|x\| = 1$, pues si $Ax \neq 0$, se sustituye

$$z = \frac{Ax}{\|Ax\|}$$

en (2.2), y es trivialmente cierto si $Ax = 0$, y por tanto $\|A\| \leq C$.//

Definición 2.11.—Se dice que un operador lineal en H es compacto si transforma conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos.

Teorema 2.12.—i) Todo operador lineal compacto en H es continuo; ii) Un operador lineal en H es compacto si y sólo si transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes, es decir, convergentes en norma.

Demostración. i) Por ser A compacto, el conjunto $AB(0,1)$ es relativamente compacto, y por tanto acotado. Existe pues $M > 0$, constante, tal que $\|Ax\| \leq M$, para todo $\|x\| \leq 1$. Así, A es continuo.
ii) Sea (x_n) una sucesión débilmente convergente a x. Entonces (x_n) es acotada por el teorema 1.51, y por tanto (Ax_n) es relativamente compacto.

Supongamos que $(Ax_n) \not\to Ax$ en la f-topología. Entonces existe $\delta > 0$, $n_i \to \infty$, tales que

$$\| Ax_{n_i} - Ax \| > \delta, \quad \text{para todo} \quad i = 1, \ldots .$$

(x_{n_i}) acotado implica (Ax_{n_i}) relativamente compacto, por lo que se puede seleccionar una subsucesión (n_{ij}) tal que $(Ax_{n_{ij}})$ es convergente, pongamos a y.

Así, por la convergencia débil de (x_n) a x, se tiene, para todo $z \in H$,

$$(y, z) = \lim_j (Ax_{n_{ij}}, z) = \lim_j (x_{n_{ij}}, A^* z) = (x, A^* z) = (Ax, z),$$

es decir, $y = Ax$, contradicción.

Para el recíproco, basta aplicar el siguiente teorema [4]: En un espacio métrico, un conjunto S es compacto si y sólo si toda sucesión en S contiene una subsucesión convergente con límite en S.

En efecto, sea S acotado y (Ax_n) una sucesión en AS. La sucesión (x_n) es pues acotada y, por el teorema 1.55, tiene una subsucesión (x_{n_i}) d-convergente. Por hipótesis, la subsucesión (Ax_{n_i}) de (Ax_n) es f-convergente, y AS es por tanto relativamente f-compacto.//

Definición 2.13.—Se dice que un operador lineal A es de rango finito si AH es de dimensión finita.

Teorema 2.14.—Los operadores lineales compactos constituyen la clausura para la norma uniforme de operadores del conjunto de operadores de rango finito, es decir: i) si T es compacto, para todo $\varepsilon > 0$ existe un operador lineal A de rango finito tal que $\| T - A \| < \varepsilon$; ii) si (T_n) es una sucesión de operadores compactos y $\| B - T_n \| \to 0$, para $n \to \infty$, el operador B es compacto.

Demostración. Sea T compacto. Entonces, para todo $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existe un conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_m\}$ en $B(0,1)$ tal que

$$TB(0,1) \subset \bigcup_{r=1}^{m} B(Ta_r, \eta).$$

En efecto, como $TB(0,1)$ es relativamente compacto y la familia $\{B(Tx, \eta) \mid x \in B(0,1)\}$ es un recubrimiento abierto de $\overline{TB(0,1)}$, se puede extraer un subrecubrimiento finito $\{B(Ta_r, \eta) \mid 1 \leq r \leq m\}$.

Sea P la proyección de H sobre el subespacio generado por $\{Ta_1, \ldots, Ta_m\}$. Entonces el operador $A = PT$ es lineal y de rango finito, menor o igual a m.

Si $\|y\| \leq 1$, entonces $Ty \in \overline{TB(0,1)}$ y existe a_r, $1 \leq r \leq m$, tal que $\|Ty - Ta_r\| < \eta$. Por tanto

$$\|Ty - Ay\| \leq \|Ty - Ta_r\| + \|Ta_r - PTy\| < \varepsilon$$

ya que

$$PTa_r = Ta_r \quad , \qquad \|PTa_r - PTy\| \leq \|Ta_r - Ty\|,$$

para todo $1 \leq r \leq m$.

ii) Por i) es suficiente demostrar que si T está en la clausura para la norma uniforme de operadores, del conjunto de operadores lineales de rango finito, entonces T es compacto.

Sea T un operador lineal. T es compacto si para toda bola $B(0, \delta)$, el conjunto $TB(0, \delta)$ es totalmente acotado.

Dado $\varepsilon > 0$, existe A, operador lineal de rango finito, tal que

$$\|T - A\| < \eta, \qquad \text{tomando} \quad \eta = \frac{\varepsilon}{2\delta}$$

Así, para todo $y \in B(0, \delta)$,

$$\|Ty - Ay\| < \eta \|y\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $\overline{AB(0, \delta)}$ es acotado y de dimensión finita, es compacto. Así, existen $a_1, \ldots, a_m$, en $B(0, \delta)$ tales que

$$\overline{AB(0, \delta)} \subset \bigcup_{r=1}^{m} B(Aa_r, \delta\eta).$$

Por tanto, para todo $y \in B(0, \delta)$ existe r, $1 \leq r \leq m$, tal que

$$\| Ay - Aa_r \| < \delta\eta,$$

luego,

$$\| Ty - Aa_r \| \leq \| Ty - Ay \| + \| Ay - Aa_r \| < \varepsilon.$$

Así las bolas $B(Aa_r, \varepsilon)$, $1 \leq r \leq m$, recubren $TB(0, \delta)$ que es, por tanto, totalmente acotado.//

Definición 2.15.—Sea A un operador lineal en un espacio de Hilbert H. Si existen $x \neq 0$ en H, $\lambda \in \mathbf{C}$ tales que

$$Ax = \lambda x,$$

entonces λ se llama valor propio de A y x vector propio de A asociado al valor propio λ.

Teorema 2.16.—Si A es un operador lineal hermitiano en H, todo valor propio de A es real y si x_1, x_2 son vectores propios de A asociados a valores propios λ_1, λ_2, respectivamente, distintos, entonces x_1 y x_2 son ortogonales.

Demostración. Si $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, se tiene

$$(Ax, x) = \lambda(x, x) \quad ,$$

luego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $Ax_i = \lambda_i x_i$, $(i = 1, 2)$, como

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) \quad ,$$

se tiene $\lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$, es decir, $(x_1, x_2) = 0$.//

Teorema 2.17.—Sea A un operador lineal compacto y hermitiano. Entonces existe $x \neq 0$ en H tal que $Ax = \lambda x$, con $| \lambda | = \| A \|$.

Demostración. Existe una sucesión (x_n), $\|x_n\| = 1$, $1 \leq n < \infty$, tal que

$$\lambda = \lim_n (Ax_n, x_n) \quad , \qquad |\lambda| = \|A\|.$$

En efecto, por el teorema 2.10 se tiene

$$\|A\| = \sup \{ |(Ax, x)| \mid \|x\| = 1 \}$$

y por definición de supremo existe una sucesión (z_k), $\|z_k\| = 1$, $1 \leq k < \infty$, tal que

$$\|A\| = \lim_k |(Az_k, z_k)|.$$

Existe por tanto una subsucesión $(z_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ tal que existe

$$\lambda = \lim_n (Az_{k_n}, z_{k_n}),$$

y poniendo $x_n = z_{k_n}$, $1 \leq n < \infty$, la sucesión $(x_n)_1^{\infty}$ cumple las condiciones especificadas al principio de la demostración.

Por el teorema 1.55 se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $(x_n)_1^{\infty}$ converge débilmente, por lo que el teorema 2.12 demuestra la existencia de un elemento $y \in H$ tal que

$$y = \text{f-}\lim_n Ax_n.$$

Como

$$\|Ax_n - \lambda x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - 2\lambda(Ax_n, x_n) + \lambda^2,$$

se tiene

$$0 \leq \lim_n \|Ax_n - \lambda x_n\|^2 = \|y\|^2 - \lambda^2.$$

Así, $\|A\|^2 = \lambda^2 \leq \|y\|^2$, luego $y \neq 0$.

Como $\|Ax_n\| \leq \|A\|$, $1 \leq n < \infty$, entonces

$$\|y\|^2 = \lim_n \|Ax_n\|^2 \leq \|A\|^2 = \lambda^2,$$

y por tanto $\lambda^2 = \|y\|^2$, $\lim_n \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0$, y

$$\text{f-}\lim_n Ax_n = \text{f-}\lim_n \lambda x_n = y.$$

Este resultado implica finalmente

$$Ay = A(\text{f-}\lim_n \lambda x_n) = \lambda A(\text{f-}\lim_n x_n) = \lambda(\text{f-}\lim_n Ax_n) = \lambda y.//$$

Vamos a ver otra demostración más constructiva del mismo teorema.

Sea $x_0 \in H$ tal que $Ax_0 \neq 0$. (Si $A \neq 0$, un tal x_0 existe). Vamos a probar que para todo entero positivo m se tiene que $A^m x_0 \neq 0$. En efecto, si

i) $m = 2n$, $A^k x_0 \neq 0$, para todo $k < m$, $A^m x_0 = 0$, entonces

$$0 = (A^{2n}x_0, x_0) = (A^n x_0, A^n x_0)$$

implica $A^n x_0 = 0$, contradicción; y si

ii) $m = 2n - 1$, $A^k x_0 \neq 0$, para todo $k < m$, $A^m x_0 = 0$, entonces

$$0 = (A^{2n-1}x_0, Ax_0) = (A^{2n}x_0, x_0) = (A^n x_0, A^n x_0)$$

implica $A^n x_0 = 0$, contradicción.

La sucesión (x_n), donde

$$x_n = \frac{A^n x_0}{\|A^n x_0\|}$$

está pues bien definida. Si se pone $Ax_n = y_{n+1}$, se tiene

$$y_{n+1} = \frac{A^{n+1}x_0}{\|A^n x_0\|},$$

y por tanto

$$x_{n+1} = \frac{A^{n+1}x_0}{\|A^{n+1}x_0\|} = \frac{\|A^n x_0\|}{\|A^{n+1}x_0\|} y_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}.$$

Vamos a probar que

(2.3) $$\|y_{n+1}\| \geqq \|y_n\| > 0, \quad \text{para todo} \quad n = 1, \ldots .$$

En efecto,

$$\|y_n\|^2 = (Ax_{n-1}, \|y_n\| x_n)$$

implica

$$\|y_n\| = (Ax_{n-1}, x_n) = (x_{n-1}, Ax_n) = (x_{n-1}, y_{n+1}) \leqq \|y_{n+1}\|.$$

También se tiene que

(2.4) $$\|y_{n-1}\| \, \|y_n\| = (y_{n-1}, y_{n+1}) = (y_{n+1}, y_{n-1}),$$
para todo $n = 2, 3, \ldots$.

En efecto,

$$(y_{n-1}, y_{n+1}) = (\|y_{n-1}\| x_{n-1}, Ax_n) = \|y_{n-1}\| (x_{n-1}, Ax_n) =$$

$$= \|y_{n-1}\| (Ax_{n-1}, x_n) = \|y_{n-1}\| (y_n, x_n) =$$

$$= \|y_{n-1}\| (\|y_n\| x_n, x_n) = \|y_{n-1}\| \quad \|y_n\| ,$$

pues $\|x_n\| = 1$.

La sucesión $(\|y_n\|)$ es, por (2.3), monótona. También es acotada pues

$$\|y_n\| = \|Ax_{n-1}\| \leqq \|A\| \, \|x_{n-1}\| = \|A\|,$$

para todo entero positivo n.

Existe por tanto

$$\mu = \lim_n \|y_n\| \leqq \|A\|.$$

Como la sucesión (x_n) es acotada, existe una subsucesión (x_{n_i}) débilmente convergente por lo que la sucesión (y_{n_i+1}) tiene límite fuerte. Si se pone,

$$z_1 = \text{f-}\lim_i y_{n_i+1}$$

se tiene que $0 < \mu = \| z_1 \|$. También,

$$y_{n_i+2} = Ax_{n_i+1} = A \frac{y_{n_i+1}}{\| y_{n_i+1} \|}$$

implica, tomando límites para $i \to \infty$,

$$z_2 = \text{f-}\lim_i y_{n_i+2} = \frac{Az_1}{\mu},$$

e igualmente,

$$y_{n_i+3} = Ax_{n_i+2} = A \frac{y_{n_i+2}}{\| y_{n_i+2} \|}$$

implica

$$z_3 = \text{f-}\lim_i y_{n_i+3} = \frac{Az_2}{\mu}.$$

Utilizando (2.4) se tiene que

$$\| z_3 - z_1 \|^2 = \lim_i \| y_{n_i+3} - y_{n_i+1} \|^2 =$$

$$= \lim_i \{ \| y_{n_i+3} \|^2 + \| y_{n_i+1} \|^2 - 2(y_{n_i+3}, y_{n_i+1}) \} =$$

$$= \lim_i \{ \| y_{n_i+3} \|^2 + \| y_{n_i+1} \|^2 - 2 \; \| y_{n_i+1} \| \; \| y_{n_i+2} \| \} = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{Az_2}{\mu} = z_1 \qquad\qquad \frac{Az_1}{\mu} = z_2$$

es decir, $Az_2 = \mu z_1$, $Az_1 = \mu z_2$, y así,

$$A(z_1 + z_2) = \mu(z_1 + z_2), \quad A(z_1 - z_2) = -\mu(z_1 - z_2).$$

Uno de los dos números μ o $-\mu$ es pues un valor propio del operador A.//

Teorema 2.18. (Teorema espectral para operadores hermitianos compactos).—Sea $A \neq 0$ un operador hermitiano compacto en un espacio de Hilbert H. Existen entonces un conjunto ortonormal $(\varphi_n)_{n=1}^{m}$ y una sucesión de números reales no nulos $(\lambda_n)_{n=1}^{m}$ tales que

$$A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

para todo $1 \leq n \leq m$ (menor que m si $m = \infty$) y para todo $x \in H$ se tiene

$$Ax = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n(x, \varphi_n)\varphi_n. \tag{2.5}$$

Además, si $m = \infty$,

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots,$$

$\lim_n \lambda_n = 0$ y la convergencia en (2.5) es en norma.

Demostración. Del teorema 2.17 se deduce la existencia de un valor propio λ_1 y un vector propio asociado φ_1 tales que $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, y $|\lambda_1| = ||A||$.

Sea A_1 el operador restricción del A al subespacio ortogonal a φ_1. Es claro que A_1 es también compacto y hermitiano y $||A_1|| \leq ||A||$. Si $A_1 \neq 0$ se puede volver a aplicar al teorema 2.17 a A_1 y obtener λ_2 y φ_2 tales que

$$A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2 \quad \text{y} \quad |\lambda_2| = ||A_1|| \leq ||A|| = |\lambda_1|.$$

Después de un número finito de pasos se obtiene una sucesión $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ de valores propios y la correspondiente sucesión $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ de vectores propios de A tales que

$$A\varphi_j = \lambda_j\varphi_j, \quad 1 \leq j \leq h, \quad y \quad |\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_j| \geq \ldots \geq |\lambda_h|.$$

Se define

$$A_h x = Ax - \sum_{j=1}^{h} \lambda_j(x, \varphi_j)\varphi_j, \qquad \forall x \in H.$$

Como antes, A_h es compacto y hermitiano. Si para algún h, $A_h = 0$, se sigue que

$$Ax = \sum_{j=1} \lambda_j(x, \varphi_j)\varphi_j, \quad \text{para todo} \quad x \in H,$$

y el teorema está probado.

Si para todo entero positivo n, es $A_n \neq 0$, el método anterior aplicado reiteradamente proporciona una sucesión $(\lambda_n)_1^\infty$ de valores propios de A tales que

$$|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots,$$

y una sucesión $(\varphi_n)_1$ de correspondientes vectores propios asociados de A.

Supongamos que $(\lambda_n) \not\longrightarrow 0$ para $n \longrightarrow \infty$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para todo n,

$$|\lambda_n| > \delta > 0.$$

La sucesión (φ_n) es ON luego tiene una subsucesión débilmente convergente $(\varphi_{n_k})_{k=1}^\infty$. Por ser A compacto, la sucesión $(A\varphi_{n_k})_{k=1}^\infty$ es fuertemente convergente. Pero, para $h \neq k$,

$$\| A\varphi_{nh} - A\varphi_{nk} \|^2 = (\lambda_{nh}\varphi_{nh} - \lambda_{nk}\varphi_{nk}, \lambda_{nh}\varphi_{nh} - \lambda_{nk}\varphi_{nk}) =$$

$$= |\lambda_{nh}|^2 + |\lambda_{nk}|^2 > 2\delta^2,$$

y $(A\varphi_{nk})$ no es de Cauchy. Contradicción que prueba que $\lim_n \lambda_n = 0$.

Finalmente, para todo $x \in H$,

$$\| Ax - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x, \varphi_j)\varphi_j \| = \| A_n x \| \leq \| A_n \| \; \| x \| =$$

$$= |\lambda_{n+1}| \; \| x \|$$

que, por lo probado en el párrafo anterior, tiende a cero para n tendiendo a infinito.//

Corolario 2.19.—Si $\dim H = \infty$, la sucesión $(\varphi_n)_1^\infty$ del teorema anterior es ortonormal completa, ONC, si y sólo si $\lambda = 0$ no es un valor propio de A. En consecuencia, si H no es separable $\lambda = 0$ es siempre un valor propio de un operador hermitiano compacto.

Demostración. Si $(\varphi_n)_1^\infty$ es ONC, para todo $x \in H$ tal que $(x, \varphi_n) = 0$, para todo entero positivo n, se tiene que $x = 0$.

Si $\lambda = 0$ es un valor propio, existe $y \in H$, $y \neq 0$, tal que

$$Ay = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(y, \varphi_n)\varphi_n = 0.$$

Como la sucesión (φ_n) es ON y $\lambda_n \neq 0$, para todo n, $1 \leq n < \infty$, se tiene que $(y, \varphi_n) = 0$, para todo n, lo que implica $y = 0$, contradicción.

Por el contrario, si $(\varphi_n)_1^\infty$ no es ONC, existe $x \in H$, $x \neq 0$, tal que $(x, \varphi_n) = 0$, para todo entero positivo n, y por tanto,

$$Ax = \sum_{n=1} \lambda_n (x, \varphi_n) \varphi_n = 0,$$

es decir, 0 es un valor propio de A.

Corolario 2.20.—Si $\lambda \neq 0$ es un valor propio de un operador hermitiano compacto A, entonces el subespacio

$$N_\lambda(A) = \{x \in H \mid (A - \lambda I)x = 0\}$$

es de dimensión finita.

Demostración. Si (φ_n) es una sucesión ortonormal en $N_\lambda(A)$, por ser acotada tiene una subsucesión débilmente convergente. Sin embargo, para $n \neq m$, se tiene

$$\| A\varphi_n - A\varphi_m \|^2 = \| \lambda\varphi_n - \lambda\varphi_m \|^2 = 2 \mid \lambda \mid,$$

luego $(A\varphi_n)$ no tiene ninguna subsucesión fuertemente convergente, en contradicción con la compacidad de A.//

Definición 2.21.—Se dice que un operador lineal acotado A es normal si y sólo si $AA^* = A^*A$.

Teorema 2.22.—Sean A y B operadores lineales compactos hermitianos en H que conmutan, es decir, $AB = BA$. Existe entonces un conjunto ONC (φ_α) en H formado por vectores propios de A y B tales que si (λ_α), (μ_α) son los correspondientes valores propios de A y B, respectivamente, a lo sumo un número contable de λ_α y μ_α es distinto de cero. Para todo $x \in H$ se tiene además

$$Ax = \sum_\alpha \lambda_\alpha (x, \varphi_\alpha) \varphi_\alpha,$$

$$Bx = \sum_{\alpha} \mu_\alpha(x, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha,$$

con convergencia en la topología de la norma.

Demostración. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ el conjunto de todos los valores propios distintos de A y supongamos que $\dim H = \infty$. El subespacio

$$\mathfrak{m}_r = N(A - \lambda_r I), \qquad 1 \leq r < \infty,$$

es claramente un subespacio invariante para B, es decir, $B\mathfrak{m}_r \subset \mathfrak{m}_r$, $1 \leq r < \infty$. En efecto, si $x \in \mathfrak{m}_r$ se tiene

$$(A - \lambda_r I)Bx = ABx - \lambda_r Bx = BAx - \lambda_r Bx = B(A - \lambda_r I)x = 0,$$

es decir, $Bx \in \mathfrak{m}_r$.

Como el operador B_r, restricción de B al subespacio $\mathfrak{m}_r$ es hermitiano y compacto, existe una sucesión ortonormal

$$(\varphi_{rk}), \quad 1 \leq k \leq m_r, \quad m_r = \dim \mathfrak{m}_r,$$

finita si $\lambda_r \neq 0$, que también son vectores propios de A asociados al valor propio λ_r.

Si se pone

$$B\varphi_{rk} = \mu_{rk}\varphi_{rk},$$

$$A\varphi_{rk} = \lambda_{rk}\varphi_{rk}, \qquad \lambda_{rk} = \lambda_r,$$

$1 \leq k \leq m_r$, y cada r, $1 \leq r < \infty$, entonces para todo $x \in H$ se tiene

$$x = \sum_{\substack{r=1 \\ 1 \leq k \leq m_r}} (x, \varphi_{rk})\varphi_{rk} + x_0,$$

donde $x_0 \in N(A) \cap N(B)$. Si (φ_β) es un conjunto ONC para el subespacio $N(A) \cap N(B)$, entonces

$$(\varphi_\alpha) = (\varphi_{rk}) \cup (\varphi_\beta)$$

es el conjunto ONC buscado. Claramente $A\varphi_\beta = B\varphi_\beta = 0$, para todo β, y por tanto

$$Ax = \sum_{\substack{r=1 \\ 1\leq k\leq m_r}} \lambda_{rk}(x, \varphi_{rk})\varphi_{rk},$$

$$Bx = \sum_{\substack{r=1 \\ 1\leq k\leq m_r}} \mu_{rk}(x, \varphi_{rk})\varphi_{rk}.//$$

Teorema 2.23. (Teorema espectral para operadores normales compactos).—Sea A un operador normal compacto en un espacio de Hilbert H. Existe entonces un conjunto ONC de vectores propios (φ_α) y correspondientes valores propios (λ_α), todos cero excepto un número a lo más contable que se denotan por (λ_n), tales que

$$Ax = \sum_n \lambda_n(x, \varphi_n)\varphi_n.$$

Además, si $\dim H = \infty$, se tiene que $\lim_n \lambda_n = 0$.

Demostración. Si A es normal, los operadores

$$B = \frac{A + A^*}{2} \qquad y \qquad C = \frac{A - A^*}{2i}$$

son hermitianos y $BC = CB$. También, por ser A compacto, A^* es compacto y por tanto B y C son compactos.

Del teorema 2.22 se sigue la existencia de un conjunto ONC (φ_α)

tal que a lo más un número contable de valores propios (ξ_n), (η_n) para B y C, respectivamente, son distintos de cero y que

$$Bx = \sum_n \xi_n(x, \varphi_n)\varphi_n,$$

$$Cx = \sum_n \eta_n(x, \varphi_n)\varphi_n,$$

Como $A = B + iC$ se tiene que

$$Ax = \sum_n \lambda_n(x, \varphi_n)\varphi_n,$$

donde $\lambda_n = \xi_n + i\eta_n$. Si $\dim H = \infty$, ξ_n y η_n tienden a cero para n tendiendo a infinito; se deduce en este caso que $\lim_n \lambda_n = 0$.//

Definición 2.24.—Un operador lineal continuo T en un espacio de Hilbert H se llama de Hilbert-Schmidt, HS, si para algún conjunto ONC (e_α) en H se tiene

$$\sum_\alpha \| Te_\alpha \|^2 < \infty.$$

Teorema 2.25.—Si un operador lineal continuo T en un espacio de Hilbert H es HS para un conjunto ONC (e_α) en H, entonces también T es HS para cualquier otro conjunto ONC en H.

Demostración. Inmediata.//

Teorema 2.26.—Un operador HS es compacto. Si T es HS entonces T^* es HS.

Demostración. El conjunto

$$S = \{ \alpha \mid Te_\alpha \neq 0\},$$

(e_α) conjunto ONC, es contable. En efecto, sea

$$S_n = \{ \alpha \mid \; \| Te_\alpha \| \geq \frac{1}{n} \}, \quad 1 \leq n < \infty.$$

Es claro que S_n es finito para todo n, y como $S = \cup S_n$, S es contable. Llamemos $(e_n)_1^\infty$ al subconjunto de (e_α) tal que $Te_n \neq 0$ y definamos T_n como la restricción de T al subespacio $\mathrm{Sp}\{e_1, \ldots, e_n\}$, $1 \leq n < \infty$.

El operador T_n, para todo n, es de rango finito, y por tanto compacto. Además $T = \lim_n T_n$ en la topología uniforme de operadores. En efecto, para todo $y \in H$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \lambda_n |^2 \leq \| y \|^2.$$

Entonces,

$$\| Ty - T_k y \|^2 = \| \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n Te_n \|^2 \leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} | \lambda_n | \; \| Te_n \| \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} | \lambda_n |^2 \right) \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \| Te_n \|^2 \right) \leq \| y \| \sum_{n=k+1}^{\infty} \| Te_n \|^2,$$

es decir,

$$\| T - T_k \| \leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \| Te_n \|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

que tiende a cero para k tendiendo a infinito. Por el teorema 2.14, T es compacto.

Para cada α, se tiene

$$Te_\alpha = \sum_\beta (Te_\alpha, e_\beta)e_\beta$$

$$T^*e_\alpha = \sum_\beta (T^*e_\alpha, e_\beta)e_\beta.$$

Entonces,

$$\sum_\alpha \| T^*e_\alpha \|^2 = \sum_\alpha (T^*e_\alpha, \sum_\beta (T^*e_\alpha, e_\beta)e_\beta) =$$

$$= \sum_\alpha \sum_\beta |(T^*e_\alpha, e_\beta)|^2 = \sum_\beta \sum_\alpha |(Te_\beta, e_\alpha)|^2.$$

Como,

$$\sum_\beta \| Te_\beta \|^2 = \sum_\beta (Te_\beta, \sum_\alpha (Te_\beta, e_\alpha)e_\alpha) =$$

$$= \sum_\beta \sum_\alpha |(Te_\beta, e_\alpha)|^2 < \infty,$$

se sigue que $\sum_{\alpha} \| T^* e_\alpha \|^2 < \infty$ luego T^* es HS.//

Definición 2.27.—Un operador S con dominio $\mathcal{D}(S) \subset H$ se dice isométrico si es lineal y

$$\| Sx \| = \| x \|,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(S)$.

Definición 2.28.—Un operador U con dominio y rango un espacio de Hilbert H, se dice unitario si

$$(Ux, Uy) = (x, y),$$

para todo x, y en H.

Teorema 2.29.—Un operador unitario U admite un inverso U^{-1} (es decir, existe un operador U^{-1} en H tal que $U U^{-1}x = U^{-1} Ux = x$, para todo x en H), que también es unitario; U es lineal, y $U^* = U^{-1}$.

Demostración. Supongamos que $Ux = Uy$. Entonces,

$$0 = (Ux - Uy, Ux - Uy) = (Ux, Ux) - (Ux, Uy) - (Uy, Ux) + (Uy, Uy) =$$

$$= (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = (x - y, x - y),$$

y por tanto $x = y$.

Si $u = U^{-1}x$, $v = U^{-1}y$, entonces $Uu = x$, $Uv = y$, y se tiene

$$(U^{-1}x, U^{-1}y) = (u, v) = (Uu, Uv) = (x, y),$$

y U^{-1} es unitario.

U es lineal. En efecto, si $x = \lambda x_1 + \lambda x_2$, se tiene

$$(Ux, y) = (x, U^{-1}y) = (\lambda x_1 + \mu x_2, U^{-1}y) = \lambda(x_1, U^{-1}y) +$$

$$+ \mu(x_2, U^{-1}y) = \lambda(Ux_1, y) + \mu(Ux_2, y) = (\lambda Ux_1 + \mu Ux_2, y),$$

para todo $y \in H$, luego $U(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda Ux_1 + \mu Ux_2$.

De las igualdades

$$(Ux, y) = (x, U^{-1}y) = (x, U^*y),$$

para todo x, y en H, se sigue $U^* = U^{-1}$.//

Capítulo 3

§ 1. OPERADORES LINEALES NO ACOTADOS

Teorema 3.1.—Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert sobre **C**. El conjunto

$$H_1 \times H_2 = \{\{f_1, f_2\} \mid f_1 \in H_1,\ f_2 \in H_2\},$$

con las operaciones usuales de suma y producto por escalares y con producto escalar

$$(\{f_1, f_2\}, \{g_1, g_2\}) = (f_1, g_1) + (f_2, g_2)$$

tiene estructura de espacio de Hilbert. Se llama suma directa de los espacios H_1 y H_2 y se denota $H_1 + H_2$.

Demostración. Inmediata.//

Definición 3.2.—Se llama gráfico de un operador A en un espacio de Hilbert H al subconjunto de $H_1 + H_2$ dado por

$$G(A) = \{\{f, Af\} \mid f \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Teorema 3.3.—Un operador A en un espacio de Hilbert H es lineal si y sólo si $G(A)$ es una variedad lineal en $H_1 + H_2$. Un subconjunto G de $H_1 \times H_2$ es el gráfico de un operador si y sólo si $\{f, u\} \in G$,

$\{g, u\} \in G$ implica $f = g$. En particular, G es el gráfico de un operador lineal si y sólo si G es una variedad lineal y $\{0, x\} \in G$ implica $x = 0$.

Demostración. Inmediata.//

Teorema 3.4.—Un operador A en H es cerrado si y sólo si $G(A)$ es cerrado.

Demostración. Inmediata.//

Definición 3.5.—Si la clausura $\overline{G(A)}$ del gráfico de un operador A es el gráfico de un operador, éste se llama clausura del operador A y se representa por $\overline{A}$.

Sea $\mathcal{V}$ el operador en $H + H$ definido por

$$\mathcal{V}\{f, g\} = \{-g, f\}.$$

Se tiene el teorema siguiente,

Teorema 3.6.—Sea A un operador en H. El conjunto

$$(\mathcal{V}G(A))^{\perp}$$

es el gráfico de un operador lineal si y sólo si $\mathcal{D}(A)$ es denso en H; dicho operador, si existe, se llama adjunto del A, es cerrado y coincide con el operador A^* definido como sigue: $f \in \mathcal{D}(A^*)$ si y sólo si existe f^* tal que

$$(f^*, g) = (f, Ag)$$

para todo $g \in \mathcal{D}(A)$ y en este caso $f^* = A^*f$.

Demostración. Si $(\mathcal{V}G(A))^{\perp}$ es el gráfico de un operador, éste es lineal ya que para todo $M \subset H$, $M^{\perp}$ es una variedad lineal cerrada en H. Por tanto,

$$\{0, x\} \in (\mathcal{V}G(A))^{\perp} \Leftrightarrow (\{0, x\}, \{-Af, f\}) = 0, \qquad \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

$$\Leftrightarrow (x, f) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(A)^{\perp}.$$

Por tanto, $\mathcal{D}(A)$ es denso si y sólo si $x = 0$, es decir, si y sólo si $\mathcal{V}G(A)^{\perp}$ es el gráfico de un operador lineal. Si $\mathcal{D}(A)$ es denso, al ser su gráfico cerrado, el adjunto de A es cerrado.

Por último, si B es el adjunto de A se tiene,

$$f \in \mathcal{D}(B) \Leftrightarrow \exists f^*, f^* = Bf, \quad \text{tal que} \quad \{f, f^*\} \in \mathcal{V}G(A)^{\perp} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f, Ag) = (f^*, g), \qquad \forall g \in \mathcal{D}(A).$$

Por ser $\mathcal{D}(A)$ denso, $(Bf, g) = (f, Ag) = (A^*f, g)$, para todo $g \in \mathcal{D}(A)$, implica $B = A^*$.//

Definición 3.7.—Se dice que un operador B es una extensión de un operador A si $G(A) \subset G(B)$.

Teorema 3.8.—Si A y B son operadores lineales con dominio denso en H, se tiene,

i) Para todo $\lambda \in \mathbf{C}$, $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$;

ii) $A \subset B$ implica $B^* \subset A^*$;

iii) Si A tiene clausura $\bar{A}$, se verifica $(\bar{A})^* = A^*$;

iv) Si $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ es denso en H, entonces

$$A^* + B^* \subset (A + B)^*;$$

v) Si $\mathcal{D}(AB)$ es denso en H, se tiene

$$B^*A^* \subset (AB)^*;$$

vi) Si A tiene clausura $\bar{A}$ entonces $A^{**} = (A^*)^*$ existe y se tiene $A^{**} = \bar{A}$;

vii) Si A^{-1} existe y $\mathcal{D}(A^{-1})$ es denso en H, entonces

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Demostración. (i), (ii), (iv) and (v) son inmediatos.

(iii). Como $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$ por definición, se tiene que

$$\mathcal{V}G(\overline{A}) = \mathcal{V}\overline{G(A)} = \overline{\mathcal{V}G(A)}.$$

Por tanto,

$$(\mathcal{V}G(A))^{\perp} = (\mathcal{V}G(\overline{A}))^{\perp} \Rightarrow (\overline{A})^* = A^*.$$

(vi) Supongamos que A es cerrado. Entonces $G(A) = \overline{G(A)}$ y por tanto $\overline{\mathcal{V}G(A)} = \mathcal{V}G(A)$.

Como $\mathcal{V}G(A)$ es entonces un subespacio de $H + H$, se tiene

$$H + H = \mathcal{V}G(A) + (\mathcal{V}G(A))^{\perp} = \mathcal{V}G(A) + G(A^*).$$

Aplicando el operador $\mathcal{V}$ a esta suma directa y teniendo en cuenta que $-G(A) = G(A)$, se tiene:

(3.1) $$H + H = G(A) + \mathcal{V}G(A^*).$$

Por tanto $G(A) = (\mathcal{V}G(A^*))^{\perp}$ y, al ser $G(A)$ subespacio de $H + H$, existe el operador lineal A^{**} y se tiene $A = A^{**}$.

Si A no es cerrado pero tiene clausura $\overline{A}$ se tiene, por lo ya demostrado, $(\overline{A})^{**} = \overline{A}$. De (iii) se sigue que

$$(\overline{A})^{**} = ((\overline{A})^*)^* = (A^*)^* = A^{**},$$

es decir, $\overline{A} = A^{**}$.

(vii) Si A es uno a uno, existe A^{-1}. Sea $g \in \mathcal{D}((A^{-1})^*)$. Para todo $f \in \mathcal{D}(A)$,

$$(f, g) = (A^{-1}Af, g) = (Af, (A^{-1})^*g),$$

luego $(A^{-1})^*g \in \mathcal{D}(A^*)$ y

$$g = A^*((A^{-1})^*g). \tag{3.2}$$

Sea $h \in \mathcal{D}(A^*)$. Para todo $f \in \mathcal{D}(A^{-1})$, se tiene

$$(f, h) = (AA^{-1}f, h) = (A^{-1}f, A^*h).$$

Por tanto, $A^*h \in \mathcal{D}((A^{-1})^*)$ y

$$h = (A^{-1})^*(A^*h). \tag{3.3}$$

(3.2) y (3.3) implican $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.//

Definición 3.9.—Se dice que un operador lineal A es simétrico si su dominio $\mathcal{D}(A)$ es denso en H y para todo par f, g en $\mathcal{D}(A)$ se tiene

$$(Af, g) = (f, Ag).$$

Se dice que un operador simétrico es positivo si para todo $f \in \mathcal{D}(A)$,

$$(Af, f) \geqq 0,$$

y autoadjunto si $A = A^*$.

Teorema 3.10.—Un operador simétrico A tal que $\mathcal{R}(A) = H$, donde $\mathcal{R}(A) = AH$ es el rango de A, es autoadjunto.

Demostración. Si A es simétrico, $A \subset A^*$. Basta pues probar que $A^* \subset A$, es decir, que $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$.

Sea $f \in \mathcal{D}(A^*)$ y $g = A^*f$. Por hipótesis existe $h \in \mathcal{D}(A)$ tal que $Ah = g$. Por tanto, para todo $u \in \mathcal{D}(A)$, se tiene

$$(Au, f) = (u, A^*f) = (u, g) = (u, Ah) = (Au, h),$$

la última igualdad por ser A simétrico. Como Au recorre H se tiene que $f = h$, es decir, $f \in \mathcal{D}(A)$, y A es autoadjunto.//

Teorema 3.11.—Si A es un operador lineal cerrado con dominio denso en H, el producto A^*A es autoadjunto.

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{D}(A^*A)$. Entonces, $f, g \in \mathcal{D}(A)$; $Af, Ag \in \mathcal{D}(A^*)$ y

$$(A^*(Af), g) = (Af, Ag) = (f, A^*(Ag)).$$

Si se demuestra que $\mathcal{D}(A^*A)$ es denso en H, el operador A^*A es por tanto simétrico. En efecto, sea $h \in H$ arbitrario. Por ser A cerrado y (3.1) existen f_o, g_o tales que

$$\{h, 0\} = \{f_o, Af_o\} + \{-A^*g_o, g_o\}.$$

Por tanto,

$$h = f_o - A^*g_o \quad y \quad 0 = Af_o + g_o,$$

lo que implica $Af_o \in \mathcal{D}(A^*)$, y $h = (I + A^*A)f_o$; es decir, $\mathcal{R}(I + A^*A) = H$.

Sea $h_o \perp \mathcal{D}(A^*A)$. Entonces,

$$0 = (h_o, g) = ((I + A^*A)f_o, g) = (f_o, (I + A^*A)g),$$

para todo $g \in \mathcal{D}(A^*A)$. Como g es arbitrario se sigue que $f_o = 0$ y por tanto $h_o = 0$. Así, $\mathcal{D}(A^*A)$ y $\mathcal{D}(I + A^*A)$ son densos en H. Por el teorema 3.10, se tiene que $I + A^*A$ es autoadjunto.

De aquí se concluye fácilmente que A^*A es autoadjunto.//

Teorema 3.12. (Teorema del Gráfico Cerrado de Banach).—Si X e Y son espacios de Banach y A es una aplicación lineal cerrada de $\mathcal{D}(A) = X$ en Y, entonces existen constantes K y $r > 0$ tales que $\|x\| \leq r$ implica $\|Ax\| \leq K$.

Demostración. Sea

$$U_\alpha = \{x \mid \|Ax\| < \alpha \quad , \quad \alpha > 0\}.$$

Entonces $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ y, por el teorema 1.13, existe un abierto

$$B(x_o, t_o) = \{x \mid \|x - x_o\| < t_o\}$$

contenido en $\overline{U}_k$, k entero positivo fijo.

Se demuestra fácilmente que no hay pérdida de generalidad en suponer que $x_o \in U_k$. En este caso, si se define

$$S_t = \{x \mid \|x\| < t\},$$

para todo $t > 0$, se tiene

$$S_{t_o} \subset \overline{\{z - x_o \mid z \in U_k\}}$$

y

$$\{z - x_o \mid z \in U_k\} \subset U_{2k}.$$

En efecto, $x \in S_{t_o}$ implica $x \in \overline{U_k - x_o}$, y $z \in U_k$ implica

$$\|A(z - x_o)\| \leq \|Az\| + \|Ax_o\| < 2k.$$

Por tanto, $S_{t_o} \subset \overline{U}_{2k}$.

Como $x \in U_m$ si y sólo si $x/m \in U_1$, para $r = t_o/(2k)$ se tiene

$$S_r = \{x \mid \|x\| < r\} \subset \overline{U}_1,$$

por lo que, para todo $\alpha > 0$, $S_{\alpha r} \subset \overline{U}_\alpha$.

Vamos a demostrar que $S_r \subset U_{(1-\delta)^{-1}}$, con $0 < \delta < 1$.

Sea $x \in S_r$. Como $S_{\delta r}$ es un entorno de 0, $x + S_{\delta r}$ es entorno de x. Por tanto existe

$$x_1 \in (x + S_{\delta r}) \cap S_r \cap U_1,$$

es decir,

$$x_1 - x \in S_{\delta r} \quad , \quad x_1 \in S_r \cap U_1.$$

Como $S_{\delta^2 r}$ es un entorno de 0, $x - x_1 + S_{\delta^2 r}$ es entorno de $x - x_1$. También lo es de este punto el abierto $S_{\delta r}$ por lo que existe

$$x_2 \in [(x - x_1) + S_{\delta^2 r}] \cap S_{\delta r} \cap U_\delta$$

es decir,

$$x_2 + x_1 - x \in S_{\delta^2 r} \quad , \quad x_2 \in S_{\delta r} \cap U_\delta .$$

Así, para todo entero positivo n existe x_{n+1} tal que

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k - x \in S_{\delta^{n+1} r} \quad , \quad x_{n+1} \in S_{\delta^n r} \cap U_{\delta^n},$$

y por tanto

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} x_k - x \right\| < \delta^{n+1} r \quad , \quad \| A x_{n+1} \| < \delta^n.$$

Entonces,

$$\left\| A \sum_{k=m}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m}^{n} \| A x_k \| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \| A x_k \| \leq \frac{\delta^{m-1}}{1 - \delta}$$

que tiende a 0 para m tendiendo a ∞. La sucesión

$$(A \sum_{k=1}^{n} x_k)$$

es pues de Cauchy en Y por lo que, al ser Y completo, existe

$$z = \lim_n A \sum_{k=1}^{} x_k.$$

También

$$x = \lim_n \sum_{k=1}^{} x_k$$

lo que implica, por ser A cerrado, $Ax = z$ y además

$$\| z \| \leq \sum_{k=1}^{} \| Ax_k \| \leq (1 - \delta)^{-1}.//$$

Teorema 3.13.—Un operador simétrico definido en H es acotado y autoadjunto.

Demostración. A es simétrico si y sólo si $A \subset A^*$. Por tanto, si A es simétrico y $\mathcal{D}(A) = H$, se tiene que A es autoadjunto y, en consecuencia, cerrado. Del teorema 3.12 se sigue entonces que A es acotado.//

En el Capítulo 4 se estudiará con detalle un operador simétrico, no autoadjunto, y se determinarán sus extensiones autoadjuntas.

§ 2. TEORIA ESPECTRAL

La teoría espectral estudia la distribución de los valores $\lambda \in \mathbf{C}$ para los cuales $A - \lambda I$, siendo A un operador lineal en un espacio de Hilbert H, tiene inverso y las propiedades de dicho inverso cuando éste existe. Para simplificar la notación se denotará por $\mathcal{R}_\lambda(A)$ el rango del operador $A - \lambda I$.

Definición 3.14.—Sea A un operador lineal, no necesariamente acotado, en un espacio de Hilbert H. Se dice que $\lambda \in \mathbf{C}$ está en el conjunto resolvente $\rho(A)$ de A si $A - \lambda I$ tiene inverso continuo en $\mathcal{R}_\lambda(A)$ y además $\overline{\mathcal{R}_\lambda(A)} = H$, es decir, si para todo $x \in \mathcal{R}_\lambda(A)$, denso en H, existe un único $y \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$(A - \lambda I)y = x$$

y

$$\|y\| \leq M_\lambda \|x\|,$$

M_λ constante.

El complementario de $\rho(A)$, denotado por $\sigma(A)$, se llama espectro del operador A. Se distinguen en él tres subconjuntos disjuntos, cuya unión es $\rho(A)$,

i) espectro puntual de A:

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid A - \lambda I \text{ no es uno a uno}\}.$$

Todo $\lambda \in \sigma_p(A)$ se llama valor propio de A y si $x \neq 0$ pertenece al subespacio

$$N_\lambda(A) = \{x \in H \mid (A - \lambda I)x = 0\},$$

se dice que x es un vector propio de A asociado al valor propio λ. La dimensión de $N_\lambda(A)$ se llama multiplicidad del valor propio λ.

ii) espectro continuo de A:

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid A - \lambda I \text{ es uno a uno}, \overline{\mathcal{R}_\lambda(A)} = H, (A - \lambda I)^{-1} \text{ discontinuo}\}.$$

iii) espectro residual de A:

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid A - \lambda I \text{ es uno a uno}, \overline{\mathcal{R}_\lambda(A)} \neq H\}.$$

Teorema 3.15.—Sea A un operador lineal cerrado en un espacio de Hilbert H. Si $\lambda \in \rho(A)$ el operador $(A - \lambda I)^{-1}$ es lineal y continuo con dominio $\mathcal{R}_\lambda(A) = H$.

Demostración. Por definición, el operador $(A - \lambda I)^{-1}$ existe y es continuo en $\mathcal{R}_\lambda(A)$. Además $\overline{\mathcal{R}_\lambda(A)} = H$. Queda por demostrar que $\mathcal{R}_\lambda(A) = H$. Si $x \in H$, existe una sucesión $(x_n) \subset \mathcal{R}_\lambda(A)$ con límite x. Como es de Cauchy y $(A - \lambda I)^{-1}$ es continuo, la sucesión $((A - \lambda I)^{-1}x_n)$ es también de Cauchy. Si se pone

$$y = \lim_n (A - \lambda I)^{-1}x_n,$$

al ser $(A - \lambda I)^{-1}$ cerrado, por serlo A, se tiene que $x \in \mathcal{R}_\lambda(A)$ e $y = (A - \lambda I)^{-1}x$. Por tanto $\mathcal{R}_\lambda(A) = H$, y, por el teorema 3.12, $(A - \lambda I)^{-1}$ es continuo en H.//

Corolario 3.16.—Sea A un operador autoadjunto, o lineal y acotado, en H. Entonces,
i) $\lambda \in \rho(A)$ si y sólo si $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$;
ii)

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid A - \lambda I \text{ es uno a uno, } \overline{\mathcal{R}_\lambda(A)} = H,\ (A - \lambda I)^{-1} \text{ discontinuo en } \mathcal{R}_\lambda(A)\}.$$

Demostración. En ambos casos A es cerrado. i) se sigue del teorema 3.14, e ii) de la definición de $\sigma_c(A)$ y la parte i).//

Teorema 3.17.—Sea A un operador lineal en H. Entonces $\lambda \in \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$ si y sólo si $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$. Si A es autoadjunto, $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Demostración. La primera parte del teorema se deduce inmediatamente de la igualdad,

$$\mathcal{R}_\lambda(A)^\perp = N_{\bar{\lambda}}(A^*).$$

La segunda es consecuencia de la primera y de ser $\sigma_r(A)$ y $\sigma_p(A)$ disjuntos.//

Corolario 3.18.—λ es un valor propio del operador autoadjunto A si y sólo si $\overline{\mathcal{R}_\lambda(A)} \neq H$.

Demostración. Si $\lambda \in \sigma_p(A)$ es claro que $\overline{\mathcal{R}_\lambda(A)} \neq H$. Recíprocamente, si $\overline{\mathcal{R}_\lambda(A)} \neq H$, entonces $\lambda \notin \sigma_c(A)$ y, por el teorema 3.17, $\lambda \notin \sigma_p(A)$, pues los valores propios de un operador autoadjunto son reales.//

Teorema 3.19.—Si A es autoadjunto, $\lambda \in \rho(A)$ si y sólo si $\mathcal{R}_\lambda(A) = H$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de los teoremas 3.15 y 3.12.//

Teorema 3.20.—Si A es un operador autoadjunto, $\sigma(A)$ está contenido en el intervalo real $[\alpha, \beta]$, donde

$$\alpha = \inf\{(Ax, x) \mid \|x\| = 1\}; \; \beta = \sup\{(Ax, x) \mid \|x\| = 1\}.$$

Demostración. Si $\|x\| = 1$ y $\lambda \notin [\alpha, \beta]$, se tiene

$$\|(A - \lambda I)x\| \geqq |((A - \lambda I)x, x)| = |(Ax, x) - \lambda| \geqq \delta,$$

donde δ es la distancia de λ al intervalo $[\alpha, \beta]$. Por tanto $\mathcal{R}_\lambda(A)$ es cerrado y $A - \lambda I$ uno a uno. Además,

$$\mathcal{R}_\lambda(A)^\perp = N((A - \lambda I)^*) = N(A - \bar{\lambda} I) = \{0\},$$

ya que $\bar{\lambda} \notin [\alpha, \beta]$. Así, $\mathcal{R}_\lambda(A) = H$ y, por el teorema 3.19, $\lambda \in \rho(A)$.//

Teorema 3.21.—El espectro de un operador autoadjunto A es cerrado.

Demostración. Basta demostrar que $\rho(A)$ es abierto. Sea $\lambda_0 \in \rho(A)$. Existe $k > 0$ tal que

$$\|(A - \lambda_0 I)x\| \geqq k\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Sea $0 < \delta \leqq k/2$. Entonces, para todo $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, se tiene

$$\|(A-\lambda I)x\| \geqq \|(A-\lambda_0 I)x\| - \delta\|x\| \geqq \frac{k}{2}\|x\|, \; x \in \mathcal{D}(A).$$

Así, $\overline{\mathcal{R}_\lambda(A)} = H$ y $(A-\lambda I)^{-1}$ es continuo, es decir, $\lambda \in \rho(A)$.//

Definición 3.22.—Se llama resolvente al operador

$$R(\lambda; A) = (A-\lambda I)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(A).$$

Teorema 3.23.—Si λ y μ pertenecen a $\rho(A)$ y A es cerrado se tiene,

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\lambda-\mu)\, R(\lambda; A)\, R(\mu; A).$$

Demostración. Se tiene,

$$R(\lambda; A) = R(\lambda; A)\,(A-\mu I)\,R(\mu; A) =$$

$$= R(\lambda; A)\,[(\lambda-\mu)I + (A-\lambda I)]\,R(\mu; A) =$$

$$= (\lambda-\mu)\,R(\lambda; A)\,R(\mu; A) + R(\mu; A).//$$

§ 3. EXTENSION DE OPERADORES SIMETRICOS

Definición 3.24.—Sea A un operador simétrico y λ un número complejo con $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. El operador

$$V = (A-\lambda I)(A-\bar{\lambda} I)^{-1}$$

se llama transformada de Cayley del operador A.

El operador V está bien definido pues $(A-\bar{\lambda} I)^{-1}$ existe. En efecto, si $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, se tiene,

$$\|(A-\bar{\lambda} I)x\|^2 \geqq \beta^2\|x\|^2,$$

es decir, $A - \bar{\lambda}I$ es uno a uno.

Teorema 3.25.—i) La transformada de Cayley de un operador simétrico A es un operador isométrico V con dominio $\mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(A)$ y rango $\mathcal{R}_{\lambda}(A)$; ii) El conjunto

$$\{Vz - z \mid z \in \mathcal{D}(V)\}$$

es denso en H; iii) Si un operador isométrico V satisface ii) existe un operador simétrico tal que V es su transformada de Cayley.

Demostración. i) Es claro que $\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(A)$, $\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}_{\lambda}(A)$. Si $z \in \mathcal{D}(V)$, existe $x \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$\begin{aligned} z &= (A - \bar{\lambda}I)x \\ Vz &= (A - \lambda I)x. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Entonces,

$$\|Vz\|^2 = \|(A - \lambda I)x\|^2 = (Ax, Ax) - \bar{\lambda}(Ax, x) - \lambda(x, Ax) + |\lambda|^2 (x, x),$$

y

$$\|z\|^2 = \|(A - \bar{\lambda}I)x\|^2 = (Ax, Ax) - \bar{\lambda}(x, Ax) - \lambda(Ax, x) + |\lambda|^2 (x, x).$$

Como A es simétrico, $\|Vz\| = \|z\|, \qquad \forall z \in \mathcal{D}(V)$.

ii) De (3.4) se sigue que $Vz - z = (\bar{\lambda} - \lambda)x$. Por tanto,

$$\{Vz - z \mid z \in \mathcal{D}(V)\} = \mathcal{D}(A)$$

que es denso en H.

iii) Sea V un operador isométrico satisfaciendo ii). Entonces 1 no es un valor propio de V y por tanto existe el operador $(I - V)^{-1}$. Si se define

$$A = (\lambda I - \bar{\lambda}V)(I - V)^{-1},$$

este operador es simétrico. En efecto, si $z_1, z_2 \in \mathcal{D}(A)$, entonces

$$x_1 = (I - V)^{-1} z_1 \qquad y \qquad x_2 = (I - V)^{-1} z_2$$

pertenecen a $\mathcal{D}(V)$ y se tiene

$$\begin{aligned} (Az_1, z_2) &= ((\lambda I - \bar{\lambda} V)x_1, (I - V)x_2) = \\ &= (\lambda + \bar{\lambda})(x_1, x_2) - \bar{\lambda}(Vx_1, x_2) - \lambda(x_1, Vx_2) = \\ &= ((I - V)x_1, (\lambda I - \bar{\lambda} V)x_2) = (z_1, Az_2). \end{aligned}$$

Además,

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(I - V), \tag{3.5}$$

que por ii) es denso en H.

Es fácil comprobar ahora que la transformada de Cayley del operador A es precisamente V.//.

Teorema 3.26.—Sean A_1 y A_2 operadores simétricos y V_1, V_2 sus respectivas transformadas de Cayley. Entonces el operador A_2 es una extensión de A_1 si y sólo si el operador V_2 es una extensión de V_1.

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema anterior.//

Teorema 3.27.—Un operador simétrico A es cerrado si y sólo si su transformada de Cayley V es un operador cerrado. Este es el caso si y sólo si $\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}_{\bar{\lambda}}(A)$ y $\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}_{\lambda}(A)$ son cerrados.

Demostración. Supongamos A cerrado. Hay que probar que $u_n \rightarrow u$, $Vu_n \rightarrow v$ implica $u \in \mathcal{D}(V)$ y $Vu = v$.

Pongamos $x_n = u_n - Vu_n$. Entonces $x_n \in \mathcal{D}(A)$, y

$$\lim_n x_n = x = u - v.$$

También, por (3.4),

$$(\lambda - \bar{\lambda})u_n = (A - \bar{\lambda}I)x_n$$
$$(\lambda - \bar{\lambda})Vu_n = (A - \lambda I)x_n,$$

y como los operadores del segundo miembro son cerrados,

$$(\lambda - \bar{\lambda})u = (A - \bar{\lambda}I)\,(u - v)$$
$$(\lambda - \bar{\lambda})v = (A - \lambda I)\,(u - v)$$

es decir, $u \in \mathcal{D}(V)$ y

$$Vu = (A - \lambda I)\,(A - \bar{\lambda}I)^{-1}u = (\lambda - \bar{\lambda})^{-1}\,(A - \lambda I)\,(u - v) = v.$$

El recíproco y la segunda parte de la demostración se prueban de modo análogo.//

Sean M_1 y M_2 variedades lineales en un espacio de Hilbert H y P_1, P_2 los operadores de proyección sobre $\overline{M_1}$ y $\overline{M_2}$, respectivamente.

Definición 3.28.—Se llama apertura de las variedades lineales M_1 y M_2 en H, a la norma de la diferencia de P_1 y P_2, y se representa por $a(M_1, M_2)$.

Teorema 3.29.—Si M_1 y M_2 son variedades lineales en H, se tiene $a(M_1, M_2) \leq 1$. Si M_1 contiene un vector no nulo ortogonal a M_2, entonces $a(M_1, M_2) = 1$.

Demostración. Para todo $x \in H$ los vectores $P_2(I - P_1)x$ e $(I - P_2)P_1x$ son ortogonales. Por tanto,

$$\| (P_2 - P_1)x \|^2 = \| P_2(I - P_1)x \|^2 + \| (I - P_2)P_1x \|^2 \leq \tag{3.6}$$
$$\leq \| (I - P_1)x \|^2 + \| P_1x \|^2 = \| x \|^2,$$

es decir,

$$\| P_2 - P_1 \| \leq 1.$$

La segunda parte es inmediata.//

Teorema 3.30.—Si la apertura de dos variedades lineales M_1 y M_2 es menor que 1, ambas tienen la misma dimensión.

Demostración. Supongamos que $\dim M_2 > \dim M_1$. Si $G = P_2\overline{M}_1$, se tiene $\dim G \leq \dim \overline{M}_1$. Por tanto,

$$\dim G < \dim \overline{M}_2,$$

luego $\overline{M}_2$ contiene un vector no nulo x, ortogonal a G. Como el subespacio de $\overline{M}_1$ ortogonal a G es ortogonal a $\overline{M}_2$, se tiene que x es ortogonal a $\overline{M}_1$ y, por tanto, a M_1. Por el teorema 3.29 esto implica $a(M_1, M_2) = 1$, contradicción.//

Teorema 3.31.

$$a(M_1, M_2) = \max \{ \sup_{\substack{x \in \overline{M}_2 \\ \|x\|=1}} \|(I - P_1)x\| \ , \ \sup_{\substack{x \in \overline{M}_1 \\ \|x\|=1}} \|(I - P_2)x\| \}.$$

Demostración. Pongamos

$$c_i = \sup_{x \in \overline{M}_{3-i}} \{ \|(I - P_i)x\| \mid \|x\| = 1 \}, \ i = 1, 2.$$

Por definición de apertura y (3.6) se tiene que

$$a(M_1, M_2) = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \|(P_2 - P_1)x\| =$$

$$= \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} (\|P_2(I - P_1)x\|^2 + \|(I - P_2)P_1x\|^2)^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{x \in \overline{M}_1 \\ \|x\|=1}} (\|P_2(I - P_1)x\|^2 + \|(I - P_2)P_1x\|^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sup_{x \in \overline{M}_1} \{ \| (I - P_2)x \| \mid \| x \| = 1 \} = c_2,$$

y, análogamente, $a(M_1, M_2) \geqq c_1$. Por tanto,

$$a(M_1, M_2) \geqq \max\{c_1, c_2\}. \tag{3.7}$$

Por definición de c_i se tiene

$$\| (I - P_2)P_1x \| \leqq c_2 \| P_1x \|, \tag{3.8}$$

$$\| (I - P_1)P_2x \| \leqq c_1 \| P_2x \|, \qquad \forall x \in H. \tag{3.9}$$

Al ser P_i , $i = 1, 2$, un operador de proyección, se tiene que

$$\| P_2(I - P_1)y \|^2 = (P_2(I - P_1)y, P_2(I - P_1)y) =$$

$$= ((I-P_1)P_2(I-P_1)y, (I-P_1)y) \leqq \| (I-P_1)P_2(I-P_1)y \| \quad \| (I-P_1)y \| \leqq$$

$$\leqq c_1 \| P_2(I - P_1)y \| \quad \| (I - P_1)y \|,$$

la última desigualdad por (3.9) con $x = (I - P_1)y$.
Por tanto,

$$\| P_2(I - P_1)y \| \leqq c_1 \| (I - P_1)y \|.$$

Esta desigualdad y (3.8) da

$$\| (P_2 - P_1)y \|^2 = \| P_2(I - P_1)y \|^2 + \| (I - P_2)P_1y \|^2 \leqq$$

$$\leqq c_1^2 \| (I - P_1)y \|^2 + c_2^2 \| P_1y \|^2 \leqq$$

$$\leqq \max\{c_1^2, c_2^2\} [\| (I - P_1)y \|^2 + \| P_1y \|^2] = \| y \|^2 \max\{c_1^2, c_2^2\},$$

es decir,

$$a(M_1, M_2) \leqq \max\{c_1, c_2\}.$$

Esta desigualdad y (3.7) prueban el teorema.//

Definición 3.32.—Un número complejo λ se dice que es un punto de tipo regular de un operador T si existe una constante positiva k tal que

$$\|(T-\lambda I)x\| \geqq k\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

El conjunto de todos los puntos de tipo regular de un operador T se llama campo de regularidad de T.

Es claro que λ es un punto de tipo regular de T si y sólo si $(T-\lambda I)^{-1}$ existe y es acotado en $\mathcal{R}_\lambda(T)$.

Teorema 3.33.—El campo de regularidad de un operador lineal es abierto en $\mathbf{C}$.

Demostración. Sea λ_0 un punto de tipo regular del operador lineal T. Existe entonces $k_0 > 0$ tal que

$$\|(T-\lambda_0 I)x\| \geqq k_0\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Sea $\lambda \in \mathbf{C}$ tal que $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{2} k_0$. Entonces,

$$\|(T-\lambda I)x\| \geqq \|(T-\lambda_0 I)x\| - |\lambda-\lambda_0| \ \|x\| \geqq$$

$$\geqq \frac{k_0}{2}\|x\| \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T) //$$

Teorema 3.34.—Los semiplanos $\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ y $\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}\lambda < 0\}$ son subconjuntos conexos del campo de regularidad de todo operador lineal simétrico.

Demostración. Si $\lambda = a + bi$, $b \neq 0$, se tiene,

$$\|(A-\lambda I)x\|^2 = ((A-\lambda I)x, (A-\lambda I)x) = \|(A-a)x\|^2 + |b|^2 \ \|x\|^2 \geqq$$

$$\geqq |b|^2 \ \|x\|^2, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A).//$$

Teorema 3.35.—Si γ es un subconjunto conexo del campo de regularidad de un operador lineal T, todos los subespacios

$$\mathcal{N}_{\lambda}(T) = \mathcal{R}_{\lambda}(T)^{\perp}$$

tienen la misma dimensión.

Demostración. Sea P_{λ} el operador de proyección sobre $\mathcal{N}_{\lambda}(T)$. Por el teorema 3.30 basta con probar que

$$\| P_{\lambda} - P_{\mu} \| < 1,$$

para todo par λ, μ en γ.

Sea $\lambda_0 \in \gamma$ y $k_0 > 0$ tal que

$$\| (T - \lambda_0 I)x \| \geq k_0 \| x \|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Existe entonces $\varepsilon > 0$ tal que $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ implica

$$\| P_{\lambda} - P_{\lambda_0} \| < 1.$$

En efecto, tomando $\varepsilon = k_0/3$, se tiene,

$$k_0 \|x\| \leq \|(T - \lambda_0 I)x\| \leq \|(T - \lambda I)x\| + |\lambda - \lambda_0| \; \|x\| \leq$$

$$\leq \|(T - \lambda I)x\| + \frac{k_0}{3} \|x\|, \quad \text{para} \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon,$$

y por tanto,

$$\frac{2}{3} k_0 \|x\| \leq \|(T - \lambda I)x\|, \qquad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon.$$

Si M es una variedad lineal en H y $x \in H$, se comprueba fácilmente que

$$\| P_{\bar{M}} x \| = \sup_{0 \neq y \in M} \frac{|(x, y)|}{\| y \|}.$$

En particular, si $z \in \mathcal{N}_\lambda$, $\| z \| = 1$, se tiene

$$\| (I - P_{\lambda_0})z \| = \sup_{0 \neq x \in \mathcal{D}(T)} \frac{|(z, (T - \lambda I)x + (\lambda - \lambda_0)x)|}{\| (T - \lambda_0 I)x \|} =$$

$$= \sup_{0 \neq x \in \mathcal{D}(T)} \frac{|\lambda - \lambda_0| \, |(z, x)|}{\| (T - \lambda_0 I)x \|} \leq \frac{1}{2},$$

y análogamente

$$\| (I - P_\lambda)z \| \leq \frac{1}{2}$$

para $z \in \mathcal{N}_{\lambda_0}$ $\| z \| = 1$.

Del teorema 3.31 se tiene que $a(\mathcal{N}_\lambda, \mathcal{N}_{\lambda_0}) < 1$, para todo $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, y el resultado para λ y μ arbitrarios en γ se sigue del teorema de Heine-Borel y de ser γ conexo.//

Definición 3.36.—Se llaman índices de deficiencia de un operador simétrico A los números m y n definidos por

$$m = \dim \mathcal{N}_i(A) \quad ; \quad n = \dim \mathcal{N}_{-i}(A) \quad , \quad i = \sqrt{-1}\,.$$

Teorema 3.37.—Si un operador simétrico A tiene un punto real de tipo regular, sus índices de deficiencia son iguales.

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema 3.35 y del hecho de que los semiplanos $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $\operatorname{Im} \lambda < 0$ son subconjuntos conexos del campo de regularidad de un operador simétrico.//

Definición 3.38.—Se dice que las variedades lineales $M_1, \ldots, M_n$ en un espacio de Hilbert H son linealmente independientes si

$$x_1 + \ldots + x_n = 0 \quad , \quad x_j \in M_j \quad , \quad 1 \leq j \leq n,$$

implica $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

La variedad lineal generada por los elementos de $M_1, \ldots, M_n$ se denota por $M_1 + \ldots + M_n$ y se llama suma directa de $M_1, \ldots, M_n$. Todo elemento x en la suma directa puede escribirse de modo único en la forma

$$x = x_1 + \ldots + x_n \ , \qquad \text{con} \qquad x_j \in M_j \ , \quad 1 \leq j \leq n.$$

Teorema 3.39.—Si A es un operador simétrico cerrado, las variedades lineales $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{N}_{\bar\lambda}(A)$ y $\mathcal{N}_{\lambda}(A)$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, son linealmente independientes y se tiene

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) + \mathcal{N}_{\bar\lambda}(A) + \mathcal{N}_{\lambda}(A).$$

Demostración. Supongamos que

$$x + y + z = 0, \ x \in \mathcal{D}(A), \ y \in \mathcal{N}_{\bar\lambda}(A), \ z \in \mathcal{N}_{\lambda}(A).$$

De la igualdad

$$\mathcal{N}_{\lambda}(A) = \mathcal{R}_{\lambda}(A)^{\perp} = \mathcal{N}_{\bar\lambda}(A^*),$$

y la análoga para $\bar\lambda$, se tiene que

$$0 = (A^* - \lambda I)(x + y + z) = (A - \lambda I)x + (A^* - \lambda I)z =$$

$$= (A - \lambda I)x + (\bar\lambda - \lambda)z$$

y por tanto

$$z \in \mathcal{R}_{\lambda}(A) \cap \mathcal{N}_{\lambda} = \{0\},$$

por ser ortogonales ambos subespacios. También $x = 0$ porque $\lambda \notin \sigma_p(A)$, luego $y = 0$.

Finalmente, es claro que

$$\mathcal{D}(A) + \mathcal{N}_{\bar\lambda}(A) + \mathcal{N}_{\lambda}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$$

pues cada uno de los sumandos está contenido en $\mathcal{D}(A^*)$.

Por otra parte, como A es cerrado, $\mathcal{R}_{\bar\lambda}(A)$ es cerrado y se tiene

$$H = \mathcal{R}_{\bar\lambda}(A) + \mathcal{N}_{\bar\lambda}.$$

Si $z \in \mathcal{D}(A^*)$, existen por tanto $x \in \mathcal{R}_{\bar\lambda}(A)$ e $y \in \mathcal{N}_{\bar\lambda}$ tales que

$$(A^* - \bar\lambda I)\,z = x + y.$$

Sea $u \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$x = (A - \bar\lambda I)\,u$$

y pongamos $v = (\lambda - \bar\lambda)^{-1}y$. Se tiene

$$(A^* - \bar\lambda I)z = (A - \bar\lambda I)u + (\lambda - \bar\lambda)v = (A^* - \bar\lambda I)(u + v),$$

luego

$$(A^* - \bar\lambda I)(z - u - v) = 0.$$

Así $z - u - v = w \in \mathcal{N}_\lambda$ y por tanto,

$$z = u + v + w \in \mathcal{D}(A) + \mathcal{N}_{\bar\lambda}(A) + \mathcal{N}_\lambda(A).//$$

Corolario 3.40.—Un operador simétrico A es autoadjunto si y sólo si sus índices de deficiencia son $(0,0)$.

Demostración. Por el teorema anterior, $m = n = 0$ si y sólo si $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$.//

Teorema 3.41.—Toda extensión cerrada, simétrica A' de un operador cerrado, simétrico A define un operador isométrico U cuyo dominio P y rango Q son subespacios de $\mathcal{N}_{-i}(A)$ y $\mathcal{N}_i(A)$, respectivamente.

Recíprocamente, si U es un operador isométrico con dominio $P \subset \mathcal{N}_{-i}(A)$ y rango $Q \subset \mathcal{N}_i(A)$, las expresiones

$$\mathcal{D}(A') = \{x + z - Uz \mid x \in \mathcal{D}(A), z \in P\}$$

y

$$A'(x + z - Uz) = Ax + iz + iUz$$

definen una extensión cerrada simétrica A' de A. Además,

$$\mathcal{N}_{-i}(A) = P + \mathcal{N}_{-i}(A'), \quad \mathcal{N}_i(A) = Q + \mathcal{N}_i(A').$$

Demostración. Sean A y A' operadores cerrados simétricos y V, V' sus respectivas transformadas de Cayley con $\lambda = i$. Entonces $A \subset A'$ implica $V \subset V'$, es decir, $\mathcal{D}(V) \subset \mathcal{D}(V')$ y $\mathcal{R}(V) \subset \mathcal{R}(V')$. Si se definen P y Q como

$$\mathcal{D}(V') = \mathcal{D}(V) + P$$

$$\mathcal{R}(V') = \mathcal{R}(V) + Q,$$

entonces $P \subset \mathcal{N}_{-i}(A)$ y $Q \subset \mathcal{N}_i(A)$. Es claro que el operador U definido por

$$Ux = V'x, \qquad \text{para todo} \quad x \in P,$$

es isométrico y su rango es Q.

Recíprocamente, sea U un operador isométrico con dominio $P \subset \mathcal{N}_{-i}(A)$ y rango $Q \subset \mathcal{N}_i(A)$, P y Q subespacios de H. El operador V' con dominio

$$\mathcal{D}(V') = \mathcal{D}(V) + P$$

definido por

$$V'(y + z) = Vy + Uz, \; y \in \mathcal{D}(V), \; z \in P,$$

es claramente cerrado, isométrico y extensión de V. El operador A' cuya transformada de Cayley es V' es por tanto cerrado, simétrico y $A \subset A'$.

Por el teorema 3.25,

$$\mathcal{D}(A') = \{v - V'v \mid v \in \mathcal{D}(V')\} =$$

$$= \{y + z - V'(y + z) \mid y \in \mathcal{D}(V), z \in P\} =$$

$$= \{x + z - Uz \mid x \in \mathcal{D}(A), z \in P\},$$

donde $x = y - Vy$.

Como A' es la restricción de A^* a $\mathcal{D}(A')$, por el teorema 3.39 se tiene que

$$A'z = iz, \quad y \quad A'Uz = -iUz, \quad z \in P,$$

y por tanto,

$$A'(x + z - Uz) = Ax + iz + iUz.$$

La última parte del teorema es inmediata.//

Teorema 3.42.—Un operador cerrado, simétrico A tiene una extensión autoadjunta si y sólo si sus índices de deficiencia (m, n) son iguales.

Demostración. Si $m = n$, $\dim \mathcal{N}_{-i}(A) = \dim \mathcal{N}_i(A)$. Se puede por tanto definir un operador isométrico U tal que $\mathcal{D}(U) = \mathcal{N}_{-i}(A)$ y $\mathcal{R}(U) = \mathcal{N}_i(A)$. Si A' es la extensión de A dada por el teorema 3.41, se tiene que

$$\mathcal{N}_{-i}(A') = \mathcal{N}_i(A') = \{0\}.$$

Así A' tiene índices de deficiencia $(0,0)$ y, por el corolario 3.40, es autoadjunto. El recíproco es inmediato.//

Corolario 3.43.—Un operador cerrado simétrico con un punto real de tipo regular, tiene extensiones autoadjuntas.

Demostración. Inmediata.//

CAPÍTULO 4

EXTENSIONES AUTOADJUNTAS DE OPERADORES DIFERENCIALES MATRICIALES

Denotaremos por M_n el conjunto de todas las matrices $n \times n$ con elementos complejos.

Definición 4.1.—A cada matriz $A = (a_{ij})$ en M_n, se le asigna otra $A^* = (a^*_{ij})$, llamada adjunta de A, como sigue:

$$a^*_{ij} = \overline{a}_{ji} \quad , \qquad 1 \leq i, j \leq n,$$

donde $\overline{a}_{ij}$ denota el complejo conjugado de a_{ij}.

Teorema 4.2.—El funcional $\pi : M_n \to \mathbf{C}$, definido por

$$\pi(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

para cada matriz $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, tiene las propiedades siguientes:

(i) π es lineal, es decir,

$$\pi(\lambda A + \mu B) = \lambda\pi(A) + \mu\pi(B),$$

(ii) $\pi(A^*B) = \overline{\pi(B^*A)}$,

(iii) $\pi(A^*A) \geqq 0$, $\pi(A^*A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

para todo par $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, $A, B \in M_n$.

Demostración. Inmediata.//

Definición 4.3.—Sea (a, b) un intervalo abierto o cerrado. Una función $F(t)$ de (a, b) en M_n se dice que es continua, derivable, medible Lebesgue, de cuadrado integrable, etc., si cada una de las funciones $(F(t))_{ij}$, $t \in (a, b)$, $1 \leqq i\ j \leqq n$, es continua, derivable, medible Lebesgue, de cuadrado integrable, etc., respectivamente, en (a, b).

Se denotará por $L^2(a, b; M_n)$ el conjunto de todas las funciones $F : (a, b) \rightarrow M_n$ de cuadrado integrable.

Teorema 4.4.—El conjunto $L^2(a, b; M_n)$ adquiere estructura de espacio lineal sobre $\mathbf{C}$ si se definen la suma y producto por escalares en la forma usual,

$$((F + G)(t))_{ij} = (F(t))_{ij} + (G(t))_{ij},$$

$$((\lambda F)(t))_{ij} = \lambda(F(t))_{ij},\ \lambda \in \mathbf{C},\ F, G \in L^2(a, b; M_n),$$

$1 \leqq i, j \leqq n$. Además, la función

$$(F, G) = \int_a^b \pi(G^*(t)F(t))dt$$

es un producto escalar y el espacio $H = L^2(a, b; M_n)$ es completo con la norma asociada. H es por tanto un espacio de Hilbert.

Demostración. Se sigue inmediatamente del teorema 4.2.//

Para poder definir operadores diferenciales matriciales en H, se necesita el siguiente teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales matriciales ordinarias.

Teorema 4.5.—Sean $P_o, P_1, \ldots, P_m$, F funciones matriciales n x n en (a, b) tales que $P_o^{-1}, P_1, \ldots, P_m$, F son medibles Lebesgue, localmente integrables en (a, b), y sean C_k, $0 \leq k \leq 2m-1$, matrices constantes arbitrarias. Entonces la ecuación diferencial

$$\ell(Y) - \lambda Y = F, \tag{4.1}$$

donde λ es un número complejo y $\ell(Y)$ está definido por

$$\ell(Y) = \sum_{j=0} (-1)^s \{P_{m-s}(t) Y^{(s)}(t)\}^{(s)}, \tag{4.2}$$

donde el superíndice (s) denota s derivaciones con respecto a t, e Y es una función matricial n x n de t en (a, b), tiene una solución única en este intervalo que satisface las condiciones iniciales

$$Y^{\{k\}}(t_o) = C_k$$

para todo $0 \leq k \leq 2m-1$, $t_o \in (a, b)$. Las cuasi-derivadas $Y^{\{k\}}$ se definen formalmente como sigue:

$$Y^{\{0\}} = Y,$$

$$Y^{\{k\}} = \frac{d^k Y}{dt^k}, \quad k = 1, \ldots, m-1,$$

$$Y^{\{m\}} = P_o \frac{d^m Y}{dt^m},$$

$$Y^{\{m+k\}} = P_k \frac{d^{m-k} Y}{dt^{m-k}} - \frac{d Y^{\{m+k-1\}}}{dt}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Definición 4.6.—Sean Y_k, $0 \leq k \leq 2m-1$, las soluciones de la ecuación diferencial matricial

$$\ell(Y) - \lambda Y = 0, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \tag{4.3}$$

que satisfacen las condiciones iniciales en t_0, $t_0 \in (a, b)$, dadas por

$$Y_k^{(j)}(t_0) = I\delta_{jk}, \quad 0 \leq j \leq 2m-1, \tag{4.4}$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$ y δ_{jk} la delta de Kronecker, es decir, $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

El conjunto $Y_0, \ldots, Y_{2m-1}$ de estas soluciones de (4.3) se llama el sistema fundamental en t_0 de la ecuación diferencial (4.3).

El siguiente teorema se sigue inmediatamente de la linearidad de (4.3) y la definición anterior.

Teorema 4.7.—La solución general $Y(t)$ de (4.3) puede escribirse en la forma

$$Y(t) = Y_0(t)C_0 + \ldots + Y_{2m-1}(t)C_{2m-1},$$

donde $Y_0, \ldots, Y_{2m-1}$ es el sistema fundamental en t_0 de (4.3) y $C_0, \ldots, C_{2m-1}$ son matrices $n \times n$ constantes.

Definición 4.8.—Sean E_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, matrices $n \times n$ con elementos

$$(E_{ij})_{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}, \quad 1 \leq p, q \leq n. \tag{4.5}$$

Si $Y_k(t)$, $0 \leq k \leq 2m-1$, es el sistema fundamental en t_0 de (4.3), se pone

$$Z_{kij}(t) = Y_k(t)E_{ij}. \tag{4.6}$$

Teorema 4.9.—El conjunto de todas las soluciones de (4.3) es una variedad lineal de dimensión $2mn^2$ sobre $\mathbf{C}$, y el conjunto Z_{kij}, $1 \leq i, j \leq n$, $0 \leq k \leq 2m-1$, es una de sus bases.

Demostración. Si $C_k = (c_{k,ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, para todo $k = 0, \ldots, 2m-1$, entonces del teorema 4.7 y la definición 4.8 se sigue que si $Y(t)$ es una solución de (4.3),

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{2m-1} Y_k(t) C_k = \sum_{k=0}^{2m-1} \sum_{i,j=1}^{n} Y_k(t) E_{ij} c_{k,ij} =$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ 0 \leq k \leq 2m-1}} Z_{kij} c_{k,ij},$$

y la representación es claramente única.//

En lo sucesivo $[a, b]$ representará un intervalo finito y los coeficientes $P_0, \ldots, P_m$, además de satisfacer las condiciones dadas en el teorema 4.4, se les supondrá también hermitianos, con P_0 positivo, en $[a, b]$.

Definición 4.10.—Denotaremos por T el operador lineal en $H =$ $= L^2(a, b; M_n)$ definido por

(4.7) $$TY = \ell(Y) = Y^{\{2m\}},$$

cuyo dominio $\mathcal{D}(T)$ es el conjunto de todas las funciones Y en H para las cuales $\ell(Y)$ está definido y pertenece a H, es decir, $\mathcal{D}(T)$ es el conjunto de todos los Y en H tales que $Y^{\{k\}}$, $k = 0, \ldots, 2m-1$, es absolutamente continuo y $Y^{\{2m\}}$ pertenece a H. Denotaremos por L la restricción de T al conjunto

(4.8) $$\{Y \in \mathcal{D}(T) \mid Y^{\{k\}}(a) = Y^{\{k\}}(b) = 0,\ 0 \leq k \leq 2m-1\}.$$

Teorema 4.11. (Identidad de Lagrange).—Sean Y y Z dos funciones matriciales $n \times n$ en $\mathcal{D}(T)$. Entonces se tiene

$$Z^* \ell(Y) - \ell(Z)^* Y = \frac{d}{dt}[Y, Z], \tag{4.9}$$

donde

$$[Y, Z] = \sum_{k=1}^{m} \{Z^{\{2m-k\}*}Y^{\{k-1\}} - Z^{\{k-1\}*}Y^{\{2m-k\}}\}. \tag{4.10}$$

Demostración. De la definición de cuasi-derivadas, se tiene,

$$\frac{dY^{\{2m-k\}}}{dt} = P_{m-k+1}Y^{\{k-1\}} - Y^{\{2m-k+1\}}, \; k = 1, \ldots, m,$$

$$\frac{dY^{\{k-1\}}}{dt} = Y^{\{k\}}, \qquad k = 1, \ldots, m-1,$$

$$\frac{dY^{\{m-1\}}}{dt} = P_{\circ}^{-1} Y^{\{m\}}.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}[Y, Z] = \sum_{k=1} \{(Z^{\{k-1\}*}P_{m-k+1} - Z^{\{2m-k+1\}*})Y^{\{k-1\}} -$$

$$- Z^{\{k-1\}*}(P_{m-k+1}Y^{\{k-1\}} - Y^{\{2m-k+1\}}))\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \{Z^{\{2m-k\}*}Y^{\{k\}} - Z^{\{k\}*}Y^{\{2m-k\}}\} +$$

$$+ Z^{\{m\}*}P_{\circ}^{-1}Y^{\{m\}} - Z^{\{m\}*}P_{\circ}^{-1}Y^{\{m\}} =$$

$$= Z^{\{0\}*}Y^{\{2m\}} - Z^{\{2m\}*}Y^{\{0\}} = Z^* \ell(Y) - \ell(Z)^*Y,$$

ya que $\ell(Y) = Y^{\{2m\}}$.

El siguiente corolario se puede considerar como la forma integral de la identidad de Lagrange.

Corolario 4.12.—Sean Y y Z funciones en $\mathcal{D}(T)$. Entonces,

$$(4.11) \qquad (TY, Z) - (Y, TZ) = \pi[Y, Z]_a^b$$

donde se define

$$[Y, Z]_a^b = [Y, Z](b) - [Y, Z](a).$$

Demostración. Se deduce inmediatamente de las definiciones de π y del producto escalar en H, y de (4.9).//

Los dos teoremas siguientes son necesarios para establecer una importante relación entre los operadores L y T.

Teorema 4.13.—Sea $F \in H$. La ecuación

$$(4.12) \qquad \ell(Y) - \lambda Y = F, \qquad \lambda \in \mathbf{C},$$

tiene una solución $Y(t)$ en $\mathcal{D}(L)$ si y sólo si F es ortogonal al subespacio $\mathcal{N}_\lambda$ de soluciones de la ecuación homogénea $\ell(Y) - \lambda Y = 0$.

Demostración. Sea $Y(t)$ la solución de (4.12) definida por las condiciones iniciales

$$(4.13) \qquad Y^{\{k\}}(a) = 0, \ k = 0, \ldots, 2m-1.$$

Sea $Y_0, \ldots, Y_{2m-1}$ el sistema fundamental en b de $\ell(Y) - \lambda Y = 0$. Por el teorema 4.9 se tiene que Z_{kij}, $1 \leq i, j \leq n$, $0 \leq k \leq 2m-1$, es una base de $\mathcal{N}_\lambda$. Por tanto, $F \in \mathcal{N}_\lambda^{\perp}$ si y sólo si $(F, Z_{kij}) = 0$ para todos los posibles valores de los subíndices.

La identidad de Lagrange (4.11) aplicada a Y y a Z_{kij} da

$$(F, Z_{kij}) = (TY, Z_{kij}) = (Y, TZ_{kij}) + \pi[Y, Z_{kij}]_a^b = \pi[Y, Z_{kij}](b),$$

para todo $1 \leqq i, j \leqq n$, $0 \leqq k \leqq 2m-1$, teniendo en cuenta que $TZ_{kij} = 0$ y (4.13).

Por (4.10),

$$\pi[Y, Z_{kij}](b) = \pi \sum_{s=1}^{m} \{Z_{kij}^{\{2m-s\}*}(b) Y^{\{s-1\}}(b) - Z_{kij}^{\{s-1\}*}(b) Y^{\{2m-s\}}(b)\} =$$

$$= \pi \sum_{s=1}^{m} \{\delta_{k,2m-s} E_{ji} Y^{\{s-1\}}(b) - \delta_{k,s-1} E_{ji} Y^{\{2m-s\}}(b)\} =$$

$$= \begin{cases} \pi \sum_{s=1}^{m} -\delta_{k,s-1} E_{ji} Y^{\{2m-s\}}(b) = -\pi(E_{ji} Y^{\{2m-k-1\}}(b)), & 0 \leqq k \leqq m-1, \\ \pi \sum_{s=1}^{m} \delta_{k,2m-s} E_{ji} Y^{\{s-1\}}(b) = (E_{ji} Y^{\{2m-k-1\}}(b)), & m \leqq k \leqq 2m-1. \end{cases}$$

Denotando por $(Y^{\{2m-k-1\}}(b))_{pq}$ el elemento en la fila p y columna q de la matriz $Y^{\{2m-k-1\}}(b)$, se tiene

$$\pi[Y, Z_{kij}](b) = \begin{cases} -(Y^{\{2m-k-1\}}(b))_{ij} & \text{para} \quad 0 \leqq k \leqq m-1, \\ (Y^{\{2m-k-1\}}(b))_{ij} & \text{para} \quad m \leqq k \leqq 2m-1, \end{cases}$$

ya que $(E_{ji}(a_{pq})) = a_{ij}$, $1 \leq p, q \leq n$.

Por tanto,

$$(F, Z_{kij}) = -(Y^{(2m-k-1)}(b))_{ij} \quad , \quad 0 \leq k \leq m-1,$$

(4.14) $$(F, Z_{kij}) = (Y^{(2m-k-1)}(b))_{ij} \quad , \quad m \leq k \leq 2m-1,$$

lo que demuestra el teorema.//

El teorema 4.13 puede también enunciarse simbólicamente en la forma

(4.15) $$H = \mathcal{R}_\lambda(L) + \mathcal{N}_\lambda$$

Teorema 4.14.—Si $A_0, \ldots, A_{2m-1}$ y $B_0, \ldots, B_{2m-1}$, son matrices constantes arbitrarias, existe una función $Y \in \mathcal{D}(T)$ satisfaciendo las condiciones de contorno

(4.16) $$Y^{(k)}(a) = A_k, \qquad Y^{(k)}(b) = B_k,$$

para todo $k = 0, \ldots, 2m-1$.

Demostración. Sea Z_{kij} como en (4.6) y sea F una función en $\mathcal{N}_\lambda$ satisfaciendo

(4.17) $$(F, Z_{kij}) = \begin{cases} -(B_{2m-k-1})_{ij} & , \quad 0 \leq k \leq m-1, \\ (B_{2m-k-1})_{ij} & , \quad m \leq k \leq 2m-1. \end{cases}$$

Esta función existe y puede obtenerse como sigue: Pongamos

$$F = \sum_{r,p,s} \alpha_{rps} Z_{rps}.$$

Entonces, para cada k, i, j,

$$(F, Z_{kij}) = \sum_{r,p,s} \alpha_{rps}(Z_{rps}, Z_{kij})$$

y el sistema lineal

$$\sum_{r,p,s} \alpha_{rps}(Z_{rps}, Z_{kij}) = \begin{cases} -(B_{2m-k-1})_{ij} & , \quad 0 \leqq k \leqq m-1, \\ \\ (B_{2m-k-1})_{ij} & , \quad m \leqq k \leqq 2m-1, \end{cases}$$

para todo $1 \leqq i, j \leqq n$, tiene solución única, puesto que el determinante de los coeficientes es el determinante de Gram de la base $\{Z_{kij}\}$.

Sea V la solución de (4.12) que satisface las condiciones iniciales

$$V^{\{k\}}(a) = 0, \quad k = 0, \ldots, 2m-1. \tag{4.18}$$

Entonces, de (4.12), (4.14), (4.17) y (4.18) se tiene que

$$V^{\{k\}}(b) = B_k, \quad k = 0, \ldots, 2m-1. \tag{4.19}$$

Del mismo modo, hay una solución U de (4.12) tal que

$$U^{\{k\}}(a) = A_k, \quad U^{\{k\}}(b) = 0, \quad k = 0, \ldots, 2m-1. \tag{4.20}$$

Entonces, (4.18), (4.19) y (4.20) implican que la función $Y = U + V$ pertenece a $\mathcal{D}(T)$ y satisface (4.16).//

Teorema 4.15.—(i) El dominio $\mathcal{D}(L)$ es denso en H; (ii) $L^* = T$; (iii) $L = L^{**}$, es decir, L es cerrado.

Demostración. (i) Sea $G \in \mathcal{D}(L)^\perp$, es decir $(G, Y) = 0$ para todo $Y \in \mathcal{D}(L)$, y sea Z una solución de $\ell(Z) = G$. Entonces, por la identidad de Lagrange, y recordando que L es la restricción de T a $\mathcal{D}(L)$ y que $\pi[Y, Z]_a^b = 0$, se tiene que

$$(TZ, Y) - (Z, LY) = \pi[Z, Y]_a^b = 0$$

y por tanto

$$(Z, LY) = (TZ, Y) = (G, Y) = 0.$$

Así $Z \in \mathcal{R}_\lambda(L)^\perp$ y, por (4.15), $Z \in \mathcal{N}_\lambda$. Pero entonces $LZ = 0$ y, por consiguiente, $G = 0$.

(ii) Es claro que $T \subset L^*$. En efecto, si $Y \in \mathcal{D}(T)$, por la identidad de Lagrange se tiene

$$(TY, Z) - (Y, LZ) = \pi[Y, Z]_a^b = 0$$

para todo $Z \in \mathcal{D}(L)$.

Para probar que $L^* \subset T$, sea $Y \in \mathcal{D}(L^*)$ y $G = L^*Y$. Por definición, se tiene

$$(G, Z) = (L^*Y, Z) = (Y, LZ) \tag{4.21}$$

para todo $Z \in \mathcal{D}(L)$. Sea U una solución particular de $\ell(Y) = G$, es decir, $TU = G$. Entonces,

$$(G, Z) = (TU, Z) = (U, LZ) = 0, \qquad \forall Z \in \mathcal{D}(L), \tag{4.22}$$

pues $\pi[U, Z]_a^b = 0$, y de (4.21) y (4.22) se sigue que $(Y - U, LZ) = 0$.

Así, $Y - U \in \mathcal{R}_\lambda(L)^\perp = \mathcal{N}_\lambda \subset \mathcal{D}(T)$ y como también $U \in \mathcal{D}(T)$ se tiene que $Y \in \mathcal{D}(T)$ y por tanto

$$L^*Y = G = TU = TY,$$

es decir, $L^* \subset T$.

(iii) Al ser L simétrico, se tiene en general

$$L \subset L^{**} \subset L^*. \tag{4.23}$$

Queda pues por demostrar que $L^{**} \subset L$ o, por (ii), que $T^* \subset L$. Sea $Y \in \mathcal{D}(T^*)$. Entonces, para todo $Z \in \mathcal{D}(T)$,

$$(T^*Y, Z) = (Y, TZ).$$

De (ii) y (4.23) se tiene que

$$T^* = L^{**} \subset L^* = T.$$

Por tanto $Y \in \mathcal{D}(L^*)$, $L^*Y = TY$ y

$$(L^*Y, Z) = (TY, Z) = (Y, TZ),$$

para todo $Z \in \mathcal{D}(T)$. La identidad de Lagrange implica así que

$$\pi[Y, Z]_a^b = 0, \qquad \forall Z \in \mathcal{D}(T).$$

Por el teorema 4.14 se sigue que $Y^{(k)}(a) = Y^{(k)}(b) = 0$, para todo $k = 0, \ldots, 2m - 1$, y en consecuencia $Y \in \mathcal{D}(L)$ y

$$L^{**}Y = T^*Y = TY = LY.//$$

Teorema 4.16.—Los índices de deficiencia del operador L son $(2mn^2, 2mn^2)$.

Demostración. El primer índice de deficiencia de L es el número de vectores linealmente independientes de H tales que

$$(L^* - iI)Z = 0,$$

es decir, el número de soluciones linealmente independientes de

$$\ell(Z) - iZ = 0.$$

Del teorema 4.9 se deduce que este número es $2mn^2$. Análogamente se prueba que el segundo índice de deficiencia es $2mn^2$.//

Para obtener las extensiones autoadjuntas del operador diferencial matricial simétrico L, haremos uso de la siguiente caracterización general.

Teorema 4.17.—Sea L un operador lineal simétrico en un espacio de Hilbert H. Una extensión L' de L es autoadjunta si y sólo si es simétrica y toda función Z en $\mathcal{D}(L^*)$ que satisface

$$(LY, Z) = (Y, L^*Z), \tag{4.24}$$

para todo $Y \in \mathcal{D}(L')$, pertenece a $\mathcal{D}(L')$.

Demostración. Si L' es autoadjunto, entonces es simétrico y la condición (4.24) es evidentemente satisfecha. Recíprocamente, sea L' una extensión simétrica de L que satisface (4.24). Entonces,

$$L \subset L' \subset L'^* \subset L^*.$$

Queda por demostrar que $\mathcal{D}(L'^*) \subset \mathcal{D}(L')$. Sea $Z \in \mathcal{D}(L'^*)$. Entonces $Z \in \mathcal{D}(L^*)$ y así, para todo $Y \in \mathcal{D}(L')$,

$$(L'Y, Z) = (Y, L'^*Z) = (Y, L^*Z).$$

Por tanto, por (4.24) se tiene que $Z \in \mathcal{D}(L')$, y por consiguiente $\mathcal{D}(L'^*) \subset \mathcal{D}(L')$.//

Por medio de la identidad de Lagrange el teorema anterior puede aplicarse a operadores diferenciales matriciales simétricos en la forma siguiente:

Teorema 4.18.—Una extensión L' de un operador diferencial matricial simétrico L es autoadjunta si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(i) Para todo Y, Z en $\mathcal{D}(L')$,

$$\pi[Y, Z]_a^b = 0; \tag{4.25}$$

(ii) Toda función Z en $\mathcal{D}(L^*)$ que satisface

$$\pi[Y, Z]_a^b = 0 \tag{4.26}$$

para todo $Y \in \mathcal{D}(L')$, pertenece a $\mathcal{D}(L')$.

Demostración. L' es simétrico si y sólo si se cumple (i). También (4.24) equivale a (4.26).//

El siguiente teorema caracteriza las extensiones autoadjuntas del operador diferencial matricial simétrico L.

Teorema 4.19.—Una extensión L′ de un operador diferencial matricial simétrico L en H es autoadjunta si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:

(i) Existen matrices $n \times n$ constantes A_{ik}, $A_{i,2m-k-1}$, B_{ik}, $B_{i,2m-k-1}$, $1 \leqq i \leqq 2mn^2$, $0 \leqq k \leqq 2m-1$, satisfaciendo

$$\pi \sum_{k=0}^{m-1} (A_{j,2m-k-1}A^*_{ik} - A_{jk}A^*_{i,2m-k-1}) =$$

(4.27)

$$= \pi \sum_{k=0}^{m-1} (B_{j,2m-k-1}B^*_{ik} - B_{jk}B^*_{i,2m-k-1}),$$

para todo $1 \leqq i, j \leqq 2mn^2$.

(ii) Las condiciones de contorno

$$\pi \sum_{k=0}^{m-1} (A_{ik}Y^{(k)}(a) + B_{ik}Y^{(k)}(b)) = 0 \tag{4.28}$$

para $1 \leqq i \leqq 2mn^2$ son linealmente independientes en $\mathcal{D}(L^*)$, es decir, la ecuación

$$\sum_{i=1}^{2mn^2} \mu_i \pi \sum_{k=0}^{2m-1} (A_{ik}Y^{(k)}(a) + B_{ik}Y^{(k)}(b)) = 0$$

para todo $Y \in \mathcal{D}(L^*)$ implica $\mu_1 = \ldots = \mu_{2mn^2} = 0$.

(iii)

(4.29) $$\mathcal{D}(L') = \{Y \in \mathcal{D}(L^*) : \pi \sum_{k=0}^{2m-1} (A_{ik} Y^{(k)}(a) + B_{ik} Y^{(k)}(b)) = 0,\ 1 \leq i \leq 2mn^2\}.$$

Demostración. Supongamos que L' es autoadjunto. Existen entonces funciones matriciales $W_1, \ldots, W_{2mn^2}$ en $\mathcal{D}(L')$ tales que todo elemento Y' en $\mathcal{D}(L')$ puede escribirse de manera única como

$$Y' = Y + \sum_{j=1}^{2mn^2} \alpha_j W_j,$$

donde $Y \in \mathcal{D}(L)$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2mn^2}$ son números complejos.

La condición (4.25) implica que

(4.30) $$\pi[W_i, W_j]_a^b = 0,$$

para todo $1 \leq i, j \leq 2mn^2$, y la condición (4.26) que para todo $Y' \in \mathcal{D}(L')$,

(4.31) $$\pi[Y', W_j]_a^b = 0,$$

para todo $1 \leq j \leq 2mn^2$.

Pongamos

(4.32) $$\begin{aligned} A_{ik} &= W_i^{(2m-k-1)*}(a) \\ A_{i,2m-k-1} &= -W_i^{(k)*}(a) \\ B_{ik} &= -W_i^{(2m-k-1)*}(b) \\ B_{i,2m-k-1} &= W_i^{(k)*}(b) \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq 2mn^2$ y $0 \leq k \leq m-1$.

Utilizando (4.10) y (4.32), la condición (4.30) se puede escribir

$$\pi \sum_{k=0}^{m-1} (W_j^{\{2m-k-1\}*}(b)W_i^{\{k\}}(b) - W_j^{\{k\}*}(b)W_i^{\{2m-k-1\}}(b)) =$$

$$= \pi \sum_{k=0}^{m-1} (W_j^{\{2m-k-1\}*}(a)W_i^{\{k\}}(a) - W_j^{\{k\}*}(a)W_i^{\{2m-k-1\}}(a)),$$

y por tanto,

$$\pi \sum_{k=0}^{m-1} (A_{j,2m-k-1}A^*_{ik} - A_{jk}A^*_{i,2m-k-1}) =$$

$$= \pi \sum_{k=0}^{m-1} (B_{j,2m-k-1}B^*_{ik} - B_{jk}B^*_{i,2m-k-1}),$$

para todo $1 \leq i, j \leq 2mn^2$.

Supongamos que las condiciones de contorno (4.28) no son linealmente independientes con respecto a $\mathcal{D}(L^*)$. Existen entonces números $\mu_1, \ldots, \mu_{2mn^2}$, no todos cero, tales que

$$\sum_{i=1}^{2mn^2} \mu_i \pi \sum_{k=0}^{2m-1} (A_{ik}Y^{\{k\}}(a) + B_{ik}Y^{\{k\}}(b)) = 0,$$

para todo $Y \in \mathcal{D}(L^*)$.

Teniendo en cuenta (4.32) se obtiene

$$\pi[Y, \sum_{i=1}^{2mn^2} \mu_i W_i]_a^b = 0,$$

para todo $Y \in \mathcal{D}(L^*)$, y utilizando el mismo argumento que en la demostración del teorema 4.15, parte (iii), se sigue que

$$\sum_{i=1}^{2mn^2} \mu_i W_i \in \mathcal{D}(L).$$

Se tiene por tanto una contradicción puesto que, por hipótesis, los W_i, $1 \leq i \leq 2mn^2$, son linealmente independientes respecto a $\mathcal{D}(L)$. Las condiciones de contorno (4.28) son por tanto linealmente independientes en $\mathcal{D}(L^*)$.

Para probar (iii) observemos que

$$\mathcal{D}(L') \subset \{ Y \in \mathcal{D}(L^*) \mid \pi \sum_{k=0}^{2m-1} (A_{ik} Y^{(k)}(a) + B_{ik} Y^{(k)}(b)) = 0,\ 1 \leq i \leq 2mn^2 \} =$$

$$= \{ Y \in \mathcal{D}(L^*) \mid \pi[Y, W_i]_a^b = 0,\ 1 \leq i \leq 2mn^2 \} = S,$$

pues por ser L' simétrico se tiene que

$$0 = (L'Y, W_i) - (Y, L'W_i) = \pi[Y, W_i]_a^b$$

para todo $i = 1, \ldots, 2mn^2$.

Por otra parte, sea $Y \in \mathcal{D}(L^*)$ tal que $\pi[Y, W_i]_a^b = 0$. Para todo $Z \in \mathcal{D}(L)$ se tiene también $\pi[Y, Z]_a^b = 0$. Por tanto, puesto que todo elemento $Y' \in \mathcal{D}(L')$ puede escribirse como

$$Y' = Z + \sum_{i=1}^{2mn^2} \mu_i W_i,$$

se deduce que

$$\pi[Y, Y']_a^b = \pi[Y, Z + \sum_{i=1}^{2mn^2} \alpha_i W_i]_a^b =$$

$$= \pi[Y, Z]^b + \sum_{i=1}^{2mn^2} \pi[Y, \alpha_i W_i]_a^b = 0,$$

para todo $Y' \in \mathcal{D}(L')$.

Del teorema 4.18, (ii), se sigue que $Y \in \mathcal{D}(L')$, y por tanto $S \subset \mathcal{D}(L')$.

Recíprocamente, sea L' una extensión de L que satisface (i), (ii) y (iii). Por el teorema 4.14 existen funciones $W_1, \ldots, W_{2mn^2}$ en $\mathcal{D}(L^*)$ definidas por la ecuación (4.32). De (ii) se sigue que son linealmente independientes respecto a $\mathcal{D}(L)$. En efecto, si hubieran números $\mu_1, \ldots, \mu_{2mn^2}$, no todos cero, tales que

$$\sum_{i=1}^{2mn^2} \mu_i W_i \in \mathcal{D}(L),$$

entonces, para todo $Y \in \mathcal{D}(L^*)$,

$$\pi[Y, \sum_{i=1}^{2mn^2} \mu_i W_i]_a^b = 0$$

y por consiguiente

$$\sum_{i=1}^{2mn^2} \bar{\mu}_i \, \pi[Y, W_i]_a^b = 0.$$

Teniendo en cuenta (4.32) esta ecuación puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^{2mn^2} \bar{\mu}_i \pi \sum_{k=0}^{2m-1} (A_{ik} Y^{(k)}(a) + B_{ik} Y^{(k)}(b)) = 0.$$

Por la independencia lineal en $\mathcal{D}(L^*)$, esta contradicción prueba que $W_1, \ldots, W_{2mn^2}$ son linealmente independientes respecto a $\mathcal{D}(L)$.

De (4.27) y (iii) se sigue que W_i, $1 \leqq i \leqq 2mn^2$, pertenece a $\mathcal{D}(L')$ y, evidentemente, también se tiene que $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}(L')$. Así,

$$\{Y \in \mathcal{D}(L^*) \mid Y = Z + \sum_{i=1}^{2mn^2} \mu_i W_i, Z \in \mathcal{D}(L)\} \subset \mathcal{D}(L')$$

y como ambos conjuntos tienen la misma dimensión, coinciden, es decir,

$$\mathcal{D}(L') = \{Y \in \mathcal{D}(L^*) \mid Y = Z + \sum_{i=1}^{2mn^2} \mu_i W_i,\ Z \in \mathcal{D}(L)\}.$$

Pero en este caso las condiciones (i), (ii) del teorema 4.18 se satisfacen y por consiguiente L' es autoadjunto.//

BIBLIOGRAFIA

1. AKHIEZER, N. I., y GLAZMAN, I. M., *Theory of Linear Operators in Hilbert Space,* vols. I, II, Ungar, N. Y., 1961.
2. DUNFORD, N., y SCHWARTZ, J. T., *Linear Operators,* Parts I, II, Interscience Publishers, N. Y., 1964.
3. NAIMARK, M. A., *Linear Differential Operators,* vol. II, Ungar, N. Y., 1968.
4. ROYDEN, H. L., *Real Analysis,* Macmillan, N. Y., 1968.
5. YOSIDA, K., *Functional Analysis,* Springer-Verlag, N. Y., 1968.