Métodos estocásticos para problemas de Dirichlet

POR
RAMON ARDANUY ALBAJAR y
M.ª DEL MAR SOLDEVILLA MORENO

RESUMEN

Formulamos un principio débil de máximo, para operadores diferenciales de tipo elíptico, con condiciones algo más generales que otras utilizadas en la práctica. Este principio lo utilizamos para probar la unicidad de la solución de un problema de Dirichlet.

Tras demostrar algunos resultados sobre matrices definidas no negativas, así como sobre la continuidad de Lipschitz de sus raíces cuadradas, vemos cómo se puede expresar la solución de ciertos problemas de contorno, del tipo de Dirichlet, por medio de funcionales de la solución de una ecuación diferencial estocástica del tipo de Itô.

Utilizando estos resultados exponemos un método para resolver los anteriores problemas de contorno por medio de técnicas de simulación estadística. Al final del trabajo se dan dos ejemplos numéricos, que son ecuaciones de Laplace y Poisson sobre el círculo unidad, en los que se aplican tales métodos.

1. INTRODUCCION

Son célebres los trabajos de Kac de 1949 y 1951 en los que obtiene una representación estocástica de la solución de la ecuación del calor en una dimensión. Inmediatamente Rosenblatt (1951) generalizó sus resultados y los desarrolló en espacios multidimensionales. A partir de entonces se han desarrollado diversos trabajos tratando de buscar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales satisfechas por funcionales de difusiones, y otros que han estudiado el problema de expresar la solución de problemas de contorno elípticos o parabólicos por medio de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas. Entre los trabajos más notables podemos citar los efectuados por Dynkin (1965), Bonami y otros (1971), Stroock y Varadhan (1972), Karoui y Reinhard (1973), Kuo (1973), Fleming y Rishel (1975) y Kushner (1976) principalmente. Muchos de los problemas que se plantean, así como sus formas de resolverlos, se encuentran recopilados en los dos volúmenes de Friedman y también en el reciente libro de Kushner de 1977.

En este trabajo vamos a considerar operadores diferenciales parciales de la forma:

$$Lu(x) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}[u_{xx}(x)a(x)] + u_x(x)b(x) + u(x)c(x) \qquad (1)$$

con coeficientes reales definidos en un dominio abierto G, r-dimensional, de manera que L sea de tipo elíptico, esto es, a(x) es una matriz simétrica rxr definida positiva para todo $x \varepsilon G$.

En el apartado 2 discutiremos el principio débil de máximo para estos operadores y daremos los teoremas de existencia y unicidad para los problemas de Dirichlet formulados con estos operadores.

En el apartado 3 se tratará fundamentalmente de expresar la solución de un problema de Dirichtlet por medio de un funcional de un proceso de Itô construido a partir de los datos del problema.

Finalmente, en el apartado 4, se sugiere un método para resolver problemas de Dirichlet por simulación estadística. Este método lo aplicamos en dos ejemplos, el primero de ellos es una ecuación de Laplace en el círculo unidad y el segundo de ellos es una ecuación de Poisson en el mismo círculo.

A continuación vamos a dar un lema que utilizaremos en el siguiente apartado.

Lema 1

Sean A y B dos matrices hermíticas del mismo orden y definidas no negativas, entonces:

(i) AB tiene todos los valores propios reales y no negativos.

(ii) $\mathrm{Tr}[AB] \geq 0$.

En particular, el resultado es cierto para A y B reales, simétricas y definidas no negativas.

Demostración

(i) Si λ es un valor propio de AB y x un vector propio unitario, entonces:

$$0 \leqslant (Bx)^{+}A(Bx) = x^{+}BABx = \lambda x^{+}Bx \tag{2}$$

donde Z^{+} representa el traspuesto y conjugado de la matriz o vector Z. En (2) vemos que si $x^{+}Bx$ es positivo será $\lambda \geqq 0$ y si $x^{+}Bx$ es nulo entonces vamos a probar que λ también es nulo; en efecto, si suponemos $\lambda \neq 0$ entonces es fácil ver que el vector:

$$y = -x + \frac{1 + x^{+}Ax}{2\lambda} Bx \tag{3}$$

verifica que $y^{+}Ay = -1$ lo cual contradice la no negatividad de A.

(ii) Si AB es de orden r su polinomio característico será de la forma:

$$P_r(\lambda) = \det(AB - \lambda I) = (-1)^r\lambda^r + (-1)^{r-1}\, Tr(AB)\lambda^{r-1} + Q_{r-2}(\lambda) \tag{4}$$

donde $Q_{r-2}(\lambda)$ es un polinomio en λ de grado $r-2$ a lo sumo. Como los valores propios de AB son las raíces de su polinomio característico, si éstas son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, repetidas o no, obtendremos:

$$P_r(\lambda) = (-1)^r(\lambda-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_r) = (-1)^r\lambda^r - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_r)\lambda^{r-1} + R_{r-2}(\lambda) \tag{5}$$

donde $R_{r-2}(\lambda)$ es un polinomio en λ de grado $r-2$ a lo sumo. Comparando (5) con (4) y en virtud del apartado anterior concluimos que $Tr[AB] \geqq 0$.

2. PRINCIPIO DEBIL DE MAXIMO PARA OPERADORES ELIPTICOS

En este apartado vamos a formular un principio de máximo para operadores elípticos generales.

Proposición 1 (Friedman, 1975)

Si a(x) es definida no negativa para cada $x \in G$, con G abierto, $c(x) \leqslant 0$, $u \in C^{(2)}(G)$ y u alcanza un máximo no negativo en un punto $x^{o} \in G$, entonces es $Lu(x^{o}) \leqslant 0$.

Demostración

Como u alcanza un máximo no negativo en x^o tendremos $u(x^o) \geqslant 0$, $u_x(x^o) = 0$ y $u_{xx}(x^o)$ definida no positiva, por lo que teniendo en cuenta el lema 1 deducimos que:

$$Lu(x^o) \leqslant \frac{1}{2} Tr[u_{xx}(x^o)a(x^o)] = -\frac{1}{2} Tr[-u_{xx}(x^o)a(x^o)] \leqslant 0$$

Teorema 1: Principio Débil de Máximo (Soldevilla, 1979)

Sea a(x) una matriz simétrica definida no negativa para todo $x \in G$, con G abierto y acotado, supongamos $c(x) \leqslant 0$, que existe un vector no nulo, y tal que:

$$\frac{1}{2} y^T a(x) y + y^T b(x) > 0 \qquad (6)$$

para todo $x \varepsilon G$, que $u \varepsilon C^{(2)}(G) \cap C^{(o)}(\overline{G})$, $Lu \geqslant 0$ en G y que el máximo de u sobre $\overline{G}$ es positivo, entonces dicho máximo se alcanza en la frontera de G.

Demostración

Supongamos que el máximo no se alcanza en la frontera de G que denotaremos por ∂G, entonces existirá un punto $\overline{x} \varepsilon G$ tal que:

$$u(\overline{x}) > \max_{x \varepsilon \partial G} \overset{o}{\bar{}}\, u(x) \qquad (7)$$

Como G está acotado podremos tomar $k > 0$ de forma que $|x| < k$ para todo $x \varepsilon \overline{G}$, con lo cual la función:

$$h(x) = e^{k|y|} - e^{y^T x} \qquad (8)$$

es positiva en $\overline{G}$ y teniendo en cuenta que $c \leqslant 0$ y la condición (6) obtenemos:

$$Lh(x) = -e^{y^T x} \left\{ \frac{1}{2} y^T a y + y^T b \right\} + hc < 0 \qquad (9)$$

Construyamos la función $v = u - \varepsilon h$ donde:

$$\varepsilon = \overset{\circ}{\text{mín}} \left\{ \frac{u(\bar{x})}{h(\bar{x})} , \frac{u(\bar{x}) - \underset{x\varepsilon\partial G}{\overset{\circ}{\text{máx}}} u(x)}{2h(\bar{x})} \right\} \tag{10}$$

es claro que $v\varepsilon C^{(2)}(G)$ y además:

$$\begin{aligned} v(\bar{x}) &= \frac{1}{2} \left\{ u(\bar{x}) + \underset{x\varepsilon\partial G}{\overset{\circ}{\text{máx}}} u(x) \right\} > \underset{x\varepsilon\partial G}{\overset{\circ}{\text{máx}}} u(x) \geqslant \\ &\geqslant \underset{x\varepsilon\partial G}{\overset{\circ}{\text{máx}}} \left\{ u(x) - \varepsilon h(x) \right\} = \underset{x\varepsilon\partial G}{\overset{\circ}{\text{máx}}} v(x) \end{aligned} \tag{11}$$

pero tal como está definido ε resulta que $v(\bar{x}) \geqslant 0$, por lo que, teniendo en cuenta (11), $v(x)$ alcanza un máximo no negativo en un punto $x^o \in G$, en consecuencia, aplicando la proposición 1, vemos que $Lv(x^o) \leqslant 0$, pero entonces, por (9), concluimos que:

$$Lu(x^o) \leqslant \varepsilon Lh(x^o) < 0 \tag{12}$$

contradiciendo las hipótesis del teorema.

Friedman (1975) establece este principio débil de máximo, pero en lugar de la condición (6) da la siguiente:

$$\frac{1}{2} a_{11}(x)\lambda^2 + b_1(x)\lambda > 0 \tag{13}$$

para algún $\lambda > 0$ y para todo $x\varepsilon G$. Es claro que la condición (13) queda englobada en la (6), pero vamos a ver, con el siguiente ejemplo, que el principio de máximo que damos es estrictamente mejor que el de Friedman.

Ejemplo

Consideremos el operador elíptico siguiente:

$$L \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{1}{2x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{14}$$

y sea G el primer cuadrante abierto del círculo unidad. De la definición de L tenemos:

$$\begin{cases} a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ b(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}\right)^T \\ c(x) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

además, no existe ningún $\lambda > 0$ tal que:

$$\frac{1}{2} a_{11}(x)\lambda^2 + b_1(x)\lambda > 0 \tag{16}$$

para todo $x \varepsilon G$, ya que si es $x_1 < 1/\lambda$:

$$\frac{1}{2} a_{11}(x)\lambda^2 + b_1(x)\lambda = \frac{1}{2}\lambda\left(\lambda - \frac{1}{x_1}\right) < 0 \tag{17}$$

y análogamente no existe ningún $\lambda > 0$ tal que:

$$\frac{1}{2} a_{22}(x)\lambda^2 + b_2(x)\lambda > 0$$

para todo $x \varepsilon G$. Entonces no se puede aplicar el principio débil de máximo de Friedman y sí el que damos, pues el vector columna $y = (-1, -1)^T$ es tal que:

$$\frac{1}{2} y^T a y + y^T b = 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) > 0 \quad \text{en } G \tag{18}$$

Así pues, si tomamos la función:

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2}|x|^2 = 1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

que es positiva en G y verifica $Lu(x) = 0$, aplicando nuestro principio débil de máximo podemos concluir que u alcanza el máximo $\overline{G}$ en un punto de la frontera (éste es el $x_1 = x_2 = 0$ que efectivamente está en ∂G).

Definición 1:

Si existe una constante positiva μ tal que

$$y^T a(x) y \geq \mu |y|^2$$

para todo $x \varepsilon G$, $y \varepsilon R^r$, entonces se dice que L es uniformemente elíptico en G.

Proposición 2:

Sea L el operador diferencial parcial definido en (1) y μ el ínfimo de los valores propios de a(x) cuando $x \varepsilon G$, entonces L es uniformemente elíptico si y sólo si es $\mu > 0$.

Demostración

Si L es uniformemente elíptico existirá una constante μ_o tal que dados $x \varepsilon G$, $y \varepsilon R^r$, será $y^T a(x) y \geqslant \mu_o |y|^2$, por lo que al tomar un valor propio λ y un vector propio y tendremos:

$$\mu_o |y|^2 \leqslant y^T a(x) y = \lambda |y|^2$$

ahora bien, $y \neq 0$, ya que se trata de un vector propio de a(x), en consecuencia, $\lambda \geqslant \mu_o$ y por lo tanto $\mu \geqslant \mu_o > 0$.

Recíprocamente, si es $\mu > 0$ entonces a(x) es definitiva positiva para cada $x \varepsilon G$ por ser todos sus valores propios positivos. Sea entonces $y \varepsilon R^r$ y tomemos una base ortonormal de vectores propios de a(x), que designaremos por $y_1, y_2, \ldots, y_r$, con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Respecto de esta base el vector y tendrá unas coordenadas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, por lo que:

$$y^T a(x) y = \sum_{i,j=1}^{r} \alpha_i \alpha_j y_i{}^T a(x) y_j = \sum_{i,j=1}^{r} \alpha_i \alpha_j \lambda_j \delta_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 \lambda_i \geqslant \mu \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 = \mu |y|^2 \tag{19}$$

donde δ_{ij} es la δ de Kronecker. De (19) resulta que L es uniformemente elíptico, quedando probada la proposición.

Teorema 2:

Supongamos que L es uniformemente elíptico en G, abierto y acotado, siendo b(x) una función acotada en G y $c(x) \leqslant 0$ en G. En estas condiciones si el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x) & \text{en } G \\ u(x) = \varphi(x) & \text{en } \partial G \end{cases} \tag{20}$$

admite la solución $u \varepsilon C^{(2)}(G) \cap C^{(0)}(\overline{G})$, dicha solución es única.

Demostración

Por ser L uniformemente elíptico en G existirá una constante $\mu > 0$ de forma que:

$$y^T a(x) y \geqslant \mu |y|^2 \tag{21}$$

para todo $x \varepsilon G$ y todo $y \varepsilon R^r$. Por otro lado, al ser b(x) acotada existirá una constante $M > 0$ tal que:

$$\sup_{x \varepsilon G} |b(x)| \leqslant M \tag{22}$$

Con objeto de aplicar el principio débil de máximo tomemos como y cualquier vector verificando:

$$|y| > \frac{2}{\mu} M \tag{23}$$

de esta forma, de (22) y (23) tenemos:

$$\frac{1}{2} y^T a y + y^T b \geqslant \frac{1}{2} \mu |y|^2 - |y|\,|b| > M|y| - M|y| = 0$$

por lo que se verifica la condición (6).

Así pues, si hay dos soluciones distintas u,v de $C^{(2)}(G) \cap C^{(0)}(\overline{G})$ verificarán:

$$\min_{x \varepsilon \overline{G}}{}^{\circ} [u(x) - v(x)] < \max_{x \varepsilon \overline{G}}{}^{\circ} [u(x) - v(x)] = m \tag{24}$$

con lo que la función:

$$w(x) = \begin{cases} u(x) - v(x) & \text{si } m > 0 \\ v(x) - u(x) & \text{si } m \leqslant 0 \end{cases} \tag{25}$$

es tal que verifica las condiciones del principio débil de máximo, por lo que el máximo de w se alcanza en la frontera de G, pero sobre ∂G es $w(x) = 0$ contradiciendo la positividad del máximo.

Friedman (1964), (1969), establece condiciones para la existencia de solución del problema de Dirichlet (20) y para ello introduce el siguiente concepto de barrera.

Definición 2:

Una barrera en un punto $z \varepsilon \partial G$ es una función $w_z(x)$ de $C^{(2)}(G) \cap C^{(0)}(\overline{G})$ no negativa en $\overline{G}$, que se anula sólo en el punto $x = z$ y tal que $Lw_z(x) \leqslant -1$ para cada $x \varepsilon G$.

Con este concepto se puede enunciar el siguiente teorema de existencia de solución.

Teorema 3 [Friedman (1964), (1969)]:

Supongamos que L es uniformemente elíptico en G, abierto y acotado, que $c(x) \leqslant 0$ y que a, b, c y f son uniformemente continuas de Hölder en $\overline{G}$. Si cada punto de ∂G tiene una barrera y si φ es continua sobre ∂G entonces el problema de Dirichlet dado por (20) tiene una solución $u \varepsilon C^{(2)}(G) \cap C^{(0)}(\overline{G})$.

3. REPRESENTACION ESTOCASTICA DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET

Sea L un operador, como el dado por (1), uniformemente elíptico en G, donde G es un dominio acotado. Supongamos también que:

$$a \text{ y } b \text{ son continuas de Lipschitz en } \overline{G} \tag{26}$$

$$c \leqslant 0 \text{ y } c \text{ es continua de Hölder en } \overline{G} \tag{27}$$

finalmente supongamos que la frontera de G, ∂G, es de clase $C^{(2)}$, por lo que existen barreras en cada punto de ella. En virtud de los teoremas 2 y 3 el problema de Dirichlet dado por (20) tiene una solución única $u \varepsilon C^{(2)}(G) \cap C^{(0)}(\bar{G})$ supuesto que las funciones f y φ satisfagan:

$$f \text{ continua de Hölder en } \bar{G} \tag{28}$$
$$\varphi \text{ continua en } \partial G \tag{29}$$

Observamos que, por ser a(x) continua en $\bar{G}$, a(x) es simétrica y definida positiva en $\bar{G}$ y L es uniformemente elíptico en este compacto, Vamos a representar u en términos de la solución de una ecuación diferencial estocástica. Como es bien conocido [ver, por ejemplo, Cohn (1974)], si a es una matriz rxr definida no negativa, entonces tiene una única raíz cuadrada no negativa σ, esto es, existe una única matriz cuadrada σ definida no negativa tal que $\sigma\sigma = a$. Si a depende de un parámetro escalar o vectorial x, $a = a(x)$, entonces también $\sigma = \sigma(x)$.

Consideremos sobre G la solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$dX = b(X)dt + \sigma(X)dW \tag{30}$$

donde W es un movimiento Browniano r-dimensional. La existencia y unicidad de la misma, fijada una condición inicial $X(0) = x$ con $x \varepsilon G$, quedarán garantizadas si probamos que $\sigma(x)$, que es la raíz cuadrada positiva de a(x), es continua de Lipschitz en el compacto $\bar{G}$, lo cual es cierto en función de las proposiciones 3 y 4 siguientes.

Proposición 3:

Si a es una matriz definida positiva entonces:

$$\sigma = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \sqrt{z}(a - zI)^{-1} dz$$

es la raíz cuadrada positiva de a; aquí Γ es un contorno suave que está en el semiplano $Re(z) > 0$ y que contiene todos los valores propios de a; I es la matriz identidad.

Demostración

Sea U una matriz ortogonal que diagonalice a, esto es:

$$U^T a U = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son números positivos, entonces:

$$\sigma = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \sqrt{z}(U\Lambda U^T - zI)^{-1}dz = \frac{i}{2\pi}U\int_\Gamma \sqrt{z}(\Lambda - zI)^{-1}dz\ U^T \qquad (31)$$

pero $(\Lambda - zI)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1 - z}, \dots, \frac{1}{\lambda_r - z}\right)$ y como:

$$\int_\Gamma \frac{\sqrt{z}}{\lambda_j - z}dz = -2\pi i\sqrt{\lambda_j} \qquad (32)$$

deducimos que $\sigma = U\Lambda^{1/2}U^T$, donde $\Lambda^{1/2} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r})$; en consecuencia σ es una matriz cuadrada simétrica, definida positiva y tal que $\sigma\sigma = a$, de donde se deduce la proposición.

Proposición 4:

Si $a(x)$ es definida positiva y uniformemente continua de Lipschitz en un compacto K entonces su raíz cuadrada positiva $\sigma(x)$ es uniformemente continua de Lipschitz en K.

Demostración

Sea $U(x)$ una matriz ortogonal que diagonalice $a(x)$ y sean $\lambda_1(x), \dots, \lambda_r(x)$ sus valores propios, entonces:

$$|a(x)|^2 = \operatorname{Tr}[a(x)a(x)] = \operatorname{Tr}[U\Lambda^2U^T] = \operatorname{Tr}[\Lambda^2] = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2(x) \qquad (33)$$

y como $|a(x)|$ está acotada sobre el compacto K también lo estarán sus valores propios. Por otro lado, supongamos que el ínfimo de los valores de $a(x)$, con $x \varepsilon K$, fuera cero, entonces para cada $n = 1, 2, 3, \dots$ se podrían encontrar vectores $x_n \varepsilon K$, $y_n \varepsilon R^r$ tales que:

$$\left\{\begin{array}{l} a(x_n)y_n = \lambda(x_n)y_n \\ |y_n| = 1 \\ \lambda(x_n) \to 0^+ \end{array}\right. \qquad (34)$$

y al ser la superficie esférica unidad un compacto y serlo también K existirán sucesiones parciales convergentes $x_{n'} \to x \varepsilon K$, $y_{n'} \to y$ con $|y| = 1$. Por lo que tomando límites en (34) cuando $n' \to \infty$ deducimos que $a(x)y = 0$ y por tanto $y = 0$, ya que al ser $a(x)$ definida positiva es regular, lo cual está en contradicción con que $|y| = 1$.

Así pues, existe un intervalo cerrado $[\alpha, \beta] \subset R^+$ que contiene todos los valores propios de $a(x)$ cuando $x \varepsilon K$. Por la proposición 3, la raíz cuadrada positiva $\sigma(x)$ será:

$$\sigma(x) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \sqrt{z}[a(x) - zI]^{-1} dz \tag{35}$$

donde Γ es un contorno suave que está contenido en el semiplano $Re(z) > 0$ y que contenga al intervalo $[\alpha, \beta]$; de esta forma, para $x,y \varepsilon K$ se verifica que:

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma \sqrt{z}[a(x) - zI]^{-1} - [a(y) - zI]^{-1} dz \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma \sqrt{z}[a(x) - zI]^{-1} [a(y) - a(x)] [a(y) - zI]^{-1} dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{2\pi} \operatorname{long}(\Gamma)|a(y) - a(x)| \sup_{z \varepsilon \Gamma} |[a(x) - zI]^{-1} [a(y) - zI]^{-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{2\pi} \operatorname{long}(\Gamma) C|y - x| \sup_{\substack{z \varepsilon \Gamma \\ x,y \varepsilon K}} |[a(x) - zI]^{-1} [a(y) - zI]^{-1}| =$$

$$= C_o |y - x| \tag{36}$$

donde $\operatorname{long}(\Gamma)$ es la longitud de la curva Γ y C la constante de Lipschitz asociada con la función $a(x)$, además el supremo que aparece en la última igualdad de (36) es finito porque el producto de las dos matrices inversas es una función continua en (x,y,z), $(x,y,z) \varepsilon K x K x \Gamma$ y este conjunto es compacto.

Observación:

El hecho de que el ínfimo de los valores propios de a(x) sea positivo ha sido fundamental para poder construir la curva Γ y aplicar la proposición 3. Por ello si a(x), con $x \varepsilon K$, es definida positiva y K no es compacto puede ocurrir que su raíz cuadrada no sea de Lipschitz aunque a(x) sea muy suave. Por ejemplo en el caso en que $r = 1$, $K = \{x/0 < x < 1\}$ y $a(x) = x$, entonces a(x) es definida positiva para todo $x \varepsilon K$ es una función analítica y en cambio su raíz cuadrada positiva $\sigma(x) = \sqrt{x}$ no es continua de Lipschitz.

Friedman (1975) da un resultado análogo para el caso en que a(x) es definida no negativa y de clase $C^{(2)}$ para todo $x \varepsilon R^r$ probando que $\sigma(x)$ es continua de Lipschitz en los subconjuntos compactos de R^r.

Otros resultados similares son los dados por Freidlin (1968) o Phillips y Sarason (1968), exigiendo que a sea de clase $C^{(2)}$ y que tanto a como a_x y a_{xx} sean acotadas.

Si admitimos que las funciones $b(x), \sigma(x)$, que son de Lipschitz en $\overline{G}$, con frontera de clase $C^{(2)}$, poseen una extensión de Lipschitz a todo el espacio Euclídeo r-dimensional, entonces la ecuación diferencial estocástica (30) tendrá una solución única para cualquier condición inicial $X(0) = x$. El siguiente resultado se refiere a la finitud del instante en que el proceso X(t) sale de $\overline{G}$.

Proposición 5:

Si X(t) es el proceso de difusión definido por la ecuación diferencial estocástica (30), con la condición inicial $X(0) = x \varepsilon G$, y τ es el instante en que sale del compacto $\overline{G}$, entonces:

$$E_x[\tau] \leqslant k < +\infty$$

para todo $x \varepsilon G$.

Demostración

Observemos que al ser $\overline{G}$ compacto, τ será un tiempo de parada con respecto a X(t). [Ver Dynkin (1965), por ejemplo].

Por ser L uniformemente elíptico existirá una constante positiva μ verificando:

$$y^T a(x) y \geqslant \mu |y|^2 \tag{37}$$

para todo $x \varepsilon \overline{G}$, $y \varepsilon R^r$. Además, por (26) y ser G compacto existirá una constante M positiva tal que

$$|x| + |b(x)| \leqslant M \tag{38}$$

para todo $x \varepsilon \overline{G}$. Consideremos en $\overline{G}$ la función acotada definida por

$$h(x) = -Ae^{-y^T x} \tag{39}$$

donde y es un vector fijo verificándose las desigualdades

$$\left\{ \begin{aligned} &|y| \geqslant \frac{4M}{\mu} \\ &A \geqslant \mu \frac{e^{M|y|}}{4M^2} \end{aligned} \right. \tag{40}$$

por lo que aplicando la fórmula de Itô y considerando los instantes $t = 0$, $t = \tau \Lambda T$, donde T es cualquier real positivo, obtenemos:

$$E_x[h(X(\tau\Lambda T))] - E_x[h(X(0))] = E_x \int_0^{\tau\Lambda T} \left\{ h_x b + \frac{1}{2} Tr(h_{xx} a) \right\} dt \tag{41}$$

pero por (37)-(40) tenemos sobre $\overline{G}$ lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Tr(h_{xx} a) + h_x b &= -Ae^{-y^T x} \left[\frac{1}{2} y^T a y - y^T b \right] \leqslant \\ &\leqslant -Ae^{-y^T x} |y| \left[\frac{1}{2} \mu |y| - |b| \right] \leqslant \\ &\leqslant -\frac{\mu e^{M|y|}}{4M^2} e^{-M|y|} \frac{4M}{\mu} \left[\frac{1}{2} \mu \frac{4M}{\mu} - M \right] = -1 \end{aligned} \tag{42}$$

entonces, llevando (42) al integrando de (41) y teniendo en cuenta que $E_x[h(X(0))] = h(x)$ (c.s.) deducimos que:

$$E_x[\tau\Lambda T] \leqslant h(x) - E_x[h(X(\tau\Lambda T))] \leqslant \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = k$$

donde k/2 es una cota superior de $|h(x)|$ cuando $x \varepsilon \overline{G}$. De esta manera, haciendo $T \uparrow + \infty$ y aplicando el teorema de la convergencia monótona deducimos la proposición.

Con todo esto podemos dar el siguiente teorema de representación estocástica de la solución de un problema de Dirichlet.

Teorema 4:

Supongamos que el operador L dado por (1) es uniformemente elíptico en un dominio acotado G con frontera de clase $C^{(2)}$ y que se verifican (26)-(29). Entonces la única solución $u \varepsilon C^{(2)}(G) \cap C^{(o)}(G)$ del problema de Dirichlet dado por (20) puede expresarse en la forma:

$$u(x) = E_x \left[\varphi(X(\tau)) \exp \left\{ \int_0^\tau c(X(s)) ds \right\} \right] - \\ - E_x \left[\int_0^\tau f(X(t)) \exp \left\{ \int_0^t c(X(s)) ds \right\} dt \right] \tag{43}$$

donde X(t) es la solución en $\overline{G}$ de la ecuación diferencial estocástica (30) con la condición inicial $X(0) = x \varepsilon G$, y τ es el primer instante en que X(t) sale de $\overline{G}$.

Demostración:

Aplicando la regla diferencial de Itô al proceso:

$$Y(t) = u(X(t)) \exp \left\{ \int_0^t c(X(s)) ds \right\} \tag{44}$$

obtenemos:

$$dY(t) = [Lu(X)]\, Zdt + Zu_x(X)\sigma(X) dW \tag{45}$$

donde:

$$Z(t) = \exp \left\{ \int_0^t c(X(s)) ds \right\} \tag{46}$$

entonces:

$$Y(\tau) - Y(0) = \int_0^\tau [Lu(X)] \ Zdt + \int_0^\tau Zu_x(X)\sigma(X)dW \tag{47}$$

por lo que tomando esperanzas en (47) deducimos que

$$E_x[Y(\tau)] - E_x[Y(0)] = E_x \left\{ \int_0^\tau [Lu(X)] \, Zdt \right\} \tag{48}$$

ahora bien:

$$E_x[Y(\tau)] = E_x \left[u(X(\tau)) \exp \left\{ \int_0^\tau c(X(s))ds \right\} \right] =$$

$$= E_x \left[\varphi(X(\tau)) \exp \left\{ \int_0^\tau c(X(s))ds \right\} \right] \tag{49}$$

$$E_x[Y(0)] = E_x[u(X(0))] = u(x) \tag{50}$$

$$E_x \left[\int_0^\tau [Lu(X)] \, Zdt \right] = E_x \left[\int_0^\tau f(X) \exp \left\{ \int_0^t c(X)ds \right\} dt \right] \tag{51}$$

con lo cual, de (48)-(51) se deduce el teorema.

La aplicación de este teorema en algunos problemas particulares, frecuentes en la práctica, conduce a los siguientes resultados:

a) *Ecuación de Laplace*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } G \\ u = \varphi & \text{en } \partial G \end{cases}$$

aquí el proceso X(t) satisface la ecuación diferencial estocástica siguiente:

$$\begin{cases} dX = \sqrt{2}dW(t) \\ X(0) = x \end{cases}$$

o bien:

$$X(t) = x + \sqrt{2}W(t) \equiv N(\mu = x, \textstyle\sum = 2I)$$

con lo que para esto problema será

$$u(x) = E_x[\varphi(X(\tau))]$$

b) *Ecuación de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } G \\ u = 0 & \text{en } \partial G \end{cases}$$

aquí el proceso $X(t)$ satisface la misma ecuación que en a) y la solución es:

$$u(x) = -E_x\left[\int_0^\tau f(X(t))dt\right]$$

en particular, si $f(x) = k$ constante, obtenemos:

$$u(x) = -kE_x[\tau]$$

4. SIMULACION ESTADISTICA DE LA SOLUCION DE UN PROBLEMA DE DIRICHLET

El teorema 4 sugiere un método para resolver el problema de Dirichlet (20) por simulación, en efecto, discretizando la ecuación diferencial estocástica (30) en los instantes

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$$

con la condición inicial $X(0) = x \varepsilon G$, obtenemos:

$$\begin{cases} X(t_{k+1}) = X(t_k) + b(X(t_k))(t_{k+1} - t_k) + Z(t_k) \\ X(t_0) = x \end{cases} \tag{52}$$

donde:

$$Z(t_k) = \sigma(X(t_k))(W(t_{k+1}) - W(t_k)) \tag{53}$$

Podemos generarlo por Montecarlo teniendo en cuenta que conocido $X(t_k)$, se trata de un vector aleatorio normal $N(\vec{\mu}, \sum(t_k))$ con:

$$\begin{cases} \vec{\mu} = 0 \\ \sum(t_k) = (t_{k+1} - t_k)\sigma(X(t_k))^2 = (t_{k+1} - t_k)a(X(t_k)) \end{cases} \tag{54}$$

También podemos generar primero el incremento del movimiento Browniano teniendo en cuenta que su distribución sigue una ley normal con vector de medias cero y matriz de covarianzas $(t_{k+1} - t_k)I$, donde I es la matriz identidad de orden r, y luego calcular $Z(t_k)$ por la expresión (53), con lo cual, partiendo de $X(t_0) = x$ y utilizando (52) vamos calculando la travectoria $X(t_0), X(t_1), X(t_2), X(t_3), \ldots$ del proceso $X(t)$ hasta el primer instante t'_{n+1} para el cual nos salgamos de $\overline{G}$, es decir que $X(t'_{n+1}) \notin G$. Entonces subdividiendo el intervalo $[t_n, t'_{n+1}]$ y generando en dicha partición el proceso $X(t)$ con la condición inicial ya conocida $X(t_n)$, o por algún otro procedimiento, deberemos determinar $t_{n+1} = \tau$ y $X(\tau)$, siendo τ el instante en que el proceso $X(t)$ cruza la frontera del conjunto G.

Este método de aproximar la solución de la ecuación diferencial estocástica (30) es el usual método de Cauchy o de Euler, y que ha sido tratado por Maruyama en 1955. También pueden utilizarse técnicas similares a las de Runge-Kutta, ver Mc. Shane (1974), para su discusión y convergencia.

De esta forma, conocida la trayectoria de $X(t)$ en los instantes:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = \tau$$

podemos calcular las expresiones entre corchetes de (43) sin más que utilizar cualquier técnica de integración numérica. Así, con el método de los trapecios obtenemos que, para $0 \leqslant t \leqslant \tau = t_{n+1}$, la integral:

$$J(t) = \exp \int_0^t c(X(s))ds \tag{55}$$

la podemos aproximar mediante la siguiente recurrencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_0 = 1 \\ J_{k+1} = J_k \exp \left\{ \dfrac{1}{2} [c(X(t_{k+1})) + c(X(t_k))] (t_{k+1} - t_k) \right\} \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n \end{array} \right. \tag{56}$$

con lo cual, las expresiones entre corchetes en (43) quedarán aproximadas por el valor de la variable aleatoria

$$Y = \varphi(X(\tau))J_{n+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} [f(X(t_k))J_k + f(X(t_{k+1}))J_{k+1}] (t_{k+1} - t_k) \tag{57}$$

De este modo, iterando todo el proceso N veces obtendremos un conjunto de observaciones muestrales $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ cuya media muestral:

$$\overline{Y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} Y_j \tag{58}$$

permitirá estimar el valor u(x) de la solución del problema de Dirichlet dado por (20).

En los dos ejemplos siguientes, aplicamos este método con 10 iteraciones para resolver problemas de Dirichlet en el círculo unidad, siendo el operador elíptico de ambos el operador de Laplace

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Los intervalos de tiempo dados por $t_0, t_1, t_2, \ldots$ los tomamos de amplitud $\delta = 0.05$, por lo que el proceso bidimensional

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t))^T$$

verifica:

$$\begin{cases} X_1(t_{k+1}) = X_1(t_k) + Z_1 \\ X_2(t_{k+1}) = X_2(t_k) + Z_2 \\ X_1(t_0) = x_1^\circ, X_2(t_0) = x_2^\circ \end{cases} \tag{59}$$

siendo Z_1 y Z_2 variables aleatorias normales, independientes, con media cero y desviación típica $\sqrt{2\delta}$. Para generarlas utilizamos la simulación de dos variables aleatorias U_1, U_2 uniformes en el intervalo [0,1] e independientes y efectuamos el cambio de variables:

$$\begin{cases} Z_1 = \sqrt{-4\ \ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \\ \\ Z_2 = \sqrt{-4\ \ln(U_1)}\operatorname{sen}(2\pi U_2) \end{cases} \tag{60}$$

esta simulación está realizada con las tablas de dígitos aleatorios proporcionadas por Abramowitz y Stegun (1968).

Como en estos dos ejemplos es $c = 0$ obtenemos en (55) que $J(t) = 1$, por lo que la expresión (57) se convierte en:

$$Y = \varphi(X(\tau)) - \left(\frac{1}{2} f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n\right)\delta - \\ - \frac{1}{2}[f_n + f(X(\tau))]\theta\delta \qquad (61)$$

siendo $f_k = f(X(t_k))$ y $\theta\delta = \tau - t_n$. El instante de salida τ y el punto de salida $X(\tau)$ lo estimamos intersecando la circunferencia unidad con el segmento que une los puntos $X(t_n)$ (último punto interior al círculo unidad) y $X(t_{n+1})$ (primer punto fuera del círculo unidad), con lo que obtenemos:

$$\left\{\begin{aligned} \theta &= \frac{-B + \sqrt{B^2 + AC}}{A} \\ \tau &= t_n + \theta\delta = (n + \theta)\delta \\ X(\tau) &= X(t_n) + \theta(X(t'_{n+1}) - X(t_n)) \end{aligned}\right. \qquad (62)$$

siendo:

$$\left\{\begin{aligned} A &= |X(t'_{n+1}) - X(t_n)|^2 \\ B &= X(t_n)^T[X(t_{n+1}) - X(t_n)] \\ C &= 1 - |X(t_n)|^2 \end{aligned}\right. \qquad (63)$$

Ejemplo 1:

Dada la ecuación de Laplace:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 && \text{si} \quad x^2 + y^2 < 1 \\ &u(x,y) = 2x^2 - 1 && \text{si} \quad x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}\right. \qquad (64)$$

calcular $u(0,0)$.

Para este problema tenemos $a = 2I$, $b = 0$, $c = 0$, $\varphi = 2x^2 - 1$ $f = 0$ $\sigma = \sqrt{2}I$ por lo que $Y = \varphi(X(\tau))$. Los resultados parciales de los cálculos se encuentran recogidos en la tabla 1 y de ellos obtenemos para $u(0,0)$ la estimación $\overline{Y} = -0.00363$ con una cuasidesviación típica muestral para $Y_1, \ldots, Y_{10}$ de $s = 0.89990$. El valor exacto es $u(0,0) = 0$ (puede comprobarse que $u(x, y) = x^2 - y^2$ es la solución de la ecuación de Laplace (64)).

Ejemplo 2:

Dada la ecuación de Poisson:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4(1 + 2x + 2y) & \text{si} \quad x^2 + y^2 < 1 \\ & \\ u(x, y) = 0 & \text{si} \quad x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \tag{65}$$

calcular $u(0,0)$.

Para este problema tenemos $a = 2I$, $b = 0$, $c = 0$, $f = -4(1+2x+2y)$, $\sigma = \sqrt{2}I$, por lo que:

$$Y = -\int_0^{\tau} f(X(t))dt \tag{66}$$

Los resultados parciales se encuentran en la tabla 2 y de ellos deducimos para $u(0,0)$ la estimación $\overline{Y} = 1.13238$ con una cuasidesviación típica muestral para $Y_1, \ldots, Y_{10}$ de $s = 0.83816$. El valor exacto es $u(0,0) = 1$, puede comprobarse que:

$$u(x, y) = (1 - x^2 - y^2)(1 + x + y)$$

es la solución del problema de Poisson planteado.

TABLA 1

N	n	U_1	U_2	X_1	X_2	$\|X\|^2$		
1	1	0.53479	0.81115	0.13262	—0.32801	< 1		
	2	0.97344	0.70328	0.11139	—0.39825	< 1		
	3	0.66023	0.38277	—0.10207	—0.20468	< 1		
	4	0.99776	0.75723	—0.10111	—0.22584	< 1		
	5	0.30176	0.48979	—0.58962	—0.19446	< 1	$\theta =$	0.54928
	6	0.81874	0.83339	—0.48956	—0.36762	< 1	$Y_1 =$	0.74942
	7	0.19839	0.90630	—0.01654	—0.68347	< 1		
	8	0.09337	0.33435	—0.36467	—0.08929	< 1		
	9	0.31151	0.58295	—0.78352	—0.32977	< 1		
	10	0.67619	0.52515	—1.05978	—0.37379	> 1		
2	1	0.61946	0.48790	—0.30859	0.02351	< 1	$\theta =$	0.09767
	2	0.04811	0.64892	—0.77075	—0.60360	< 1	$Y_2 =$	0.37561
	3	0.05763	0.39601	—1.37062	—0.14436	> 1		
3	1	0.73260	0.56877	—0.22653	—0.10447	< 1		
	2	0.54909	0.09976	0.05391	0.09864	< 1		
	3	0.42583	0.36335	—0.21612	0.41141	< 1	$\theta =$	0.23924
	4	0.27266	0.27403	—0.29280	0.91542	< 1	$Y_3 =$	—0.89819
	5	0.49843	0.11442	—0.01198	1.16118	> 1		
4	1	0.29316	0.40460	—0.40902	0.27948	< 1		
	2	0.30463	0.27856	—0.49605	0.75923	< 1		
	3	0.28708	0.84088	—0.22602	0.33889	< 1	$\theta =$	0.27340
	4	0.13183	0.50652	—0.86208	0.31282	< 1	$Y_4 =$	0.99792
	5	0.60796	0.76639	—0.82965	—0.00099	< 1		
	6	0.13486	0.46918	—1.45083	0.12083	> 1		
5	1	0.34914	0.94502	0.43165	—0.15534	< 1		
	2	0.28105	0.04814	0.91261	—0.00526	< 1	$\theta =$	0.64231
	3	0.59231	0.45028	0.60463	0.09421	< 1	$Y_5 =$	0.99880
	4	0.87437	0.82758	0.68138	—0.05057	< 1		
	5	0.29046	0.01301	1.17697	—0.00997	> 1		
6	1	0.62035	0.71886	—0.06008	—0.30313	< 1		
	2	0.38856	0.80048	0.07553	—0.71625	< 1		
	3	0.40666	0.43328	—0.31195	—0.54358	< 1	$\theta =$	0.55336
	4	0.40588	0.90087	0.03297	—0.79131	< 1	$Y_6 =$	—0.94550
	5	0.78237	0.86556	0.18007	—0.95698	< 1		
	6	0.98247	0.67474	0.15298	—1.00993	> 1		
7	1	0.69977	0.78558	0.05924	—0.26056	< 1		
	2	0.39843	0.23074	0.11103	0.16531	< 1		
	3	0.62880	0.87277	0.32338	—0.05308	< 1	$\theta =$	0.72760
	4	0.56138	0.64927	0.12239	—0.32707	< 1	$Y_7 =$	0.94731
	5	0.90804	0.56026	—0.00667	—0.37841	< 1		
	6	0.09665	0.44672	—0.65234	—0.15381	< 1		
	7	0.34756	0.50403	—1.11194	—0.16545	> 1		
8	1	0.12157	0.73327	—0.06812	—0.64561	< 1		
	2	0.69384	0.07734	0.17096	—0.51933	< 1		
	3	0.93358	0.64565	0.09948	—0.61226	< 1		
	4	0.38879	0.35544	—0.16788	—0.26954	< 1	$\theta =$	0.48514
	5	0.58314	0.60298	—0.42992	—0.46753	< 1	$Y_8 =$	—0.94700
	6	0.83568	0.10227	—0.27823	—0.35398	< 1		
	7	0.28067	0.91152	0.14995	—0.62001	< 1		
	8	0.05730	0.75557	0.17641	—1.37578	> 1		

TABLA 1 (continuación)

N	n	U_1	U_2	X_1	X_2	$\|X\|^2$	
9	1	0.12217	0.59526	−0.53571	−0.36535	< 1	
	2	0.91964	0.26240	−0.54578	−0.23630	< 1	
	3	0.71118	0.84892	−0.39375	−0.44856	< 1	
	4	0.43112	0.83086	−0.19419	−0.80696	< 1	
	5	0.38416	0.42436	−0.58314	−0.60681	< 1	
	6	0.99937	0.13213	−0.57556	−0.59852	< 1	
	7	0.95053	0.55532	−0.67027	−0.63283	< 1	
	8	0.52769	0.18801	−0.53450	−0.30205	< 1	$\theta =$ 0.25188
	9	0.41330	0.21093	−0.43234	0.10572	< 1	$Y_9 =$ −0.99888
	10	0.81699	0.17106	−0.33665	0.28255	< 1	
	11	0.83043	0.22257	−0.30359	0.47247	< 1	
	12	0.79065	0.26999	−0.33074	0.68751	< 1	
	13	0.25513	0.86151	0.00624	0.28796	< 1	
	14	0.13948	0.96289	0.61692	0.14293	< 1	
	15	0.02645	0.35795	0.08212	0.80662	< 1	
	16	0.04044	0.29678	−0.14994	1.57326	> 1	
10	1	0.23334	0.36453	−0.35558	0.40573	< 1	$\theta =$ 0.13684
	2	0.36055	0.32002	−0.54795	0.81441	< 1	$Y_{10} =$ −0.31576
	3	0.69232	0.51423	−0.81805	0.79020	> 1	

TABLA 2

N	n	U_1	U_2	X_1	X_2	$\|X\|^2$	f	
1	0	—	—	0.00000	0.00000	< 1	−4.00000	
	1	0.43546	0.45699	−0.39296	0.10886	< 1	−1.72720	
	2	0.24510	0.15100	−0.08396	0.53983	< 1	−7.64696	$\theta =$ 0.69133
	3	0.83123	0.98558	0.10753	0.52243	< 1	−9.03968	$f(\tau) =$ −13.11952
	4	0.89755	0.28470	0.07573	0.66598	< 1	−9.93368	$Y_1 =$ 2.15823
	5	0.99539	0.44183	0.04734	0.67685	< 1	−9.79352	
	6	0.32326	0.19867	0.19797	1.12759	> 1	−14.60448	
2	0	—	—	0.00000	0.00000	< 1	−4.00000	
	1	0.32556	0.85189	0.28300	−0.37994	< 1	−3.22448	$\theta =$ 0.61157
	2	0.18307	0.22246	0.38333	0.19409	< 1	−8.61936	$f(\tau) =$ −14.46720
	3	0.58367	0.20905	0.46683	0.51144	< 1	−11.82616	$Y_2 =$ 1.88316
	4	0.65369	0.74305	0.45410	0.22013	< 1	−9.39384	
	5	0.03685	0.05411	1.22011	0.49108	> 1	−17.68952	
3	0	—	—	0.00000	0.00000	< 1	−4.00000	
	1	0.47476	0.62804	−0.26767	−0.27810	< 1	0.36616	
	2	0.77441	0.92415	−0.06675	−0.38183	< 1	−0.41136	$\theta =$ 0.78162
	3	0.54178	0.78241	0.00405	−0.72471	< 1	1.76528	$f(\tau) =$ 7.13184
	4	0.66036	0.28523	−0.05920	−0.44365	< 1	0.02280	$Y_3 =$ −0.46976
	5	0.63222	0.50533	−0.36186	−0.45379	< 1	2.52520	
	6	0.84066	0.59620	−0.53536	−0.57362	< 1	4.87184	
	7	0.56716	0.49749	−0.90210	−0.56831	> 1	7.76328	
4	0	—	—	0.00000	0.00000	< 1	−4.00000	$\theta =$ 0.96599
	1	0.06882	0.27562	−0.11726	0.72215	< 1	−7.90104	$f(\tau) =$ −12.01464
	2	0.40834	0.20296	0.00602	1.00978	> 1	−12.12640	$Y_4 =$ 0.77848

TABLA 2 (continuación)

N	n	U_1	U_2	X_1	X_2	$\|X\|^2$	f		
5	0	—	—	0.00000	0.00000	<1	−4.00000		
	1	0.32805	0.61091	−0.36206	−0.30303	<1	1.32072	$\theta =$	0.56688
	2	0.25556	0.35181	−0.67388	0.11605	<1	0.46264	$f(\tau) =$	−4.72136
	3	0.19848	0.24352	−0.65073	0.68427	<1	−4.26832	$Y_5 =$	0.24494
	4	0.93213	0.27342	−0.66811	0.80155	>1	−5.06752		
6	0	—	—	0.00000	0.00000	<1	−4.00000		
	1	0.99528	0.05150	0.02916	0.00978	<1	−4.31152		
	2	0.66469	0.13782	0.21434	0.22748	<1	−7.53456		
	3	0.45484	0.55461	−0.15946	0.09394	<1	−3.47584		
	4	0.26540	0.41298	−0.59944	0.36174	<1	−2.09840	$\theta =$	0.51219
	5	0.41814	0.74985	−0.59983	−0.05586	<1	1.24552	$f(\tau) =$	−11.01728
	6	0.34685	0.13892	−0.30410	0.29672	<1	−3.94096	$Y_6 =$	2.23058
	7	0.81765	0.06809	−0.12153	0.37997	<1	−6.06752		
	8	0.71551	0.36356	−0.29088	0.57560	<1	−6.27776		
	9	0.62758	0.14858	−0.10996	0.82094	<1	−9.69344		
	10	0.56743	0.25598	−0.12191	1.15734	>1	−12.28344		
7	0	—	—	0.00000	0.00000	<1	−4.00000		
	1	0.77622	0.02238	0.22286	0.03155	<1	−6.03528	$\theta =$	0.26315
	2	0.60539	0.96334	0.53131	−0.04078	<1	−7.92424	$f(\tau) =$	−1.74656
	3	0.78231	0.87674	0.68970	−0.19574	<1	−7.95168	$Y_7 =$	1.22449
	4	0.09938	0.66874	0.35763	−0.78861	<1	−0.55216		
	5	0.05634	0.96368	1.09666	−0.96025	>1	−5.09128		
8	0	—	—	0.00000	0.00000	<1	−4.00000	$\theta =$	0.00527
	1	0.02331	0.08797	0.73794	0.45521	<1	−13.54520	$f(\tau) =$	−14.98240
	2	0.91610	0.07483	0.85596	0.51519	<1	−14.96920	$Y_8 =$	1.15544
	3	0.71223	0.21352	0.91515	0.76890	>1	−17.47240		
9	0	—	—	0.00000	0.00000	<1	−4.00000		
	1	0.79574	0.05105	0.20286	0.06740	<1	−6.16208		
	2	0.93275	0.31978	0.15277	0.17424	<1	−6.61608		
	3	0.43565	0.46531	−0.24524	0.26239	<1	−4.13720		
	4	0.59804	0.78595	−0.17342	−0.05012	<1	−2.21168		
	5	0.49964	0.27753	−0.44099	0.20907	<1	−2.14464		
	6	0.91282	0.03419	−0.30903	0.23786	<1	−3.43064		
	7	0.88296	0.68638	−0.37043	0.09252	<1	−1.77672	$\theta =$	0.10063
	8	0.55956	0.93957	−0.05393	−0.03378	<1	−3.29832	$f(\tau) =$	−2.24808
	9	0.82125	0.37370	−0.19311	0.10769	<1	−3.31664	$Y_9 =$	1.03480
	10	0.14375	0.65187	−0.55326	−0.40047	<1	3.62984		
	11	0.60255	0.42071	−0.83287	−0.24837	<1	4.64992		
	12	0.59979	0.91063	−0.56223	−0.41863	<1	3.84688		
	13	0.89977	0.11964	−0.45606	−0.31938	<1	2.20352		
	14	0.42002	0.96997	−0.04693	−0.39751	<1	−0.44448		
	15	0.88151	0.62896	−0.15640	−0.51257	<1	1.35176		
	16	0.10003	0.93157	0.46041	−0.79542	<1	−1.31992		
	17	0.00026	0.98440	1.73914	−0.92116	>1	−10.54384		
10	0	—	—	0.00000	0.00000	<1	−4.00000	$\theta =$	0.61276
	1	0.39297	0.10309	0.34467	0.26079	<1	−8.84368	$f(\tau) =$	−9.45416
	2	0.54735	0.91550	0.64406	0.08500	<1	−9.83248	$Y_{10} =$	1.08345
	3	0.04535	0.86395	1.16031	−0.50842	>1	−9.21512		

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ABRAMOWITZ, M., and I. A. STEGUN (1968), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Pub. Inc., New York.

BONAMI, A.; N. KAROUI, B. ROYNETTE and H. REINHARD (1971), «Processus de Diffusion associé a un Opérateur Elliptique Dégénéré», *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sec. B7, págs. 31-80.

COHN, P. M. (1974), *Algebra*, vol. 1, John Wiley and Sons, London.

DYNKIN, E. B. (1965), *Markov Processes*, vols. I y II, Springer-Verlag, Berlín (traducción inglesa del original ruso).

FLEMING, W. H., and R. W. RISHEL (1975), *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, Berlín.

FREIDLIN, M. I. (1968), «On the Factorization of Nonegative Matrices», *Theory Probability Appl.*, vol. 13, págs. 354-358.

FRIEDMAN, A. (1964), *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

FRIEDMAN, A. (1969), *Partial Differential Equations*, Holt, New York.

FRIEDMAN, A. (1975), *Stochastic Differential Equations and Applications*, vol. 1, Academic Press, New York.

FRIEDMAN, A. (1976), *Stochastic Differential Equations and Applications*, vol. 2, Academic Press, New York.

KAC, M. (1949), «On Distributions of certain Wiener Functionals», *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 65, págs. 1-13.

KAC, M. (1951), *On some Connections between Probability Theory and Differential and Integral Equations*, Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., páginas 189-215.

KAROUI, N., and H. REINHARD (1973), «Processus de Diffusion dans R^n», *Lecture Notes in Mathematics*, núm. 321, Springer-Verlag, Berlín, págs. 95-116.

KUO, H. H. (1973), «Differential and Stochastic Equations in Abstract Wiener Space», *J. Functional Analysis*, vol. 12, págs. 246-256.

KUSHNER, H. J. (1976), «Probabilistic Methods for Finite Difference Approximations to Degenerate Elliptic and Parabolic Equations with Neuman and Dirichlet Boundary Conditions», *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 53, págs. 644-668.

KUSHNER, H. J. (1977), *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*, Academic Press, New York.

MARUYAMA, G. (1955), «Continuous Markov Processes and Stochastic Equations», *Rend. Circ. Mat. Palermo*, vol. 4, págs. 48-90.

MCSHANE, E. J. (1974), *Stochastic Calculus and Stochastic Models*, Academic Press, New York.

PHILLIPS, R. S., and L. SARASON (1968), «Elliptic-Parabolic Equations on the Second Order», *J. Math. Mech.*, vol. 17, págs. 891-918.

ROSENBLATT, M. (1951), «On a Class of Markov Processes», *Trans. Amer. Math. Soc.*, volumen 71, págs. 120-135.

SOLDEVILLA, M. M. (1979), *Cuestiones Notables en Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y su Relación con Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Tesina de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza.

STROOCK, D. W., and S. R. S. VARADHAN (1972), «On Degenerate Elliptic-Parabolic Operators of Second Order and their Associated Diffusions», *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 25, págs. 651-713.