Algunas propiedades terminales de una clase de juegos diferenciales de persecución no lineales

POR
FERNANDO MUÑOZ VALCARCEL

1. INTRODUCCION

En R^{2n} vamos a considerar la clase de juegos diferenciales de persecución de suma nula con ecuaciones de estado

$$\dot{æ} = \frac{dæ}{dt} = f(æ, p, q) = (a(æ_A) \cdot p,\ b(æ_B) \cdot q), \qquad (1)$$

donde:

1.1. $æ_A, æ_B \in R^n$, $æ_A = (x_1^A, \ldots, x_n^A)$, $æ_B = (x_1^B, \ldots, x_n^B)$, el vector $æ = (æ_A, æ_B)$ recibe el nombre de *estado del juego* y las variables $æ_i^A$ y $æ_i^B$, $i = 1, \ldots, n$, se llaman variables de estado;

1.2. $a(æ_A)$ y $b(æ_B)$ son dos funciones de R^n en R continuas, continuamente diferenciables, estrictamente positivas e inferiormente acotadas en todo su dominio de definición, verificando en él la condición

$$\sqrt{[a(æ_A)]^2 + [b(æ_B)]^2} = k(1 + \sqrt{\|æ_A\|^2 + \|æ_B\|^2}); \qquad (2)$$

1.3. las variables p y q, llamadas controles, recorren el conjunto $C = \{h \in R^n : \|h\| = 1\}$

llamado *región de control;* las coordenadas p_i y q_i, $i = 1, \ldots, n$, de los vectores p y q, respectivamente, se llaman variables de control.

Una imagen intuitiva del juego es la siguiente. Dos puntos $æ_A$ y $æ_B$ se mueven en R^n con velocidades $a(æ_A)$ y $b(æ_B)$, respectivamente. Dos jugadores A y B controlan en cada punto la dirección y sentido con que se mueven los puntos $æ_A$ y $æ_B$, respectivamente; es decir: controlan los vectores p y q. El juego comienza en un instante dado t_0 desde la posición $æ_0 = (æ^0_A, æ^0_B)$ y termina en el instante t_1 en que el estado del juego alcanza un conjunto fijo $S \subset R^{2n}$. Concluido el juego el jugador A paga al jugador B una cantidad proporcional a $(t_1 - t_0)$. El objetivo de A es, por tanto, elegir los vectores p de tal forma que el estado del juego alcance S en el menor tiempo posible, y el objetivo de B es, por el contrario, elegir los vectores q de tal forma que dicho tiempo sea máximo o no se llegue a alcanzar el conjunto S.

1.4. El conjunto $S = \{(æ_A, æ_B) : \|æ_A - æ_B\| \leq e\}$, con $e > 0$ fijo, se llama *superficie terminal del juego.*

1.5. *Definición.* Una *estrategia admisible* para los jugadores A o B, indistintamente, es una aplicación de un intervalo $[t_0, t]$ en C medible, continua en todo su dominio salvo, a lo más, en un número finito de puntos.

1.6. *Definición.* Siendo $p(t)$ y $q(t)$ estrategias admisibles para A y B, respectivamente, en $[t_0, t]$, cualquier solución $æ(t)$ en el mismo intervalo del sistema

$$\frac{dæ}{dt} = (a(æ_A) \cdot p(t),\ b(æ_B) \cdot q(t)) \tag{3}$$

se denomina una *trayectoria* del juego.

Las condiciones 1.2 para las funciones velocidad $a(\cdot)$ y $b(\cdot)$ garantizan que dadas cualesquiera condiciones iniciales $æ_0$ y cualesquiera estrategias admisibles $p(t)$ y $q(t)$ en algún intervalo $[t_0, t]$ existe una única trayectoria absolutamente continua $æ(t)$ en el mismo intervalo que cumpla $æ(t_0) = æ_0$.

En cada instante t la información común a los dos jugadores es, a lo menos, el valor de los vectores $æ(s)$, $p(s)$ y $q(s)$ para $t_0 \leq s < t$. El conocimiento de $æ(t)$, $p(t)$ y $q(t)$ por parte de uno de los jugadores, y no del otro, puede alterar el resultado del juego. Estas consideraciones justifican que en lo sucesivo abordemos las dos situaciones descritas en la definición siguiente.

1.7. *Definición.* El jugador A *aventaja* al jugador B si para cada t mayor o igual que t_0 A conoce æ(s) y q(t) para $t_0 \leqq s \leqq t$, mientras que B sólo conoce æ(s) y p(s) para $t_0 \leqq s < t$. El jugador B aventaja al jugador A si para cada t mayor o igual que t_0 B conoce æ(s) y p(t) para $t_0 \leqq s \leqq t$, mientras que A sólo conoce æ(s) y q(s) para $t_0 \leqq s < t$.

1.8. *Definición.* Un *punto* $æ_0$ se llama *preterminal* para A si existe un $t_1 = t_1(æ_0)$ tal que para cualquier estrategia admisible q(t) de B el jugador A, aventajando a B, puede construir una estrategia admisible p(t) para las que el juego termine no más tarde del instante t_1. (Análoga definición vale para el jugador B.)

Intuitivamente un punto $æ_p$ es preterminal para A si este jugador con la preferencia de información que posee sobre el jugador B puede acabar el juego en algún instante posterior al inicial, independientemente de la estrategia adoptada por B.

Con los planteamientos y definiciones anteriores es ya posible enunciar los objetivos de este trabajo:

(a) caracterizar los puntos preterminales en condiciones muy generales de las funciones velocidad $a(\cdot)$ y $b(\cdot)$;

(b) demostrar que para una amplia clase de juegos diferenciales de persecución los puntos preterminales se obtienen mediante la resolución de determinados problemas de control.

2. VECTOGRAMAS

Para cada $æ = (æ_A, æ_B) \in R^{2n}$ fijo y cada $q \in C$ fijo, el *vectograma* para A es el conjunto de vectores de R^n

$$A_q(æ) = f(æ, C, q) = \{a(æ_A) \cdot p + b(æ_B) \cdot q : p \in C\},$$

y análogamente para el vectograma para B.

El vectograma para A en æ es una esfera de R^n de centro el punto $c_q = b(æ_B) \cdot q$ y de radio $r_q = a(æ_A)$. Todos los centro c_q, al variar q en C, están sobre una esfera con centro en el origen y con radio $b(æ_B)$.

Estudiemos la intersección de los vectogramas para A al variar q en C:

$$A(æ) = \bigcap_{q \in C} A_q(æ).$$

Si $a(æ_A) \geqq b(æ_B)$ el conjunto A(æ) es no vacío: es una esfera de R^n de centro el origen y radio $a(æ_A) - b(æ_B)$ si se verifica la desigualdad, y se reduce al origen si se da la igualdad.

Si $a(æ_A) < b(æ_B)$ se puede seleccionar un compacto C_1 contenido en C tal que el conjunto

$$A_1(æ) = \bigcap_{q \in C_1} A_q(æ)$$

sea no vacío, y estudiar el juego en dicho compacto.

En ambos casos la intersección de los vectogramas es un conjunto convexo. Podemos, pues, aceptar la siguiente

2.1. *Hipótesis.* La intersección $A(æ)$ de los vectogramas del jugador A (e igual para $B(æ)$) es un conjunto no vacío, compacto y convexo.

2.2. *Lema.* La función $æ \to A(æ)$ es superiormente semicontinua respecto de la relación de inclusión.

Demostración. Ver Muñoz [7], página 28 y siguientes, y Mayer [5].

Contrastemos el juego (1) con el proceso de control

$$\dot{æ} = \frac{dæ}{dt} = z, \quad \text{con} \quad z \in A(æ) \quad \text{y} \quad æ(t_0) = æ_0. \tag{4}$$

El proceso (4) es equivalente a la ecuación contingente

$$\dot{æ} \in A(æ), \qquad æ(t_0) = æ_0, \tag{5}$$

sin más que aplicar el teorema de Fillipov [4].

2.3. Del lema 2.2 y de la acotación (2) se deduce que en el intervalo $[t_0, +\infty)$ existe al menos una solución absolutamente continua de la ecuación (5) (ver [10]); es decir, existe una función absolutamente continua $\tilde{æ}(t)$, $t_0 \leq t < +\infty$, tal que $\dot{\tilde{æ}}(t) \in A(\tilde{æ}(t))$ casi por todo. En virtud de la acotación (2) todas estas soluciones son prolongables a todo el semieje $[t_0, +\infty]$ (ver [3]). Si una de tales soluciones alcanza la superficie terminal S en algún instante $t_1 \geq t_0$, de acuerdo con el teorema de Fillipov (ver [4]) para el proceso de control (4), con la superficie terminal S, existen un control óptimo, una función $z^*(t)$ y una trayectoria óptima $æ^*(t)$ tales que $z^*(t) \in A(æ^*(t))$. En estas condiciones, sea $t^*(æ_0)$ el tiempo óptimo: tiempo empleado en el desplazamiento a lo largo de $æ^*(t)$ desde $æ_0$ hasta S. Entonces:

2.4. *Teorema.* Cualquiera que sea la posición inicial $æ_0$ existen estrategias admisibles para los jugadores A y B que permiten concluir el juego en un tiempo no mayor que $t^*(æ_0)$.

Demostración. Sea q(t) una estrategia admisible arbitraria del jugador B. Evidentemente se cumple

$$z^*(t) \in A_{q(t)}(æ^*(t)) = f(æ^*(t),\ C,\ q(t)) =$$
$$= \{(a(æ_A^*(t)) \cdot p,\ b(æ_B^*(t)) \cdot (t)) : p \in C\}.$$

De aquí se sigue que para todo $t \geqq t_0$ (manteniendo fijos los vectores $z^*(t)$ y $q(t)$) existe al menos un vector p tal que

$$z^*(t) = f(æ^*(t),\ p,\ q(t)) = (a(æ_A^*(t)) \cdot p,\ b(æ_B^*(t)) \cdot q(t))).$$

Si hubiese más de uno de tales vectores seleccionaremos el que tenga la menor primera coordenada; si tampoco hay unicidad de entre los anteriores vectores elegiremos el de menor segunda coordenada, etc. Este proceso conduce a un único vector que denotaremos por $\hat{p}(t)$. Sustituyendo $\hat{p}(t)$ y $q(t)$ en (1) resulta

$$\dot{æ}^*(t) = f(æ^*(t),\ \hat{p}(t), q(t)) = (a(æ_A^*(t)) \cdot \hat{p}(t),\ b(æ_B^*(t)) \cdot q(t)).$$

Ahora bien, de la última igualdad y de la unicidad de las soluciones de (1) se deduce que a las estrategias $\hat{p}(t)$ y $q(t)$ y las condiciones iniciales $æ_0$ corresponde una única trayectoria $æ(t) = æ^*(t)$ que alcanza S en un tiempo no mayor que $t^*(æ_0)$. Esto concluye la demostración.

3. CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES

Sean I_n y 0_n las matrices identidad y nula de orden nxn, respectivamente, y J_A y J_B las matrices de orden 2nxn

$$J_A = \left[\begin{array}{c} I_n \\ \hline 0_n \end{array}\right] \quad y \qquad\qquad J_B = \left[\begin{array}{c} 0_n \\ \hline I_n \end{array}\right].$$

Sustituyendo $æ_A = æ \cdot J_A$ y $æ_B = æ \cdot J_B$ en (1) resulta

$$\dot{æ} = (a(æ \cdot J_A) \cdot p,\ b(æ \cdot J_B) \cdot q) = (a(æ \cdot J_A) \cdot p,\ 0,\ \ldots,\ 0) +$$
$$+ (0,\ \ldots,\ 0,\ b(æ \cdot J_B) \cdot q) = \alpha(æ, p) - \beta(æ, q). \qquad (6)$$

Seleccionemos aquellos juegos para los que se cumple la hipótesis siguiente:

3.1. *Hipótesis*. Para todo $æ \in R^{2n}$ se verifica la igualdad

$$A(æ) + \beta(æ, C) = \alpha(æ, C). \tag{7}$$

Si $a(æ_A) \geqq b(æ_B)$ se cumple la relación $A(æ) + \beta(æ, C) \supset (æ, C)$, por lo que la hipótesis se reduce a exigir la inclusión del primer miembro en el segundo.

Si $a(æ_A) < b(æ_B)$ la igualdad (7) no se verifica, en general, pero se puede seleccionar un compacto $C_2 \subset C_1$ tal que $\beta(æ, C_2)$ sea convexo y se verifique la hipótesis para $C = C_2$. En este caso el estudio del juego se limitará a los vectores p, q pertenecientes a C_2.

Como en el primer caso $\beta(æ, C)$ es convexo, en el segundo se selecciona el conjunto C_2 para que $\beta(æ, C_2)$ también lo sea, y $A(æ)$ es siempre convexo, resulta que $\alpha(æ, C)$ y $\alpha(æ, C_2)$ son conjuntos convexos.

De (7) se sigue que para cualquier vector $\alpha(æ, p)$, con $æ \in R^{2n}$ y $p \in C$, existen los vectores $z \in A(æ)$ y $h \in \beta(æ, C)$ tales que

$$z + h = \alpha(æ, p). \tag{8}$$

Representemos por $B(æ, p)$ el conjunto de tales pares de vectores

$$B(æ, p) = \{(z, h) : z \in A(æ),\ h \in \beta(æ, C),\ z + h = \alpha(æ, p)\},$$

el cual es evidentemente convexo.

3.2. *Lema*. La función $(æ, p) \to B(æ, p)$ es superiormente continua en $R^{2n} x\, C$ respecto de la relación de inclusión.

Demostración. Se demuestra de forma similar a la del lema 1.2 de [7] utilizando la continuidad de las funciones $\alpha(æ, p)$ y $\beta(æ, q)$.

Asociada al juego (1), escritas sus ecuaciones de estado en la forma (6), vamos a considerar la ecuación contingente

$$\dot{æ}(t) \in \alpha(æ, p(t)) - B(æ, p(t)),\ æ(t_0) = æ_0, \tag{9}$$

donde $p(t)$ es una estrategia admisible arbitraria de A en $t \geqq t_0$.

Vamos a enumerar a continuación una relación de propiedades básicas del segundo miembro de (9) que se utilizarán en el teorema fundamental de existencia de soluciones. La demostración de dichas propiedades no presenta dificultades y la omitiremos.

3.3. *Lema.* Para cada $æ \in R^{2n}$ y cada estrategia admisible $p(t)$ de A en $t \geqq t_0$ se verifican:

(a) el conjunto $\alpha(æ, p(t)) — B(æ, p(t))$ es no vacío, compacto y convexo;

(b) para cada $t \geqq t_0$, la aplicación $æ \rightarrow \alpha(æ, p(t)) — B(æ, p(t))$ es superiormente semicontinua respecto de la inclusión;

(c) para todo vector $v \in \alpha(æ, p(t)) — B(æ, p(t))$, existe una constante $k > 0$ tal que $\| v \| \leqq k \cdot (1 + \| æ \|)$;

(d) para todo æ de R^{2n} y todo $t \geqq t_0$ vale la relación

$$\alpha(æ, p(t)) — B(æ, p(t)) \in A(æ).$$

3.4. *Lema.* En las condiciones del lema 3.3 existe una única función $r(æ, t)$, con dominio $R^{2n} \times [t_0, +\infty]$, tal que

$$r(æ, t) \in \alpha(æ, p(t)) — B(æ, p(t))$$

en el dominio de $r(æ, t)$.

Demostración. La existencia es consecuencia directa del teorema de Fillipov citado y del lema 3.3. Para probar la unicidad seguiremos el siguiente camino. Para cada æ de R^{2n} y cada $t \geqq t_0$ tomemos de entre todos los vectores r que cumplan

$$r \in \alpha(æ, p(t)) — B(æ, p(t))$$

el que tiene la primera coordenada más pequeña. Si hubiesen varios, de entre todos ellos tomemos el de segunda coordenada menor, etc. Este proceso conduce a un único vector, que denotaremos con $r(æ, t)$, que cumple la condición del lema. En efecto, para probar que es medible representemos con E_i, $i = 1, 2, \ldots$, la esfera 2n-dimensional de centro el origen y radio i, y pongamos $R_i = E_i \times [t_0, t_0 + i]$. Demostrando que $r(æ, t)$ es medible en R_i, para todo i, quedará probado que lo es en $R^{2n} \times [t_0, +\infty]$. Aora bien, por ser $p(t)$ medible, para todo $\varepsilon > 0$ existirá un cerrado E contenido en el intervalo $[t_0, t_0 + i]$, de medida mayor que $(i — \varepsilon)$, tal que las funciones escalares componentes $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ sean continuas en E. Pero, para cada real a positivo, el conjunto de los puntos $(æ, t) \in E_i \times E$ para los que la j-ésima componente de $r(æ, t)$ satisface la desigualdad $r_j(æ, t) \leqq a$ es cerrado. Por lo tanto, al ser la función $r(æ, t)$ medible en $E_i \times \{t\}$, para todo t (la medida de E es mayor que $(i — \varepsilon)$ para todo ε), $r(æ, t)$ es medible en E_i y, por tanto, también lo es en $R^{2n} \times [t_0, +\infty]$. Esto completa la demostración.

Utilizando las propiedades (a), ..., (d) del lema 3.3, el lema 3.4 y aplicando el teorema citado de Fillipov, podemos concluir que

3.5. *Teorema.* La ecuación contingente

$$\dot{æ}(t) \in \alpha(æ, p(t)) - B(æ, p(t)),$$

con las condiciones iniciales $æ(t_0) = æ_0$, en la que $p(t)$ es una estrategia admisible para A en $[t_0, +\infty]$, admite al menos una solución $\hat{æ}(t)$ en dicho intervalo. Además, cualquier solución con las mismas condiciones iniciales es prolongable a $[t_0, +\infty]$. Cualquier solución de esta ecuación lo es también de la ecuación contingente (5).

4. CONSTRUCCION DE ESTRATEGIAS

Vamos a estudiar en este apartado la construcción de una estrategia admisible para B que, en cierto sentido que se precisará más adelante, es una aproximación de $B(æ, p(t))$.

Para $T > t_0$ consideremos los puntos del intervalo $[t_0, T]$ de la forma $t_0 + uj$, para $j = 1, 2, ..., i$, donde $u = (T-t_0)/i$ e $i = 1, 2, \cdots$ Construyamos las funciones $æ^i(t)$ en $[t_0, T]$ de la siguiente forma:

$$\dot{æ}^i = \alpha(æ^i, p(t)) - r(æ(t_0+(k-1)u), p(t)), \text{ si } t_0+(k-1)u \leq t \leq t_0+ku, \quad (10)$$

con $æ^i(t_0) = æ_0$, $k = 1, 2, ..., i$, $i = 1, 2, 3, ...$

4.1. *Lema.* Para todo $\varepsilon > 0$ y toda estrategia admisible $p(t)$, con $t_0 \leq t \leq T$, existe un $i_0 > 0$ y una solución $æ(t)$ de la ecuación (4) en el mismo intervalo, con $æ(t_0) = æ_0$, tales que

$$\| æ^i(t) - æ(t) \| < \varepsilon$$

para todo $i > i_0$ y todo $t \in [t_0, T]$.

Demostración. Por reducción al absurdo. Si no fuese cierta la conclusión existirán un $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión de estrategias admisibles $p^{i_k}(t)$ y la correspondiente sucesión de funciones $æ^{i_k}(t)$ definidas por medio de (10) con $u = T/i_k$ tales que

$$\max_{t \in [t_0, T]} \| æ^{i_k}(t) - æ(t) \| \geq \varepsilon_0 > 0, \quad (11)$$

para cualquier solución $æ(t)$ de (4) con las condiciones iniciales $æ_0$. Utilizando la acotación (2) podemos encontrar dos constantes positivas δ y λ, independientes de $p(t)$ y de i, tales que

$$\| æ^i(t) \| \leq \delta, \quad \| æ^i(t_1) - æ^i(t_2) \| \leq \lambda \cdot | t_1 - t_2 |, \tag{12}$$

para $i = 1, 2, \ldots,$ y $t_1, t_2 \in [t_0, T]$. Aplicando el teorema de Arzela-Ascoli (ver [2], pág. 233 y siguientes) la sucesión de funciones $æ^{i}k\ (t)$ converge a una función continua $\hat{æ}(t)$ respecto de la norma del supremo de $\mathbb{C}([t_0, T])$.

Es fácil comprobar que $\hat{æ}(t)$ por satisfacerse la condición de Lipschitz (12) es absolutamente continua. Además, por construcción, se verifica

$$\alpha(æ^i(ku),\ p^i(t)) - r(æ^i(ku),\ p^i(t)) \in A(æ^i(ku)),$$

para $k = 0, 1, \ldots, i-1$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Por tanto, para un $u = (T\text{-}t_0)/i$ suficientemente pequeño valen las relaciones

$$\alpha(æ^i(ku),\ p^i(t)) - r(æ^i(ku),\ p^i(t)) \in A(æ^i(ku)) + E_\varepsilon,$$

donde $ku \leq t \leq (k+1)u$, E_ε es la esfera 2n-dimensional de centro el origen y radio $\varepsilon > 0$, y ε no depende de $p^i(t)$, k y u.

Por ser la función $r(æ(ku),\ p(t))$ medible en el intervalo $ku \leq t \leq (k+1)u$ se puede aplicar el teorema de Pontryagin (teorema 1, [8]) y deducir que $\dot{æ}(t) \in A(\hat{æ}(t))$ para casi todo t en $[t_0, T]$, lo que contradice (11). Así el lema queda probado.

Abordemos ahora la construcción de una estrategia admisible para el jugador B.

4.2. *Teorema.* Para cada u y cada $t \in [ku, (k+1)u]$, dados una estrategia admisible $p(t)$ y la correspondiente solución $æ(s)$, $t_0 \leq s \leq t$, de (4) existe una estrategia admisible para B $q_u(æ(s), p(t))$ que en el intervalo $[t_0, T]$ verifica

$$r(æ(ku), p(t)) = \beta(æ(ku), q_u(æ(s), p(t))).$$

Demostración. Por las condiciones del enunciado y las propiedades de las funciones r y β existirán vectores q tales que

$$r(æ(ku), p(t)) = \beta(æ(ku), q)$$

De entre ellos tomemos el de primera coordenada menor. Si hay más de uno tomemos el de segunda coordenada menor, etc. Este proceso conduce a un único vector medible, que denotaremos por $q_u(æ(s), p(t))$, y que satisface las condiciones del teorema.

5. CONDICIONES DE EXISTENCIA DE PUNTOS PRETERMINALES

El control $q_u(æ(s), p(t))$ del teorema 4.1 se puede utilizar en los juegos del tipo (6) de la siguiente forma.

Si $æ_0$ no pertenece a la superficie terminal S se pueden dar dos casos:

5.1. Para todo $t \geqq t_0$ cualquier trayectoria de (4), con las condiciones iniciales $æ_0$, no tiene puntos comunes con S;

5.2. Existe al menos una trayectoria $æ(t)$ de (4), con las condiciones iniciales $æ_0$, tal que $æ(t_1) \in S$ para algún $t_1 \geqq t_0$.

En el primer caso, dado cualquier $T \geqq t_0$, para cualquier estrategia admisible del jugador A, el jugador B puede construir una estrategia admisible $q(æ(s), p(t))$, para $t_0 \leqq s \leqq t$, tal que las trayectorias del juego (6), con las condiciones iniciales $æ(t_0) = æ_0$, no corten a S en ningún punto correspondiente al intervalo $t_0 \leqq t \leqq T$.

En el segundo caso, como vimos en 2.3, existe una trayectoria de la ecuación (4) que alcanza S en el instante $t^*(æ_0)$. Entonces, dado T en el intervalo $[t_0, t^*(æ_0)]$, para cualquier estrategia admisible $p(t)$ del jugador A, el jugador B puede construir una estrategia admisible $q(æ(s), p(t))$, en el intervalo $t_0 \leqq s \leqq t$, con las condiciones iniciales $æ(t_0) = æ_0$, tal que las correspondientes trayectorias no intercepten a S en el intervalo $t_0 \leqq t \leqq T$.

Ambas propiedades se demuestran sin más que utilizar el lema 4.1 y las estrategias para B de la forma $q_u(æ(s), p(t))$.

Para avanzar en las propiedades de los juegos del tipo (6), a las hipótesis 2.1 y 3.1 agregaremos la siguiente.

5.3. *Hipótesis.* Existe una función $q(æ, p)$ continua en $R^{n^2} \times C$ y tal que $q(æ, p) \in B(æ, p)$ en dicho conjunto.

Sean $T \geqq t_0$ y $t_0 \leqq \delta < T$. Estudiemos el siguiente método de construcción de estrategias para el jugador B:

$$q(t) = \begin{cases} q, & \text{si } t_0 \leqq t \leqq \delta, \\ q(æ(t), p(t-\delta)), & \text{si } \delta \leqq t \leqq T, \end{cases}$$

donde q es un vector fijo arbitrario de C.

De la continuidad de $q(æ, p)$ y de la acotación (2) se sigue la existencia de al menos una solución del juego (6), con $æ(t_0) = æ_0$, para cualquier estrategia admisible $p(t)$ del jugador A en el intervalo $t_0 \leqq t \leqq T$. Además, de (6) se sigue que dichas trayectorias verifican

$$æ(t) = æ_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(æ(s), p(s))ds - \int_{t_0}^{t} \beta(æ(s), q(s))ds.$$

Por verificarse la acotación (2) existirá una constante k_1 tal que para cualquier trayectoria $æ(t)$ de (6) que parta de $æ_0$ valga la acotación

$$\| æ(t) \| \leqq k_1, \text{ para } t_0 \leqq t \leqq T. \tag{13}$$

De la continuidad de las funciones $\alpha(æ, p)$ y $\beta(æ, q)$ en el conjunto $R^{2n} \times C$ y de la relación (13) se deduce que

$$\| \alpha(æ(t), p(t)) \| \quad y \quad \| \beta(æ(t), q(t)) \|$$

están acotadas superiormente en el intervalo $t_0 \leqq t \leqq T$. De aquí es fácil obtener que

$$\| æ(t) - æ(t - \delta) \| \leqq k_2, \text{ para } \delta \leqq t \leqq T. \tag{14}$$

Utilizando ahora la desigualdad (14) en el intervalo $\delta \leqq t \leqq T$ obtenemos

$$\int_{t_0}^{t} \beta(æ(s), q(s))ds = \int_{t_0}^{t} \beta(æ(s), q(æ(s), p(s)))ds + g(æ(t)), \tag{15}$$

donde la función vectorial $g(æ(t))$ está acotada superiormente en módulo en el intervalo $\delta \leqq t \leqq T$.

Aplicando el lema de Granwall-Bellman (ver [10]) a la relación (15) se demuestra que entre las soluciones de la ecuación

$$\dot{æ} = \alpha(æ, p(t)) - \beta(æ, q(æ, p(t))),$$

con las condiciones iniciales $æ(t_0) = æ_0$, se encuentra una $æ^*(t)$ tal que para cualquier estrategia admisible $p(t)$, en $t_0 \leqq t \leqq T$, de A se cumplirá la desigualdad $\| æ(t) - æ^*(t) \| \leqq k_3$, uniformemente. Además, esta trayectoria cumplirá

$$\alpha(æ^*(t), p(t)) - \beta(æ^*(t), q(æ^*(t), p(t))) \in A(æ^*(t))$$

para casi todo t en $[t_0, T]$. Esto prueba que $æ^*(t)$ es una de las trayectorias de (4).

De lo anterior se sigue que en el caso 5.1 el jugador A está discriminado por el jugador B pues este último con la información suministrada por $æ(t)$ y $p(t-\delta)$, para δ suficientemente pequeño, puede construir la estrategia $q(æ(t), p(t-\delta))$ y lograr que ninguna de las trayectorias del juego (6), con las condiciones iniciales $æ(t_0) = æ_0$, alcance S en el intervalo $t_0 \leqq t \leqq T$, con $T < t^*(æ_0)$.

6. APENDICE

Vamos a estudiar algunas condiciones suficientes para que se verifique la hipótesis 5.3.

De la hipótesis 3.1.(7) se sigue que para cada æ la variedad lineal soporte del conjunto $\beta(æ, C)$ tiene una dimensión no mayor que la de la variedad lineal soporte de $\alpha(æ, C)$ y ambas variedades son paralelas.

6.1. *Teorema.* Son condiciones suficientes para que se verifique la hipótesis 5.3 las siguientes:

(i) las dimensiones de los conjuntos $\alpha(æ, C)$ y $\beta(æ, C)$ son independientes de æ y sus variedades lineales soporte son ambas paralelas a un subespacio fijo H;

(ii) las proyecciones ortogonales sobre H, $pr_H\alpha(æ, C)$ y $pr_H\beta(æ, C)$, son convexas para todo æ;

(iii) desde cada punto de la frontera de $pr_H\alpha(æ, C)$ se puede trazar un y sólo un hiperplano de H soporte de dicho conjunto;

(iv) la ecuación $\beta(æ, q) = h$ tiene una única solución de $q = q(æ, h)$ perteneciente a C para todo h de $\beta(æ, C)$.

Demostración. Por la convexidad de $\alpha(æ, C)$ y $\beta(æ, C)$ cualquier variedad soporte de uno de ellos tiene un único punto de contacto con el conjunto soportado. Tomemos un vector 2n-dimensional no nulo a perteneciente a H y tracemos por el punto $pr_H\alpha(æ, p)$ una recta paralela al vector a. Esta recta corta a la frontera de $pr_H\alpha(æ, C)$ en sólo dos puntos y determina dos vectores $pr_H\alpha_1(æ, p)$ y $pr_H\alpha_2(æ, p)$ pertenecientes a la frontera de $\alpha pr_H(æ, C)$.

Evidentemente se cumple

$$pr_H\alpha(æ, p) = \lambda_1(æ, p) \cdot pr_H\alpha_1(æ, p) + \lambda_2(æ, p) \cdot pr_H\alpha_2(æ, p),$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \geqq 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Representemos por $\psi_1(æ, p)$ y $\psi_2(æ, p)$ dos vectores normales a la variedad soporte en los puntos $pr_H\alpha_1(æ, p)$ y $pr_H\alpha_2(æ, p)$, respectivamente, dirigidos al semiespacio que no contiene a $pr_H\alpha(æ, p)$.

En virtud de las condiciones del teorema existen dos vectores $h_1(æ, p)$ y $h_2(æ, p)$, y sólo dos, para los que se cumplen las igualdades

$$< h_1(æ, p), \psi_1(æ, p)> = \max_{h \in pr_H\beta(æ, C)} < h, \psi_1(æ, p)>,$$

$$< h_2(æ, p), \psi_2(æ, p)> = \max_{h \in pr_H\beta(æ, C)} < h, \psi_2(æ, p)>,$$

respectivamente.

El vector $h(æ, p) = \lambda_1(æ, p) \cdot h_1(æ, p) + \lambda_2(æ, p) \cdot h_2(æ, p)$ pertenece a $pr_H\beta(æ, C)$ y la función $q(æ, p)$ solución de la ecuación

$$pr_H\beta(æ, q) = h(æ, p)$$

satisface la hipótesis 5.3, lo que completa la demostración.

7. BIBLIOGRAFIA

[1] BOLTYANSKII, V. G., «Time-optimal Synthesis for Nonlinear Control Systems of Second Order», en *Mathematical Theory of Control.* Academic Press, New York, 1967.

[2] COTLAR, M., y CIGNOLI, R., *Nociones de Espacios Normados,* Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1967.

[3] DEM'YANOV, V. F., «On the Solution of Some Nonlinear Optimal Control Problems», en *Mathematical Theory of Control.* Academic Press, New York, 1967.

[4] FILLIPOV, A. F., *On Certain Questions in the Theory of Optimal Control.* J. SIAM, *Control* (1), 1962.

[5] MAYER, C., *Outils Topologiques et Métriques de l'Analyse Methématique,* Centre de Documentation Universitaire et S. E. D. E. S., París, 1975.

[6] MUÑOZ, R., *Problemas de Tiempo Optimo en R^n, Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa,* vol. XXV, Madrid, 1974.

[7] MUÑOZ, F., *Problemas de Tiempo Optimo y sus Aplicaciones a los Juegos Diferenciales* (tesis doctoral), Murcia, 1973.

[8] PONTRYAGIN, L. S., «Linear Differential Games», en *Mathematical Theory of Control.* Academic Press, New York, 1967.

[9] PONTRYAGIN, L. S., y otros, *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* Interscience Publishers, New York, 1965.

[10] WALTER, W., *Differential and Integral Inequalities.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.