# Continuidad de la función valor en un juego diferencial (*)

POR
P. ZOROA

El problema fundamental de los juegos diferenciales se plantea como sigue.

Se suponen dados:

1.° Un conjunto X contenido en $R^n$.

Este conjunto que supondremos abierto se llama *espacio del juego*. Cada punto de este conjunto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene n coordenadas $x_i$ que se llaman *variables de estado*.

2.° Una superficie T, que llamaremos *superficie terminal*, y que es la frontera, o parte de la frontera de X. Puede venir definida en forma paramétrica por

$$x_i = h_i (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

(*) Este trabajo ha sido realizado con Ayuda a la Investigación.

3.° Para cada $x \in X$ hay dos conjuntos $\Phi_x$, $\Psi_x$, de los espacios $R^h$, $R^k$ donde pueden variar las variables $\varphi$ y $\psi$ que se llaman *variables de control*

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h) \in \Phi_x \subset R^h$$

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k) \in \Psi_x \subset R^k$$

4.° Una función $H(x)$ definida para cada $x \in T$ que se llama *pago terminal*. Una función $G(x, \varphi, \psi)$, que se llama *integrando*, definida para todo $x \in X$, $\varphi \in \Phi_x$, $\psi \in \Psi_x$

5.° Un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = v_1(x, \varphi, \psi)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = v_2(x, \varphi, \psi)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt} = v_n(x, \varphi, \psi)$$

o brevemente

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x, \varphi, \psi)$$

que llamaremos *ecuaciones cinemáticas*.

Con estos datos podemos dar estas definiciones.

Una función

$$\varphi = \alpha(x)$$

definida en X tal que para cada $x \in X$ nos dá $\alpha(X) \in \Phi_x$ se llamará una *estrategia* para el jugador P.

Una función

$$\psi = \beta(x)$$

definida en X tal que para cada $x \in X$ da $\beta(x) \in \Psi_x$ se llamará una estrategia para el jugador F.

Una curva $x = x(t)$ con $t_0 \leq t \leq t_1$ de $R^n$ se llamará una *trayectoria* si se cumple

$$x(t) \varepsilon X \qquad t_0 \leq t < t_1$$
$$x(t_1) \varepsilon T$$

y además $x = x(t)$ es solución del sistema de *ecuaciones cinemáticas* donde se supone que $\varphi$ y $\psi$ se han sustituido por funciones de X

$$\varphi = \alpha(x), \qquad \psi = \beta(x)$$

que sean *estrategias* de P y F respectivamente.

Para cada trayectoria $x = x(t)$, con $t_0 \leq t \leq t_1$, se llama *pago* de P a F a la funcional

$$\mathscr{P}(x(t), t_0, t_1) = \mathscr{P}(x(t)) =$$
$$\int_{t_0}^{t_1} G(x, \varphi, \psi)\, dt + H[x(t_1)]$$

En el juego diferencial se supone que existen dos personas que llamaremos jugadores P y F, de modo que *P se propone minimizar el pago* $\mathscr{P}[x(t)]$ para lo cual controla $\varphi$, y *F intenta maximizar el pago* $\mathscr{P}[x(t)]$ para lo cual controla $\psi$. Estos jugadores P y F eligen libremente las variables de control $\varphi$ y $\psi$ conociendo en cada momento las variables de estado, por lo cual sus estrategias son las funciones $\alpha(x)$, $\beta(x)$ tal como se definieron antes.

Si para dos estrategias $\alpha$ y $\beta$ resulta una trayectoria única $x = (t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ que pasa por el punto $x^0 = x(t_0)$, el pago puede representarse así

$$[\pi, (\alpha, \beta, x(t_0)] = \mathscr{P}[x(t)] =$$
$$\int_{t_0}^{t_1} G(x, \varphi, \psi) dt + H[x(t_1)]$$

[en la integral se sustituye

$\varphi = a(x), \quad \psi = \beta(x), \quad x = x(t)]$

Si para dos estrategias $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ particulares, valen las relaciones

$$\pi\ (\bar{\alpha},\ \beta,\ \mathbf{x}^{\circ}) \leq \pi\ (\bar{\alpha},\ \bar{\beta},\ \mathbf{x}^{\circ}) \leq \pi\ (\alpha,\ \bar{\beta},\ \mathbf{x}^{\circ})$$

para cualesquiera otras estrategias $\alpha$ y $\beta$ y cualquier punto $x^{0} \in X$, entonces llamaremos a $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ *estrategias óptimas* de P y F respectivamente, y a

$$V(x^{0}) = \pi\ (\bar{\alpha},\ \bar{\beta},\ x^{0})$$

se le llama valor del juego en el punto x" La función V(x) que así resulta se llama *función valor.*

*Una trayectoria óptima* es la que resulta de las ecuaciones cinemáticas

$$\dot{x} = v[x,\ \bar{\alpha}(x),\ \bar{\beta}(x)]$$

correspondientes a estrategias óptimas; representaremos una trayectoria óptima escribiendo $\bar{x}$ (t).

Una trayectoria que resulta con la estrategia óptima $\bar{\alpha}(x)$ de P y cualquier otra estrategia $\beta(x)$ de F será denotada por $\bar{\mathbf{x}}_P(t)$, y de modo simétrico $\bar{\mathbf{x}}_F$ (t) será una trayectoria obtenida con una estrategia óptima $\bar{\beta}(x)$ de F, y cualquier estrategia $\alpha(x)$ de P.

El problema fundamental de los juegos diferenciales consiste en, fijados los datos X, T, $\Phi_x$, $\Psi_x$, $v(x, \varphi, \psi)$, H(x), G $(x, \varphi, \psi)$, encontrar las estrategias óptimas $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, las trayectorias óptimas $\mathbf{x}$ (t) y la función valor V(x).

Puede consultarse para este problema el libro de R. Isaacs: Jeux Differentiels.

Admitiendo la existencia de solución al problema anterior cabe preguntarse bajo que condiciones de los datos expuestos se puede asegurar la continuidad de la función valor V(x). Para esta pregunta disponemos de este resultado parcial.

*Teorema.* Consideremos un juego diferencial en el que existen las estrategias óptimas $\bar{\alpha}(x)$, $\bar{\beta}(x)$. La función valor V(x) es continua si existen dos números reales positivos H y K, tales que, dados x', x″ pertenecientes al espacio del juego X, siempre que se cumpla que $|x' - x''| < H$ existen dos trayectorias $\bar{\mathbf{x}}_P$, $\bar{\mathbf{x}}_F$ que van, o ambas de x′ a x″, o ambas de x″ a x′ y verificándose además, que valen las acotaciones

$$\max_{x \in S_P} \left( \frac{|G|}{|v|} \right) L(S_P) \leq K \,|\, x' - x'' \,|$$

$$\max_{x \in S_F} \left( \frac{|G|}{|v|} \right) L(S_F) \leq K \,|\, x' - x'' \,|$$

donde $S_P$ y $S_F$ son los arcos de las trayectorias $\overline{x}_P$ y $\overline{x}_F$ de extremos $x'$ y $x''$, $L(S_P)$ y $L(S_F)$ son las longitudes de dichos arcos y $|\, x' - x'' \,|$ es la distancia euclídea de $x'$ a $x''$ en $R^n$.

Demostración. Sean $x$ y $x+h$ dos puntos de $R^n$ tales que $|h| < H$.

Por las hipótesis existen dos trayectorias $\overline{x}_P$ y $\overline{x}_F$ que van de $x'$ a $x''$ donde $x'$ es $x$ ó $x+h$ y $x''$ es respectivamente $x+h$ ó $x$. Ahora bien, la relación

$$\pi\,(\overline{\alpha}, \beta, x') \leqq \pi\,(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, x') \leqq \pi(\alpha, \overline{\beta}, x')$$

vale para todo $\alpha$ y $\beta$, por lo que podemos elegir éstas a nuestro capricho.

Tomaremos $\alpha$ de modo que la trayectoria obtenida con $\alpha$ y $\overline{\beta}$ vaya de $x'$ a $x''$ coincidiendo con el arco $S_F$ de $\overline{x}_F$ y a partir de $x''$ tomaremos $\alpha = \overline{\alpha}$. Del mismo modo $\beta$ se tomará de modo que se obtenga $\overline{x}_P$ de $x'$ a $x''$, y a partir de $x''$ $\beta = \overline{\beta}$. Con esto las relaciones anteriores se convierten en

$$\int_{S_P} G dt + V(x'') \leqq V(x') \leqq \int_{S_F} G dt + V(x'')$$

o sea

$$\int_{S_P} G dt \leqq V(x') - V(x'') \leqq \int_{S_F} G dt$$

Por otra parte, de $d\overline{x}_F = v dt$, que vale sobre $S_F$ resulta $dL(\overline{x}_F) = |\, v \,|\, dt$,

$$\left| \int_{S_F} G\,(x, \varphi, \psi)\, dt \right| = \left| \int_{S_F} \frac{G}{v}\, dL(x_F) \right| \leqq$$

$$\max_{x \in S_F} \frac{|G|}{|v|} L(S_F) \leqq K \mid x' - x'' \mid = K \mid h \mid$$

y del mismo modo

$$\left| \int_{S_F} G\, dt \right| = K \mid x' - x'' \mid = K \mid h \mid$$

luego

$$- K \mid h \mid \leqq V(x') - V(x'') \mid \leqq K \mid h \mid$$

o sea

$$\mid V(x') - V(x'') \mid \leqq K \mid h \mid$$

que, tanto si $x'$ es $x$ como si es $x + h$ nos dá

$$\mid V(x + h) - V(x) \mid \leqq K \mid h \mid$$

y esto prueba la continuidad de $V(x)$.

Cuando además de ser la función valor $V(x)$ continua, es diferenciable, puede enunciarse el siguiente

*Teorema.* Si en un juego diferencial la función $V(x)$ es diferenciable, el pago correspondiente a una trayectoria $x(t)$ con $t_0 \leqq t \leqq t_1$, puede descomponerse en la siguiente forma

$$\mathscr{P}[x(t)] = V(x^0) + \int_{t_0}^{t_1} M\, dt$$

donde $x^0 = x(t_0)$, $M = M(\varphi, \psi, x) = G + d_t V/dt = G + \sum \frac{dV}{dx_i} v_i$

La demostración es simple pues

$$V(x^0) + \int_{t_0}^{t_1} M\, dt = V(x^0) + \int_{t_0}^{t_1} G\, dt +$$

$$\int_{t_0}^{t_1} d_t V = V(x^0) + \int_{t_0}^{t_1} G\, dt + V[x(t_1)] -$$

$$- V[x(t_0)] = H[x(t_1)] + \int_{t_0}^{t} G\,dt = \mathscr{P}\,[x(t)].$$

Si denotamos por $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ las estrategias óptimas

$$\bar{\varphi} = \bar{\alpha}(x), \qquad \bar{\psi} = \bar{\beta}(x)$$

la función $M\ (\varphi., \psi, x)$ anterior cumple las condiciones que señala el siguiente

*Teorema.* En las condiciones del teorema anterior la función $M\ (\varphi . \psi . x)$ posee las siguientes propiedades

$$M\ (\bar{\varphi} . \bar{\psi} . x) = O$$

$$M\ (\bar{\varphi} . \psi , x) \leqq 0 \leqq M\ (\varphi , \bar{\psi} . x)$$

donde $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ son las estrategias óptimas de P y F.

La demostración es igualmente sencilla pues para la trayectoria óptima $x\ (t)$ que va de $x^0 = x\ (t_0)$ a $x\ (t_1)\ \varepsilon\text{-}T$ se tiene

$$\mathscr{P}\ (\bar{x}\ (t)] = V(x^0) = V(x^0) + \int_{t_0}^{t_1} M\,dt$$

luego

$$\int_{t_0}^{t_1} M\,dt = O$$

y tomando $t'$ de modo que $t_0 < t' < t_1$ también resultaría

$$\int_{t'}^{t_1} M\,dt = O$$

de donde se desprende que es $M\ (\bar{\varphi} , \bar{\psi}\ x) = O$.

Ahora de las desigualdades

$$\mathscr{P}\ (\bar{x}_P) \leqq \mathscr{P}\ (\bar{x}) \leqq \mathscr{P}\ (\bar{x}_F)$$

donde $\bar{x}_P , \bar{x} , \bar{x}_F$ van de $\bar{x}(t_0)$ a los puntos $\bar{x}_P\ (t_2)$, $\bar{x}\ (t_1)$, $\bar{x}_F\ (t_3)$ respectivamente, resulta

$$\int_{t_0}^{t_2} M(\overline{\varphi}, \varphi, x)\,dt \leqq 0 \leqq \int_{t_0}^{t_3} M(\varphi, \overline{\varphi}, x)\,dt$$

Como el lado izquierdo vale para todo $\varphi$ tomemos $t'$ de modo que $t_0 < t' < t_2$ y a partir de $t'$ hagamos $\varphi = \overline{\varphi}$, con lo cual quedaría

$$\int_{t_0}^{t'} M(\overline{\varphi}, \varphi, x)\,dt \leqq 0$$

y de ésta por seguir valiendo si se modifican a capricho $t'$ y $t_0$, resulta

$$M(\overline{\varphi}, \varphi, x) \leqq 0;$$ del mismo modo resulta

$$M(\varphi, \overline{\varphi}, x) \geqq 0,$$

y el teorema queda demostrado.