Nota sobre algunos criterios relativos al carácter minimax de estrategias y existencia del valor en juegos contra la Naturaleza

POR

RAMON ARDANUY ALBAJAR y
MARIA DEL MAR SOLDEVILLA MORENO

RESUMEN

En esta nota exponemos y analizamos varios criterios útiles que permiten garantizar el carácter minimax de una estrategia en un juego contra la Naturaleza, así como la existencia del valor de dicho juego. Al final de la misma se aplican a un juego en el que no existen estrategias Bayes (ni puras ni mixtas) pero que sí posee valor así como estrategia minimax, de riesgo no constante, para el decisor.

1. INTRODUCCION Y RESULTADOS PREVIOS

En algunos problemas de la Estadística Matemática, Teoría de Juegos y en general de la Teoría de la Decisión, no resulta sencillo probar directamente el carácter minimax de un estimador, test, función o regla de decisión o de comportamiento, o en general de una estrategia perteneciente a un adecuado espacio de estrategias, por lo que resulta útil conocer criterios que garanticen el carácter minimax de las mismas, ya sean puras o mixtas. En esta nota exponemos y analizamos varios de estos criterios, algunos de cuyos aspectos ya son conocidos en la literatura existente y cuyas aplicaciones particulares en Estadística Matemática pueden consultarse en los textos de Ferguson (1967) y Zacks (1971) principalmente, así como en un reciente trabajo que hemos llevado a cabo. Para la terminología básica y resultados generales, así como para su tratamiento específico en áreas de la Estadística Matemática, podemos hacer referencia, entre otros, a los importantes libros de Wald (1950), Blackwell y Girshick (1954), Owen (1968), De Groot (1970) y Vorob'ev (1977), aparte de los dos citados anteriormente, y, en nuestro idioma. a los excelentes textos de Ríos (1976) e Infante (1976).

Designaremos con ξ el espacio de estrategias del decisor, ξ^* será el conjunto de estrategias mixtas (distribuciones de probabilidad sobre ξ, supuesto que está dotado de una apropiada σ-álgebra), Θ el espacio de estados de la Naturaleza, Θ^* el de las distribuciones a priori sobre Θ (supuesto que está dotado de una σ-álgebra), $L(\theta, e): \Theta \times \xi \to R$ la función de pérdida y $R(\tau, \delta)$ la función de riesgo definida, para $\tau \varepsilon \Theta^*$, $\delta \varepsilon \xi^*$, por:

$$R(\tau, \delta) = \int_{\Theta \times \xi} L \, d(\tau \times \delta) \tag{1}$$

supuesta dicha integral existente.

Si identificamos los estados de la naturaleza y estrategias puras con las correspondientes distribuciones de probabilidad degeneradas, entonces quedan perfectamente definidos los riesgos $R(\theta, \delta)$, $R(\tau, e)$ y $R(\theta, e)$, con $\theta \varepsilon \Theta$, $\tau \varepsilon \Theta^*$, $e \varepsilon \xi$ y $\delta \varepsilon \xi^*$, en particular el último es $L(\theta, e)$.

El siguiente lema establece un resultado que es bastante útil en Teoría de Juegos (ver Vorob'ev (1977), por ejemplo).

Lema 1

Dados los espacios de estrategias mixtas ξ^*, distribuciones a priori Θ^* y función de riesgo R, se verifica:

a) $\sup\limits_{\theta \varepsilon \Theta} R(\theta, \delta) = \sup\limits_{\tau \varepsilon \Theta^*} R(\tau, \delta)$, para todo $\delta \varepsilon \xi^*$

b) $\inf\limits_{e \varepsilon \xi} R(\tau, e) = \inf\limits_{\delta \varepsilon \xi^*} R(\tau, \delta)$, para todo $\tau \varepsilon \Theta^*$

Demostración

Es claro que:

$$\sup_{\theta} R(\theta, \delta) \leqslant \sup_{\tau} R(\tau, \delta) \tag{2}$$

pues cada estado θ puede identificarse con la distribución a priori degenerada en θ, y por otro lado se tiene:

$$\sup_{\tau} R(\tau, \delta) = \sup_{\tau} \int_{\theta \varepsilon \Theta} R(\theta, \delta)\, \tau\, (d\theta) \leqslant \tag{3}$$

$$\leqslant \sup_{\tau} \int_{\Theta} \sup_{\theta} R(\theta, \delta)\, d\tau = \sup_{\theta} R(\theta, \delta)$$

de donde se deduce el apartado a). Análogamente se prueba el b).

2. ALGUNOS CRITERIOS NOTABLES

El siguiente teorema establece el criterio principal a partir del cual deduciremos los demás.

Teorema 1

Si la estrategia $\delta_o \varepsilon \xi^*$ es tal que existe una sucesión de distribuciones a priori $\{\tau_n\} \subset \Theta^*$ verificando:

$$\sup_{\theta \varepsilon \Theta} R(\theta, \delta_o) \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \inf_{e \varepsilon \xi} R(\tau_n, e)$$

entonces el juego (Θ^*, ξ^*, R) tiene un valor V dado por:

$$V = \sup_{\theta} R(\theta, \delta_o) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \inf_{e} R(\tau_n, e)$$

y la estrategia δ_o es minimax.

Demostración

Designado por $\underline{V}$ y $\overline{V}$ los valores inferior y superior de dicho juego vemos que:

$$\overline{V} = \inf_{\delta} \sup_{\tau} R(\tau, \delta) \leqslant \sup_{\tau} R(\tau, \delta_o) = \sup_{\theta} R(\theta, \delta_o) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \inf_{e} R(\tau_n, e) = \inf_{m\geqslant 1} \sup_{n\geqslant m} \inf_{\delta} R(\tau_n, \delta) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 1} \inf_{\delta} R(\tau_n, \delta) \leqslant \sup_{\tau} \inf_{\delta} R(\tau, \delta) = \underline{V} \leqslant \overline{V}$$

por lo que todas las desigualdades de la cadena se convierten en igualdades, deduciéndose de ello el teorema.

Zacks (1971) establece un resultado similar para el carácter minimax de δ_o, aunque para ello incluye la hipótesis adicional de la existencia de la sucesión de estrategias Bayes frente a la sucesión de distribuciones a priori $\{\tau_n\}$. Vemos pues que esta hipótesis adicional es superflua y por tanto el teorema puede establecerse y utilizarse sin necesidad de tener que encontrar dichas estrategias o al menos probar previamente su existencia; al final de la nota vemos un ejemplo para el cual éstas no existen.

Proposición 1

Si δ_n es Bayes frente a τ_n y $\delta_o \varepsilon \xi^*$ verifica:

$$\sup_{\theta} R(\theta, \delta_o) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} R(\tau_n, \delta_n)$$

entonces el juego (Θ^*, ξ, R) tiene un valor V dado por:

$$V = \sup_{\theta} R(\theta, \delta_o) = \overline{\lim_{n\to\infty}} R(\tau_n, \delta_n)$$

y δ_o es minimax.

Demostración

Es consecuencia inmediata del teorema anterior.

La parte relativa al carácter minimax de δ_o es la que anteriormente decíamos que venía establecida en el texto de Zacks. Con respecto a este punto señalemos que Ferguson establece el resultado suponiendo que la sucesión de riesgos Bayes $R(\tau_n, \delta_n)$ es convergente.

Proposición 2

Si δ_o es Bayes frente a τ_o y

$$\sup_{\theta} R(\theta, \delta_o) \leqslant R(\tau_o, \delta_o)$$

entonces el juego (Θ^*, ξ^*, R) tiene un valor V dado por:

$$V = \sup_{\theta} R(\theta, \delta_o) = R(\tau_o, \delta_o)$$

δ_o es minimax y τ_o una distribución menos favorable.

Demostración

Resulta como consecuencia de la proposición anterior sin más que tomar $\delta_n = \delta_o$ y $\tau_n = \tau_o$ para todo n.

En frecuentes problemas ocurre que la estrategia minimax tiene riesgo constante, esto es, independiente de cuál sea el estado θ de la Naturaleza. Para estas situaciones se pueden utilizar los dos criterios prácticos dados a continuación.

Proposición 3

Si δ_o tiene riesgo constante R_o (independiente de $\theta \varepsilon \Theta$) y existe una sucesión $\{\tau_n\}$ de distribuciones a priori de forma que:

$$R_o \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \inf_{e} R(\tau_n, e)$$

entonces el juego (Θ^*, ξ^*, R) tiene un valor V dado por:

$$V = R_o = \overline{\lim_{n \to \infty}} \inf_{e} R(\tau_n, e)$$

y la estrategia δ_o es minimax.

Demostración

Se deduce inmediatamente del teorema 1 ya que:

$$\sup_{\theta} R(\theta, \delta_o) = R_o \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \inf_{e} R(\tau_n, e)$$

Proposición 4

Si δ_o tiene riesgo constante R_o, (independiente de $\theta \varepsilon \Theta$), y es Bayes ampliada, entonces el juego (Θ^*, ξ^*, R) tiene un valor $V = R_o$ y δ_o es una estrategia minimax.

Demostración

Por ser δ_0 Bayes ampliada tenemos que para cada $n = 1, 2, 3\ldots$ existe una distribución a priori τ_n frente a la cual es $(1/n)$-Bayes, por tanto:

$$R_0 = R(\tau_n, \delta_0) \leqslant \inf_{\delta} R(\tau_n, \delta) + \frac{1}{n}$$

en consecuencia:

$$R_0 \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \; \inf_{e} R(\tau_n, e)$$

de donde sin más que aplicar la proposición 3 deducimos la 4.

3. EJEMPLO

Tomemos ξ y Θ numerables siendo:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \{e_0, e_1, e_2, \ldots\} \\ \Theta &= \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\} \end{aligned} \right. \tag{4}$$

y como función de pérdida la dada por la tabla 1, que podemos expresarla por:

$$L(\theta_n, e_m) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} & \text{si } m = 0 \\[2ex] \dfrac{n-1}{n} + \dfrac{1}{m} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} & \text{si } m \geqslant 1 \end{array} \right. \tag{5}$$

TABLA I

L	e_0	e_1	e_2	e_3	....	e_m	......
θ_1	$\frac{1}{2}$	$0 + 1$	$0 + \frac{1}{2}$	$0 + \frac{1}{3}$	....	$0 + \frac{1}{m}$	......
θ_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} + 1$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$	....	$\frac{1}{2} + \frac{1}{m}$	......
θ_3	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3} + 1$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$	....	$\frac{2}{3} + \frac{1}{m}$	......
	....	.....	.....	.....	....	.....	......
θ_n	$n/(n+1)$	$\frac{n-1}{n} + 1$	$\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2}$	$\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3}$	....	$\frac{n-1}{n} + \frac{1}{m}$	......
	....	....	.....	.....	....	.....	......

Vamos a ver que e_0 es minimax en la clase ξ^*, para ello tomemos cualquier $\delta\varepsilon\xi^*$ y seleccionemos θ_n con probabilidad uno, entonces, designando por δ_{ij} a la delta de Kronecker, tenemos:

$$R(\theta_n, e_m) = L(\theta_n, e_m) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\delta_{0m} + \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)(1 - \delta_{0m}) \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\delta_{0m} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(1 - \delta_{0m}) \geqslant 1 - \frac{1}{n} \tag{6}$$

por otro lado:

$$\sup_{n \geqslant 1} L(\theta_n, e_0) = \sup_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \tag{7}$$

con lo cual, de (6) y (7) deducimos que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \inf_{m \geqslant 0} R(\theta_n, e_m) \geqslant \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 = \sup_{n \geqslant 1} L(\theta_n, e_0) \tag{8}$$

por lo que en virtud del teorema 1 podemos asegurar que el juego (Θ^*, ξ^*, R) tiene un valor $V = 1$ y que la estrategia, en este caso pura, e_0 es minimax.

Este juego carece de estrategias Bayes, en efecto, sea τ cualquier distribución a priori, que será de la forma general:

$$\tau = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \dots & \pi_n & \dots \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \dots & \theta_n & \dots \end{pmatrix} \tag{9}$$

designemos con $N : \Theta \to R$ la variable aleatoria definida por $N(\theta_n) = n$ y sea E_τ la esperanza matemática bajo la ley τ. Es claro que como para cada τ existe algún $\pi_{n_0} > 0$ se tiene:

$$0 < E_\tau \left[\frac{1}{N+1}\right] < E_\tau \left[\frac{1}{N}\right] < 1 \tag{10}$$

con lo cual, para e_0, e_m (con $m \geqslant 1$), y $\delta \varepsilon \xi^*$ de la forma general:

$$\delta = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_m & \dots \\ e_0 & e_1 & e_2 & \dots & e_m & \dots \end{pmatrix} \tag{11}$$

se obtienen los riesgos:

$$R(\tau, e_0) = \sum_{n=1}^{\infty} L(\theta_n, e_0)\pi_n = 1 - E_\tau \left[\frac{1}{N+1}\right] \tag{12}$$

$$R(\tau, e_m) = \sum_{n=1}^{\infty} L(\theta_n, e_m)\pi_n = 1 + \frac{1}{m} - E_\tau \left[\frac{1}{N}\right] \tag{13}$$

$$R(\tau, \delta) = \sum_{m=0}^{\infty} R(\tau, e_m)p_m = \left[1 - E_\tau\left(\frac{1}{N+1}\right)\right]p_0 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{m} - E_\tau\left(\frac{1}{N}\right)\right]p_m =$$

$$= p_0\, E_\tau \left[\frac{1}{N(N+1)}\right] + 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\, p_m - E_\tau \left[\frac{1}{N}\right] \tag{14}$$

En virtud del lema 1 y (10) el riesgo Bayes frente a τ puede obtenerse de (13) minimizando dicha expresión respecto a m, con lo cual:

$$\inf_\delta R(\tau, \delta) = 1 - E_\tau \left[\frac{1}{N}\right] \tag{15}$$

y este ínfimo no es alcanzable ya que dado $\delta \varepsilon \xi^*$ siempre existirá algún $p_{m_0} > 0$, siendo (14) estrictamente mayor que (15). Esto significa que ninguna distribución a priori posee estrategia Bayes (ni pura ni mixta), por lo que no podría ser aplicable la proposición 1 para probar el carácter minimax de e_0.

También podemos ver que para este juego no existe una distribución menos favorable, en efecto, por (10) y (15) es:

$$\inf_{\delta} R(\tau, \delta) < 1 \tag{16}$$

para todo τ; el supremo de (16) es justamente el valor inferior del juego, $\underline{V} = 1$ (recordemos que este juego posee valor 1), que al no ser alcanzable implica la no existencia de distribuciones menos favorables.

BIBLIOGRAFIA

ARDANUY, R., y SOLDEVILLA, M. M., *Decisión Equivariante Optima en Poblaciones con Parámetro de Localización y Escala*. Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa (en prensa), 1980.

BLACKWELL, D., y GIRSHICK, M. A., *Theory of Games and Statistical Decisions*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1954.

DE GROOT, M. H., *Optimal Statistical Decisions*, Mc. Graw Hill, New York, 1970.

FERGUSON, T. S., *Mathematical Statistics: a Decision Theoretic Approach*, Academic Press, New York, 1967.

INFANTE, R., *Teoría de la Decisión*. Unidades Didácticas de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, 1976.

OWEN, G., *Game Theory*, Saunders, Philadelphia, 1968.

RÍOS, S., *Análisis de Decisiones*, Ediciones ICE, Madrid, 1976.

VOROBT'EV, N. N., *Game Theory, Lectures for Economists and Systems Scientists*, Springer-Verlag, New York, 1977.

WALD, A., *Statistical Decision Functions*, J. Wiley and Sons, Inc., New York, 1950.

ZACKS, S., *The Theory of Statistical Inference*, J. Wiley, New York, 1971.