Métodos gráficos en la programación lineal *

POR EL

DR. P. ZOROA

Universidad de Murcia

Un problema de programación lineal puede plantearse del siguiente modo.

Se deesa hacer máxima la variable x_0 que se expresa linealmente mediante las variables x_1, x_2, ..., x_n

$$x_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots + c_n x_n \qquad (1)$$

estando las variables independientes x_1, x_2, ..., x_n sometidas a las condiciones

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (2)$$

$$\sum_{1}^{n} a_{ij} x_j = a_{in+1} \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (3)$$

Las *m* igualdades (3) las suponemos compatibles e independientes, es decir, la matriz

(*) Este trabajo se ha realizado con la Ayuda a la Investigación en la Universidad.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

tendrá de característica *m*.

Las m + 1 igualdades (1) y (3) reunidas son

$$\begin{array}{l} -x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2 + \cdots\cdots + a_{0n} x_n = a_{0n+1} \\ \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots\cdots + a_{1n} x_n = a_{1n+1} \\ \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots\cdots + a_{2n} x_n = a_{2n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots\cdots + a_{mn} x_n = a_{mn+1} \end{array} \qquad (4)$$

donde hemos cambiado la notación de la (1).

Conviene tener en cuenta las siguientes definiciones.

Llamaremos una *solución* de (4) a un conjunto de *n* números

$$x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ, \cdots\cdots, x_n^\circ$$

que satisfaga las *m* últimas igualdades de (4); es decir

$$x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots\cdots x_n^\circ) = \begin{bmatrix} x_1^\circ \\ x_2^\circ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^\circ \end{bmatrix}$$

es una solución si vale

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^\circ = a_{in+1}$$

para i = 1, 2, ..., m

El conjunto de todas las soluciones es un subconjunto del espacio R^n que representaremos por S.

Llamaremos *solución factible a toda solución*

$$x^o = (x_1^o, x_2^o, \ldots\ldots, x_n^o)$$

que cumpla la condición adicional de tener no negativas todas sus componentes x_i^o

$$x_i^o \geq O \text{ para } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

El conjunto de todas las soluciones factibles lo representaremos por F.

Diremos que las *m* variables

$$x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots\ldots x_{u_m}$$

forman un conjunto de variables básicas si la matriz de sus coeficientes tiene un determinante no nulo, es decir, si

$$\begin{vmatrix} a_{1u_1} & a_{1u_2} & a_{1u_3} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1u_m} \\ a_{2u_1} & a_{2u_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & a_{2u_m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{mu_m} \ldots\ldots\ldots\ldots & & & a_{mu_m} \end{vmatrix} \neq O$$

Siendo $B_1 = \left\{ x_{u_1}, x_{u_2} \ldots\ldots\ldots, x_{u_m} \right\}$ un conjunto de *m* variables básicas, las restantes variables

$$x_{u_{m+1}} \quad x_{u_{m+2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_{u_n}$$

se llamarán *no básicas.*

Una *sólución básica* es una solución x^0 que tiene la particularidad de que las variables que se consideren no básicas toman valores nulos.

Una solución factible básica es, naturalmente, una solución básica que además sea solución factible.

Una solución óptima, es una solución factible para la cual la variable x_0 toma el valor máximo posible.

También existen las soluciones básicas óptimas.

El conjunto de las soluciones óptimas lo representaremos por O.

He aquí algunas propiedades de estos conjuntos.

Evidentemente vale

$$S \supset F \supset O$$

Además los conjuntos F y O son convexos.

Cada punto extremo de O lo es de F.

Los puntos extremos de F son soluciones básicas. Por tanto también los puntos extremos de O son soluciones básicas.

Si F es acotado queda caracterizado (lo mism que O) por sus puntos extremos, es decir, por las soluciones factibles básicas (o soluciones óptimas básicas si se trata de O).

Pero si F no es acotado es preciso agregar las soluciones factibles impropias; así pues F queda completamente determinado conociendo las soluciones factibles básicas propias e impropias.

METODO DEL SIMPLEX

Según hemos dicho en el problema de la programación lineal debe satisfacerse el sistema

$$\begin{array}{rcl} -x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \dots + a_{0n}x_n & = & a_{0n+1} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & a_{2n+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & a_{mn+1} \end{array} \qquad (4)$$

además de cumplirse las condiciones (2) y que x_0 tome el valor máximo posible.

Nosotros vamos a representar las ecuaciones (4) mediante el siguiente cuadro formado por los coeficientes y términos independientes de las incógnitas del sistema (4):

TABLA 1

-1	a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{0n}	a_{0n+1}
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1n}	a_{1n+1}
	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	a_{2n+1}
	....	....	....	....	
	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	a_{mn+1}

Por ejemplo si fuese m = 3, n = 6 el sistema

$$-x_o + \sum_1^6 a_{oj} x_j = a_{o7}$$

$$\sum_1^6 a_{ij} x_j = a_{i7}, \qquad i = 1, 2, 3$$

quedaría representado por la

TABLA 1a

-1	a_{o1}	a_{o2}	a_{o3}	a_{o4}	a_{o5}	a_{o6}	a_{o7}
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}

Paralelamente a los razonamientos generales aplicados a la Tabla 1, fijaremos las ideas considerando el ejemplo de la Tabla 1a.

Evidentemente nosotros podemos sustituir el sistema (4) por otro equivalente sin que alteremos nuestro problema.

Resulta, entonces, que cualquier fila de la Tabla 1 puede multiplicarse por una constante cualquiera no nula. Y también a cualquier fila de la Tabla 1 se le puede sumar o restar cualquier otra fila multiplicada previamente por una constante.

En el uso de estas transformaciones se basa el método del simplex según vamos a ver.

Se supone que se parte de una solución básica factible. Si las variables básicas son

$$x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots\ldots\ldots x_{u_m}$$

y las no básicas

$$x_{u_{m+1}}, x_{u_{m+2}}, \ldots\ldots\ldots x_{u_n}$$

se puede sustituir el sistema (4) por el

$$-x_o + \sum_1^n b_{oj} x_j = b_{on+1}$$

$$\sum b_{ij} x_j = b_{in+1} \qquad (5)$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

de modo que en este sistema cada variable básica x_{u_r} aparezca sólo en la ecuación

$$\sum b_{rj} x_j = b_{rn+1}$$

pero no en las restantes; es decir

$$b_{iu_r} = \delta_{ir} \qquad r = 1, 2, 3, \ldots, m \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, m$$

En la Tabla que representa el sistema (5)

TABLA 2

-1	b_{01}	b_{02}	....	b_{0n}	b_{0n+1}
	b_{11}	b_{12}	....	b_{1n}	b_{1n+1}
	b_{21}	b_{22}	....	b_{2n}	b_{2n+1}
	....	....	....	....	....
	b_{m1}	b_{m2}	....	b_{mn}	b_{mn+1}

aparecerán por tanto m columnas formadas por ceros excepto un uno, que corresponden a cada una de las variables básicas

$$x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_m}$$

En la práctica todavía podrían suprimirse estas *m* columnas encabezando las filas con las variables $x_{u_1}, \ldots, x_{u_m}$ y las restantes columnas con las variables $x_{u_{m+1}}, \ldots, x_{u_n}$. Pero nosotros para los razonamientos preferimos utilizar la tabla completa.

Fijándonos en el ejemplo de la Tabla 1a, si las variables básicas fuesen x_1, x_2, x_4 y las no básicas x_3, x_5, x_6 la Tabla 1a sería equivalente a la siguiente

TABLA 2a

-1	0	0	b_{03}	0	b_{05}	b_{06}	b_{07}
	1	0	b_{13}	0	b_{15}	b_{16}	b_{17}
	0	1	b_{23}	0	b_{25}	b_{26}	b_{27}
	0	0	b_{33}	1	b_{35}	b_{36}	b_{37}

Una tabla como ésta en que están puestas en evidencia las variables básicas pueden escribirse más brevemente así

TABLA 2b

	x_3	x_5	x_6	
$-x_0$	b_{03}	b_{05}	b_{06}	b_{07}
x_1	b_{13}	b_{15}	b_{16}	b_{17}
x_2	b_{23}	b_{25}	b_{26}	b_{27}
x_4	b_{33}	b_{35}	b_{36}	b_{37}

en donde se prescinde de cada columna compuesta por ceros y un uno. Pero nosotros para los razonamientos conservaremos la Tabla 2a en vez de la más simplificada Tabla 2b.

Al dar valores nulos a las variables no básicas, de la Tabla 2 deducimos que las variables básicas toman los valores particulares

$$x_{u_1} = b_{1n+1}$$

$$\vdots$$

$$x_{u_m} = b_{mn+1}$$

luego si esta solucinó es factible vale

$$b_{in+1} \geq 0 \qquad 1 = 1, 2, 3, \ldots\ldots m$$

Ahora cabe distinguir tres posibilidades:

A) Todos los coeficientes b_{oj} (j = 1, 2, ... n) son no positivos

$$b_{oj} \leq 0. \qquad j = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

luego, por ser

$$x_o = \sum_{1}^{n} b_{oj} x_j - b_{on+1}$$

$$x_j \geq 0 \qquad a = 1, 2, \ldots\ldots n$$

el valor máximo de x_0 será

$$\max_{x \in F} x_o = - b_{on+1}$$

En el caso particular de la Tabla 2a para que se de este caso deberá ser

$$b_{o3} \leq 0, \quad b_{o5} \leq 0, \quad b_{o6} \leq 0$$

y el valor máximo de x_o se obtiene para

$$x_3 = x_5 = x_6 = 0$$

$$x_1 = b_{17}, \quad x_2 = b_{27}, \quad x_4 = b_{37},$$

y resulta

$$\max x_o = - b_{o7}$$

Vemos pues que en este caso el problema está resuelto.

B) Existe un b_{oj} positivo, pero al mismo tiempo que es para un cierto k

$$b_{ok} > 0$$

vale

$$b_{ik} \leq 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots m$$

El máximo de x_o se ve fácilmente que es ∞ con lo que el problema queda resuelto.

Por ejemplo, supongamos que en la Tabla 2a vale

$$b_{o6} > 0$$

$$b_{16} \leq 0$$

$$b_{26} \leq 0$$

$$b_{36} \leq 0$$

lo que implica, haciendo

$$x_3 = x_5 = 0, \quad x_6 = M > 0$$

que vale

$$x_1 = b_{17} - b_{16} M \geq 0$$

$$x_2 = b_{27} - b_{26} M \geq 0$$

$$x_4 = b_{37} - b_{36} M \geq 0$$

$$x_o = b_{o6} - b_{o7} \to \infty \quad \text{si } M \to \infty$$

C) Supongamos, finalmente, que no se da el caso A) ni el B). Existirá un k tal que

$$b_{ok} > 0$$

mientras que al mismo tiempo valdrá

$$b_{ik} > 0 \qquad \text{algún } i \neq 0$$

En este caso determinaremos el mínimo de los cocientes

$$\frac{b_{in+1}}{b_{ik}} \qquad i \neq 0$$

calculados con b_{ik} positivo. Este mínimo supongamos que vale

$$\frac{b_{hn+1}}{b_{hk}} = \min_{b_{ik} > 0} \frac{b_{in+1}}{b_{ik}}$$

es decir

$$\frac{b_{hn+1}}{b_{hk}} \leqq \frac{b_{in+1}}{b_{ik}} , \qquad \text{si } b_{ik} > 0 , b_{hk} > 0$$

En estas condiciones introduciremos en la base la variable x_k que no era básica, mientras que al mismo tiempo retiraremos de la base la variable x_{u_h}, que figuraba como básica en la ecuación de lugar h + 1, o sea, en la ecuación

$$\sum_{i}^{n} b_{hj} x_j = b_{hn+1} .$$

El coeficiente b_{hk} que está en la ecuación anterior se llamará *pivote* de la transformación que permite introducir la nueva variable básica x_k.

En el ejemplo de la Tabla 2a si suponemos que vale

$$b_{o6} > 0 , \qquad b_{26} > 0 ,$$

$$\frac{b_{27}}{b_{26}} \leqq \frac{b_{i7}}{b_{i6}} \qquad \begin{array}{l} \text{si } b_{i6} > 0 \\ \text{y } i = 1, 2, 3 \end{array}$$

(el pivote es b_{26})

resulta que la variable x_6 la introduciremos en la base mientras que sacaremos de la base la x_2. Para llevar a cabo este cambio empezaremos dividiendo la fila tercera de la Tabla 4 por b_{26} con lo cual dicha tabla se cambia así:

TABLA 2c

-1	0	0	b_{03}	0	b_{05}	b_{06}	b_{07}
	1	0	b_{13}	0	b_{15}	b_{16}	b_{17}
	0	c_{22}	c_{23}	0	c_{25}	1	c_{27}
	0	0	b_{33}	1	b_{35}	b_{36}	b_{37}

Ahora restaremos a las filas 1.ª, 2.ª y 4.ª la 3.ª multiplicada por b_{06}, b_{16}, b_{36} respectivamente con lo que la tabla anterior se convierte en la siguiente

TABLA 3a

-1	0	c_{02}	c_{03}	0	c_{05}	0	c_{07}
	1	c_{12}	c_{13}	0	c_{15}	0	c_{17}
	0	c_{22}	c_{23}	0	c_{25}	1	c_{27}
	0	c_{32}	c_{33}	1	c_{35}	0	c_{37}

y ya están puestas en evidencia las variables básicas x_1, x_6, x_4.

Esta Tabla 3a es fácil comprobar que posee estas dos propiedades:

a) corresponde a una solución básica factible

b) el valor de x_0 para esta solución es igual o mayor que el que correspondía a la Tabla 2a.

En efecto

$$c_{27} = \frac{b_{27}}{b_{26}} \geq 0$$

$$c_{17} = b_{17} - b_{16}c_{27} =$$

$$= b_{17} - b_{16}\frac{b_{27}}{b_{26}} \geq \begin{cases} b_{17} - b_{16}\dfrac{b_{17}}{b_{16}} = 0 & \text{si } b_{16} > 0. \\ b_{17} \geq 0 & \text{si } b_{16} \leq 0 \end{cases}$$

$$c_{37} \geq 0 \qquad \text{(cálculo análogo al de } c_{17}\text{)}$$

y queda probada la propiedad a). Para la propiedad b) se tiene

$$c_{07} = b_{07} - b_{07}c_{27} \leqq b_{07}$$

$$\text{por ser} \quad b_{06} > 0 \quad \text{y} \quad c_{27} \geqq 0$$

luego para la solución básica de la Tabla 3a se tiene

$$\text{valor de } x_0 = -c_{07} \geqq -b_{07}$$

y este último miembro es el valor de x_0 para la solución básica de la Tabla 2a, con lo cual queda demostrada la propiedad b).

De igual modo en este caso C) de la Tabla 2 pasaríamos con análogos razonamientos a la

TABLA 3

-1	c_{01}	c_{02}	....	c_{0n}	c_{0n+1}
	c_{11}	c_{12}	....	c_{1n}	c_{1n+1}
	c_{21}	c_{22}	....	c_{2n}	c_{2n+1}
	c_{m1}	....	....	c_{mn}	c_{mn+1}

que corresponderá a un nuevo conjunto B_2 de variables básicas que mejorará el valor de x_0 (por lo menos x_0 no decrecerá); si no se presentan las circunstancias señaladas en A) o B) para la Tabla 3 se pasará a una nueva tabla por análogo procedimiento.

TABLA 4

-1	d_{01}	d_{02}	....	d_{0n}	d_{0n+1}
	d_{11}	d_{12}	....	d_{1n}	d_{1n+1}
	....	....	....	....	
	d_{m1}	....	....	d_{mn}	d_{mn+1}

con el conjunto B_3 de variables básicas, etc.

De este modo podemos ir pasando de unas soluciones básicas factibles a otras, mejorando el valor de x_0, con lo cual llegaremos a una solución básica óptima, ya que el número de soluciones básicas es finito, pues como máximo pueden existir

$$\binom{n}{m}$$

soluciones básicas.

Se podría objetar a la marcha anterior, que si x_0 no aumenta de modo efectivo podría este procedimiento conducirnos a un círculo vicioso reapareciendo una base ya utilizada. Aunque esto no supondría dificultad si estamos dispuestos a tener en cuenta las bases recorridas y seguir una regla para no repetir los circuitos que se presentan en esta especie de laberinto, se ha propuesto un método que permite eliminar tal posibilidad.

En el método del simplex tradicional a la ecuación en que aparece la variable x_0 a maximizar (que llamaremos ecuación [O]) se le hace intervenir en cada etapa, calculando

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_{u(i)} - c_j \quad (j = 1, \ldots\ldots\ldots n)$$

donde c_j son siempre los coeficientes de la ecuación inicial [O]. Los n-m valores de j de las variables no básicas dan lugar así a

(n-m) h multiplicaciones + (n-m) diferencias si hay h coeficientes $c_{u(i)}$ no nulos. Aquí u(i) es el subíndice de la variable básica que hay en la ecuación i-ésima de la tabla en curso.

Es pues ventajoso tratar la ecuación [O] como las restantes pues los cálculos a realizar son

$$b_{oj} = a_{oj} - a_{oj}\, b_{i_1 j} = a_{oj} - a_{oj_1} \frac{a_{i_1 j}}{a_{i_1 j_1}}$$

j = n + 1, y además
j = subíndices de las nuevas v. básicas que en total hacen
(n − m + 1) productos + (n − m + 1) diferencias

Esto prueba que desde el punto de vista del cálculo es preferible tratar la ecuación [O] como las restantes ecuaciones; además, conceptualmente es más simple esta forma de proceder por lo que resulta más pedagógica su exposición, ya que no precisa de utilizar vectores m-dimensionales sino sistemas de ecuaciones en $n + 1$ variables.

METODO DE LA PERTURBACION ε

Situándonos en el caso de la Tabla 2 que corresponde a una solución básica factible, supongamos que podemos definir unas funciones de la variable ε

$$b_{in+1}(\varepsilon) > 0$$

para sustituir a las constantes b_{in+1} de modo que valga 1.º, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

$$b_{in+1}(\varepsilon) > 0 \qquad (\text{para } 0 < \varepsilon < h)$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots m$$

2.°, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} b_{in+1}(\varepsilon) = b_{in+1}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots m$

y además

3.°, siendo λ_i constantes arbitrarias, no todas nulas, la expresión

$$\sum_{1}^{m} \lambda_i b_{in+1}(\varepsilon) \qquad \text{algún } \lambda_i \neq 0.$$

sólo puede anularse para un número finito de valores de ε

En la práctica tomaremos, como luego veremos, para estas funciones $b_{in+1}(\varepsilon)$ polinomios en ε cuyos coeficientes son números de la Tabla 2:

Ahora resulta que el problema a que se refiere la tabla auxiliar

TABLA 2E

-1	b_{01}	b_{02}	....	b_{0n}	$b_{0n+1}(\varepsilon)$
	b_{11}	b_{12}	....	b_{1n}	$b_{1n+1}(\varepsilon)$
	....	....	....	....	....
	b_{m1}		....	b_{mn}	$b_{mn+1}(\varepsilon)$

plantea para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño un problema de programación lineal en que la solución básica factible da valores positivos a las variables básicas, pues

$$b_{in+1}(\varepsilon) > 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots m$$

por lo que diremos que esta solución es *estrictamente factible:*

Si le aplicamos la discusión seguida en el apartado anterior vemos que en el caso C) de la discusión, tomando ε suficientemente pequeño resulta que el

$$\min_{i} \frac{b_{in+1}(\varepsilon)}{b_{ik}} \qquad \begin{array}{c} b_{ik} > 0 \\ 0 < \varepsilon < h \end{array}$$

sólo puede darse para un solo valor de i, con lo que queda determinada unívocamente la variable a sacar de la base (fijado k).

Además la nueva tabla a que conduce el procedimiento

TABLA 3E

$$\begin{array}{cccc||c}
-1 & c_{o1} & c_{o2} \ldots\ldots & c_{on} & c_{on+1}(\varepsilon) \\
\hline
 & c_{11} & c_{12} \ldots\ldots & c_{1} & c_{1n+1}(\varepsilon) \\
 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
 & c_{m1} & \ldots\ldots & c_{m} & c_{m+1}(\varepsilon)
\end{array}$$

cumple con

$$c_{in+1}(\varepsilon) > 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon < h$$
$$1 \leq i \leq m$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c_{in+1}(\varepsilon) = c_{in+1} \quad ,$$

suponiendo que la Tabla 3 se haya hecho con las mismas variables básicas que la Tabla 3E y también

$$\sum_{1}^{m} \lambda_i \, c_{in\times 1}(\varepsilon) \qquad \text{(algún } \lambda_i \neq 0)$$

sólo se anulará para un número finito de valores de ε; pero además

$$c_{on+1}(\varepsilon) < b_{on+1}(\varepsilon)$$

luego la variable x_0 aumenta efectivamente, para ε bastante pequeño por lo que al reiterar el procedimiento a la Tabla 3E ya no podrá volver a aparecer la Tabla 2E, y queda fuera de toda duda que debe llegarse tras un número finito de etapas de este tipo al caso A) o el B), es decir, quedará resuelto el problema para todo ε euficientemente pequeño, y en particular el problema inicial haciendo $\varepsilon = O$

¿Qué funciones $b_{in+1}(\varepsilon)$ utilizaremos?

Si las variables básicas de la Tabla 2 son

$$x_{u_1} \;,\; x_{u_2} \;,\; \ldots\ldots \;,\; x_{u_m}$$

tomaremos para la Tabla 2E los polinomios en ε

$$b_{in+1}(\varepsilon) = b_{in+1} + \sum_{r=1}^{m} b_{iu_r} \, \varepsilon^{u_r} =$$
$$b_{in+1} + \varepsilon^{u_i}$$

que evidentemente cumplen las condiciones requeridas.

Estos polinomios $b_{in+1}(\varepsilon)$ al pasar a la Tabla 3E se convertirán en

$$c_{in+1}(\varepsilon) = c_{in+1} + \sum_{r=1}^{m} c_{iu_r} \varepsilon^{u_r}$$

y lo mismo si se repite el procedimiento pasando a la

TABLA 4E

— 1	d_{01}	d_{02}	d_{0n}		$d_{0n+1}(\varepsilon)$
	d_{11}	d_{12}	d_{1n}		$d_{1n+1}(\varepsilon)$
	....	....	....		
	d_{m1}	....	d_{mn}		$d_{mn+1}(\varepsilon)$

seguirá siendo

$$d_{in+1}(\varepsilon) = d_{in+1} + \sum_{r=1}^{m} d_{iu_r} \varepsilon^{u_r}$$

etcétera. Es decir, estos polinomios de la Tabla 4E tendrán como coeficientes, los coeficientes que tengan en la Tabla 4E las que eran variables básicas en la Tabla 2.

Esto nos muestra que en realidad para ir manejando los polinomios $b_{in+1}(\varepsilon)$ $c_{in+1}(\varepsilon)$ ... no es preciso hacer más cálculos que los que resultan de ir aplicando el método del simplex a la Tabla 2 sin necesidad de escribir los polinomios en ε.

Es conveniente (aunque no necesario) tomar en la Tabla 2 como variables básicas x_1, x_2, ... x_m (si fuese preciso cambiando la notación de las variables).

De este modo, al ir obteniendo a partir de la Tabla 2 la Tabla 3, Tabla 4, etc. si en alguna etapa del cálculo es preciso hacer consideraciones sobre $c_{in+1}(\varepsilon)$, $d_{in+1}(\varepsilon)$, etc. bastará tener en cuenta que

$$c_{in+1}(\varepsilon) = c_{in+1} + \sum_{1}^{m} c_{ij} \varepsilon^{j}$$

$$d_{in+1}(\varepsilon) = d_{in+1} + \sum_{1}^{m} d_{ij} \varepsilon^{j},$$

etcétera.

Tengamos en cuenta también que sólo se necesitan considerar los polinomios en ε; $c_{in+1}(\varepsilon)$, cuando el mínimo

$$\min_{c_{ir} > 0} \frac{c_{in+1}}{c_{ir}} \qquad\qquad (c_{or} > 0)$$

se alcanza para varios valores de i. Entre estos valores de *i* se determinará aquel para el que se consigue

$$\min_i \frac{c_{i1}}{c_{ir}}$$

si todavía hubiese varios de estos cocientes iguales se determinará entre éstos, aquel que nos de

$$\min_i \frac{c_{i2}}{c_{ir}}$$

etcétera.

INTRODUCCION DE VARIAS VARIABLES EN LA BASE

Comenzaremos viendo una transformación que podemos hacer a cualquier sistema de ecuaciones lineales.

Dado el sistema

$$\sum_j a_{ij} x_j = a_{in+1} \qquad \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \ldots, m \\ j = 0, 1, 2, \ldots, n \end{array} \qquad (6)$$

supondremos que podemos formar el determinante no nulo

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_h} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_h j_1} & a_{i_h j_2} & \cdots & a_{i_h j_h} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces el sistema (6) lo escribiremos separando sus ecuaciones en dos grupos

$$
\begin{aligned}
&\sum a_{i_1 j}\, x_j = a_{i_1 n+1}\\
&\sum a_{i_2 j}\, x_j = a_{i_2 n+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum a_{i_h j}\, x_j = a_{j_h n+1}
\end{aligned}
\qquad (6a)
$$

$$
\sum a_{ij}\, x_j \neq a_{in+1}\,, \qquad i = i_1,\ i_2,\ \ldots\ldots\ i_h \qquad (6b)
$$

Este sistema (6a) + (6b) demostraremos que es equivalente al siguiente sistema formado por las ecuaciones (7a) + (7b)

$$
\begin{vmatrix}
a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots\cdots & a_{i_1 j_h} & \sum\limits_j a_{i_1 j}\, x_j\\
a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots\cdots & a_{i_2 j_h} & \sum\limits_j a_{i_2 j}\, x_j\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
a_{i_h j_1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & a_{i_h j_h} & \sum\limits_j a_{i_h j}\, x_j\\
\delta_{i i_1} & \delta_{i i_2} & \cdots\cdots & \delta_{i i_h} & 0
\end{vmatrix} =
\qquad (7a)
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_h} & a_{i_1\, n+1} \\
a_{i_2 j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{i_2\, n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_h j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{i_h\, n+1} \\
\delta_{i i_1} & \delta_{i i_2} & \cdots & \delta_{i i_h} & 0
\end{vmatrix} \quad i = i_1, i_2, \ldots, i_h
$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_h} & \sum_j a_{i_1 j} x_j \\
a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_h} & \sum a_{i_2 j} x_j \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_h j_1} & \cdots & a_{i_h j_h} & \sum a_{i_h j} x_j \\
a_{i j_1} & \cdots & a_{i j_h} & \sum a_{i j} x_j
\end{vmatrix} = \tag{7b}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_h} & a_{i_1\, n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_h j_1} & \cdots & a_{i_h j_h} & a_{i_h\, n+1} \\
a_{i j_1} & \cdots & a_{i j_h} & a_{i\, n+1}
\end{vmatrix} \quad i \neq i_1, i_2, \ldots, i_h
$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Este sistema formado por las ecuaciones (7a) y (7b) se puede escribir de este modo equivalente

$$\sum_{j} \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots\ldots & a_{i_1 j_h} & a_{i_1 j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_h j_1} & \ldots\ldots & a_{i_h j_h} & a_{i_h j} \\ \delta_{i i_1} & \ldots\ldots & \delta_{i i_h} & 0 \end{vmatrix} x_j = \tag{8a}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots\ldots & a_{i_1 j_h} & a_{i_1\, n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_h j_1} & \ldots\ldots & a_{i_h j_h} & a_{i_h\, n+1} \\ \delta_{i i_1} & \ldots\ldots & \delta_{i i_h} & 0 \end{vmatrix} \quad (i = i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_h)$$

$$\sum \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots\ldots & a_{i_1 j_h} & a_{i_1 j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_h j_1} & \ldots\ldots & a_{i_h j_h} & a_{i_h j} \\ a_{i j_1} & \ldots\ldots & a_{i j_h} & a_{ij} \end{vmatrix} x_j = \tag{8b}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots\cdots & a_{i_1 j_h} & a_{i_1\, n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_h j_1} & \cdots\cdots & a_{i_h j_h} & a_{i_h\, n+1} \\ a_{i j_1} & \cdots\cdots & a_{i j_h} & a_{i\, n+1} \end{vmatrix} \qquad i \neq i_1, i_2, \ldots, i_h)
$$

Probaremos pues la equivalencia del sistema (6a) + (6b) con el sistema (8a) + (8b).

Como las acuaciones (8a) + (8b) son las mismas que (7a) + (7b) bastará comparar el sistema (6a) + (6b) con el (7a) + (7b).

Al desarrollar los determinantes que aparecen en cualquiera de las ecuaciones (7a) o (7b) por la última columna se pone en evidencia que tal ecuación es una combinación lineal de ecuaciones del grupo (6a) + (6b) luego el sistema (7a) + (7b) es consecuencia del (6a) + (6b).

Para demostrar que recíprocamente el sistema (6a) + (6b) es consecuencia del (7a) + (7b) deduzcamos primero que cualquier ecuación del grupo (6a)

$$
\sum a_{i_r j}\, x_j = a_{i_r\, n+1}
$$

es consecuencia de las (7a). Las ecuaciones que resultan en (7a) para

$$
i = i_1,\ i_2,\ \ldots\ldots\ i_h
$$

las multiplicaremos respectivamente por

$$
a_{i_r j_1},\ a_{i_r j_2},\ \ldots\ldots\ a_{i_r j_h}
$$

(bastará multiplicar la última fila de sus determinantes), con lo cual al sumar se obtiene

$$
\begin{vmatrix}
a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_h} & \sum a_{i_1 j} x_j \\
a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_h} & \sum a_{i_2 j} x_j \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_h j_1} & \cdots & \cdots & a_{i_h j_h} & \sum a_{i_h j} x_j \\
a_{i_r j_1} & \cdots & \cdots & a_{i_r j_h} & 0
\end{vmatrix}
=
$$

$$
=
\begin{vmatrix}
a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_h} & a_{i_1\, n+1} \\
a_{i_2 j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{i_2\, n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_h j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{i_h\, n+1} \\
a_{i_r j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

y al desarrollar estos determinantes por la última columna resulta fácilmente una de las ecuaciones (6a). Las ecuaciones (6a) son por tanto consecuencia de las (7a).

Ahora resulta que cualquier ecuación de (6b) se puede obtener como combinación de una de las ecuaciones (7b) y las ecuaciones (6a) pero las (6a) se ha probado que son consecuencia de la (7a), luego cada ecuación (6b) se puede obtener a partir de las (7a) y (7b).

Queda establecida la equivalencia del sistema (6a) + (6b) con el (7a) + (7b), y también la del sistema (6a) + (6b) con el (8a) + (8b).

Vamos a utilizar la siguiente notación

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots\dots & a_{i_2 j_h} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots\dots & a_{i_2 j_h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_h j_1} & \dots & \dots & a_{i_h j_h} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_h \begin{pmatrix} j_k \\ j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots\dots a_{i_1 j_{k-1}} & a_{i_1 j} & a_{i_1 j_{k+1}} & \dots\dots a_{i_1 j_h} \\ a_{i_2 j_1} & \dots\dots a_{i_2 j_{k-1}} & a_{i_2 j} & a_{i_2 j_{k+1}} & \dots\dots a_{i_2 j_h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_h j_1} & \dots\dots a_{i_h j_{k-1}} & a_{i_h j} & a_{i_h j_{k+1}} & \dots\dots a_{i_h j_h} \end{vmatrix} =$$

= determinante que resulta de sustituir en Δ_h los elementos a_{ij_k} por los a_{ij} $(i = i_1,\ i_2,\ \dots\ i_h)$ y además

$$\Delta_h (i,\ j) = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots\dots a_{i_1 j_h} & a_{i_1 j} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_h j_1} & \dots\dots a_{i_h j_h} & a_{i_h j} \\ a_{i j_1} & \dots\dots a_{i j_h} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

determinante que resulta de agregar al Δ_h una última fila con los elementos a_{ij_s} cuyo primer subíndice es i y una nueva columna con los elementos $a_{i_r j}$ cuyo segundo subíndice es j

Con esta notación las ecuaciones (8a) y (8b) se escriben así

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_h \begin{pmatrix} j_k \\ j \end{pmatrix} x_j = \Delta_h \begin{pmatrix} j_k \\ n+1 \end{pmatrix} \qquad (9a)$$

(ecuación para $i = i_k$ $k = 1, 2, 3, \dots h$)

$$\sum \Delta_h (i, j) x_j = \Delta_h (i, n+1) \qquad (9b)$$

(ecuaciones para $i \neq i_1, i_2, \ldots i_h$)

Supongamos ahora que el sistema (6) del que hemos partido es el que corresponde a una solución básica con las variables básicas

$$x_{u(1)}, \quad x_{u(2)}, \quad \ldots\ldots \quad x_{u(m)} \qquad (10)$$

donde $x_{u(i)}$ es la variable básica que figura en la ecuación

$$\sum a_{ij} x_j = a_{in+1}$$

Esto equivale a decir que los coeficientes de $x_{u(i)}$ en (6) son todos nulos excepto el de la ecuación i-esima, o sea

$$a_{ru(i)} = \delta_{ri} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq i \\ 1 & \text{si } r = i \end{cases}$$
$$r = 0, 1, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots m$$

Además vale

$$a_{00} = -1$$
$$a_{i0} = 0 \qquad \text{si } i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

En estas condiciones al llevar nuestro sistema (6) a la forma (9a) + (9b) supondremos que los subíndices que se han utilizado

$$j_1, \ j_2, \ \ldots, \ j_h$$

corresponden a variables

$$x_{j_1}, \quad x_{j_2}, \quad \ldots\ldots \quad x_{jh} \qquad (11)$$

distintas de las (10) (es decir no básicas en (6); pero estas variables (11) en (9a) + (9b) resultan básicas como vamos a comprobar. En efecto el coeficiente de x_{j_r} en (9a) es

$$\Delta_h \begin{pmatrix} j_k \\ j_r \end{pmatrix} = \Delta_h \, \delta_{kr}$$

y en (9b) es

$$\Delta_h (i, j_r) = 0$$

Vemos como las variables (11) son variables básicas que sólo aparecen en las (9a) y no en las (9b). Además cualquier variable básica $x_{u(r)}$ de (10) que no figure en (6a) tendrá nulos los coeficientes de estas ecuaciones (6a) lo que implica que su coeficiente en (9a) es

$$\Delta_h \begin{pmatrix} j_k \\ u(r) \end{pmatrix} = 0; \qquad (j_k = j_1, j_2, \ldots, j_h$$

el coeficiente de la misma variable $x_{u(r)}$ en (9b) es

$$\Delta_h \ (i, u(r) = \Delta_h \delta_{ir}$$

Así pues el sistema (9a) + (9b) escrito en la forma

$$\sum \frac{\Delta_h \begin{pmatrix} j_k \\ j \end{pmatrix}}{\Delta_h} x_j = \frac{\Delta_h \begin{pmatrix} j_k \\ n+1 \end{pmatrix}}{\Delta_h} \qquad (10a)$$

(ecuación para $i = i_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, h$)

$$\sum \frac{\Delta_h \, (i,j)}{\Delta_h} x_j = \frac{\Delta_h \, (i, n+1)}{\Delta_h} \qquad (10b)$$

(ecuación para todo $i \neq i_1, i_2, \ldots, i$)

pone en evidencia las variables básicas

$$x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots\ldots x_{j_h}$$

que figuran como nuevas en las (10a) y las

$$x_{u(i)} \qquad i \neq i_1, i_2, \ldots, i_h, 0$$

que figuran en (10b); han salido, pues de la base, al pasar de (6) a (10a) + + (10b), las variables

$$x_{u(i_1)}, \quad x_{u(i_2)}, \ldots\ldots, x_{u(i_h)}$$

El coeficiente de x_0 en la ecuación de (9b)

$$\sum_j \frac{\Delta_h(0,\ j)}{\Delta_h} x_j = \frac{\Delta_h(0,\ n+1)}{\Delta_h}$$

es

$$\frac{\Delta_h(0,\ 0)}{\Delta_h} = \frac{1}{\Delta_h} \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_h} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_h j_1} & \cdots & a_{i_h j_h} & 0 \\ a_{o j_1} & \cdots & a_{o j_h} & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Ahora bien, para que (10a) + (10b) corresponda a una solución factible debe ser

$$\frac{\Delta_h \begin{pmatrix} j_k \\ n+1 \end{pmatrix}}{\Delta_h} \geq 0 \qquad (j_k = j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_h)$$

$$\frac{\Delta_h(i,\ n+1)}{\Delta_h} \geq 0 \qquad (i \neq i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_h,\ 0) \tag{12}$$

en cuyo caso el valor de x_0 será

$$-\frac{\Delta_h(0,\ n+1)}{\Delta_h}$$

y por tanto esta nueva solución básica será mejor que la dada por (6) si vale

$$-\frac{\Delta_h(0,\ n+1)}{\Delta_h} > -a_{on+1}$$

o sea, suponiendo $\Delta_h > o$, si

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_h} & a_{i_1 n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_h j_1} & \cdots & a_{i_h j_h} & a_{i_h n+1} \\ a_{o j_1} & \cdots & a_{o j_h} & a_{on+1} \end{vmatrix} > a_{on+1}\Delta_h$$

o bien, si

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} \cdots\cdots & a_{i_1j_h} & a_{i_1n+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i_hj_1} & \cdots\cdots & a_{i_hj_h} & a_{i_hn+1} \\ a_{oj_1} & \cdots\cdots & a_{oj_h} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

APLICACION AL CASO h = 1

Si en los razonamientos anteriores tomamos h = 1 será

$$\Delta_1 = a_{i_1j_1}$$

y las condiciones para que la nueva solución básica sea factible y mejore el valor de x_0 son

a)
$$\frac{\Delta_1 \begin{pmatrix} j_1 \\ n+1 \end{pmatrix}}{\Delta_1} = \frac{a_{i_1n+1}}{a_{i_1j_1}} \geq 0$$

b)
$$\frac{\Delta_1 \,(i,\ n+1)}{\Delta_1} = \frac{1}{a_{i_1j_1}} \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1n+1} \\ a_{ij_1} & a_{in+1} \end{vmatrix} \geq 0$$

$$(i \neq i_1)$$

c)
$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1n+1} \\ a_{oj_1} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Suponiendo que es $a_{i_1n+1} > 0$ resulta que debe verificarse por a)

$$a_{i_1j_1} > 0 ;$$

por b)

$$a_{i_1j_1} \quad a_{in+1} - a_{i_1n+1} \quad a_{ij_1} \geq 0 ;$$

esta última queda satisfecha ipso facto si $a_{ij_1} \leq 0$ mientras que si $a_{ij_1} > 0$ equivale a

$$a_{i_1j_1}\, a_{ij_1} \left(\frac{a_{in+1}}{a_{ij_1}} - \frac{a_{i_1n+1}}{a_{i_1j_1}} \right) \geq 0$$

de donde

$$\frac{a_{i_1n+1}}{a_{i_1j_1}} = \min_{a_{ij_1} > 0} \frac{a_{i_1n+1}}{a_{i_1j_1}} ;$$

además c) nos da, suponiendo $a_{i_1n+1} > 0$,

$$a_{oj_1} > 0$$

En resumen hemos encontrado las condiciones

$$\left.\begin{array}{l} a_{i_1j_1} > 0 \\ a_{oj_1} > 0 \\ \dfrac{a_{i_1n+1}}{a_{i_1j_1}} = \min\limits_{a_{ij_1} > 0} \dfrac{a_{in+1}}{a_{ij_1}} \end{array}\right\} \quad \text{A)}$$

Estas condiciones no determinan un único par i_1, j_1. Se ha propuesto como norma para determinar primero j_1 elegir aquel que de el valor mayor posible a a_{oj}

$$a_{oj_1} = \max a_{oj}$$

siendo además

$$a_{oj_1} > 0, \quad a_{ij_1} > 0 \text{ para algún } i$$

y en seguida determinar i_1 por el mínimo que figura en las condiciones (A).

Para el siguiente método gráfico indicaremos con (0), (1), (2), (3), ..., (n) algún elemento relacionado con cada una de las variables x_0, x_1, x_2, ..., x_n respectivamente y con [0], [1], [2], ..., [m] algún elemento relacionado con las ecuaciones

$$\sum a_{ij} x_j = a_{in+1} \qquad i = 0, \ldots, m$$

respectivamente.

Tomaremos en un papel milimetrado unos ejec OXY.

Podemos trazar las rectas

$$y = a_{1n+1} \quad \text{que señalaremos con } [1]$$

$$y = a_{2n+1} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad [2]$$

....

$$\vdots$$

$$y = a_{m\ n+1} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad [m]$$

Fijemos entre las variables x_j una x_v de modo que se cumpla $a_{ov} > 0$ determinaremos en las rectas [i] acabadas de trazar los puntos Q_{iv} que resultan al cortar la recta [i] con la $x = a_{iv}$ (sólo si $a^{iv} > 0$). Hecho esto, con v fijo, para los posibles valores de i en que $a_{iv} > 0$ resultan los puntos Q_{iv}, y entre éstos llamaremos $P_v = Q_{uv}$ el que haga mínima la pendiente de OQ_{iv}. Llamaremos [u, v) a la recta què va del origen al punto $P_v = Q_{uv}$ acabado de obtener. Cada una de estas rectas [u, v) determina un posible pivote $a_{i_1 j_1}$ para aplicar el método del simplex, pues si $[i_1, j_1)$ es uno de tales pares se cumplen las condiciones (A).

Esta construcción geométrica que define [u, v) puede repetirse utilizando en sustitución de v cada j para el cual sea $a_{oj} > 0$ con lo que se obtienen como rectas [u, v) las

$$[u_1, v_1), \quad [u_2, v_2), \quad \ldots, [u_s, v_s)$$

Es muy fácil geométricamente determinar las ordenadas de estas rectas para

$$x = a_{ov_1}, \quad x_1 = a_{ov_2}, \quad \ldots, \quad x = a_{ov_s}$$

respectivamente. y si la mayor de estas ordenadas resulta para la recta $[u_r, v_r)$ se tomará $[i_1, j_1) = [u_r, v_r)$, o sea

$$i_1 = u_r, \quad j_1 = v_r$$

y se aplicará el método del simplex con el pivote $a_{i_1 j_1}$

La razón de este proceder es la siguiente.

Si se utiliza el pivote a_{uv} el valor de la variable x_0 en el nuevo conjunto de variables básicas es

$$- \frac{\begin{vmatrix} a_{uv} & a_{un+1} \\ a_{ov} & a_{on+1} \end{vmatrix}}{a_{uv}}$$

En principio lo mejor parece pues, que es obtener *u* y *v* de modo que se obtenga el máximo

$$\max_{u,\ v} \ - \frac{\begin{vmatrix} a_{uv} & a_{un+1} \\ a_{ov} & a_{on+1} \end{vmatrix}}{a_{uv},} =$$

$$= \max \left(- a_{on+1} + a_{ov} \frac{a_{un+1}}{a_{uv}} \right) =$$

$$= - a_{on+1} + \text{máx. } (a_{ov} \text{ pendiente } OP_v) =$$

$$= - a_{on+1} + \text{máx. (ordenada de } OP_v = [u, v) \text{ para } x = a_{ov}) =$$

$$- a_{on+1} + \text{ ordenada de } [u_r, v_r) \text{ para } x = a_{ov_r}$$

Luego con $i_1 = u_r$, $j_1 = v_r$ se consigue el máximo incremento para x_0

Supongamos ahora que ya se ha fijado $a_{i_1 j_1}$. Se podría formar la tabla de coeficientes del sistema (10a) + (10b), o bien (9a) + (9b) en la que no se utiliza la división poniendo

$$b_{ij} = \Delta_1 (i, j) = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j} \\ a_{i j_1} & a_{ij} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{i_1 j_1} a_{ij} - a_{i_1 j} a_{i j_1}$$

$$\text{todo} \quad i = 0, \ldots, n, \quad j = 0, 1, \ldots, m$$

excepto para $i = i_1$ que será

$$b_{i_1 j} = \Delta \binom{j_1}{j} = a_{i_1 j}$$

es decir la ecuación $i = i_1$ no se modifica. Se obtendría la misma tabla que resulta del método del simplex pero multiplicados todos sus números por $a_{i_1 j_1}$

Otra norma que puede seguirse también es no calcular en cada cambio de tabla numérica más que los coeficientes de la ecuación [0], la columna $(n + 1)$ y completar las columnas imprescindibles para el cálculo en cada etapa.

Aplicaremos esta forma de resolución gráfica al problema de hacer máxima

$$x_0 = 2x_5 + 4x_6 - x_7 + 5x_8 + 5x_9 - 7$$

con las restricciones

$$5x_1 + 5x_5 + 2x_6 + 9x_7 + 5x_8 + 6x_9 = 9$$
$$3x_2 - x_5 - 3x_6 + 8x_7 + 4x_8 + x_9 = 6$$
$$2x_3 + 4x_5 + 2x_6 - 6x_7 + x_8 - 2x_9 = 5$$
$$x_4 + x_5 + 2x_0 + 3x_7 - x_8 + 4x_9 = 1$$
$$x_i \geq O, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, 9$$

Comenzaremos haciedo el sistema anterior el cambio $5x_1 = x'_1$, $3x_2 = x'_2$, $2x_3 = x'_3$ con lo cual se simplifica y nos resulta la siguiente

TABLA 1A

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
[0]	.	.	.	.	2	4	– 1	5	5	7
[1]	1	.	.	.	5	2	9	5	6	9
[2]	.	1	.	.	—1	—3	8	4	1	6
[3]	.	.	1	.	4	2	—6	1	—2	5
[4]	.	.	.	1	1	2	3	—1	4	1

Siguiendo las instrucciones que hemos indicado anteriormente, se puede construir el gráfico que sirve para pasar de la Tabla 1A a la Tabla 2A.

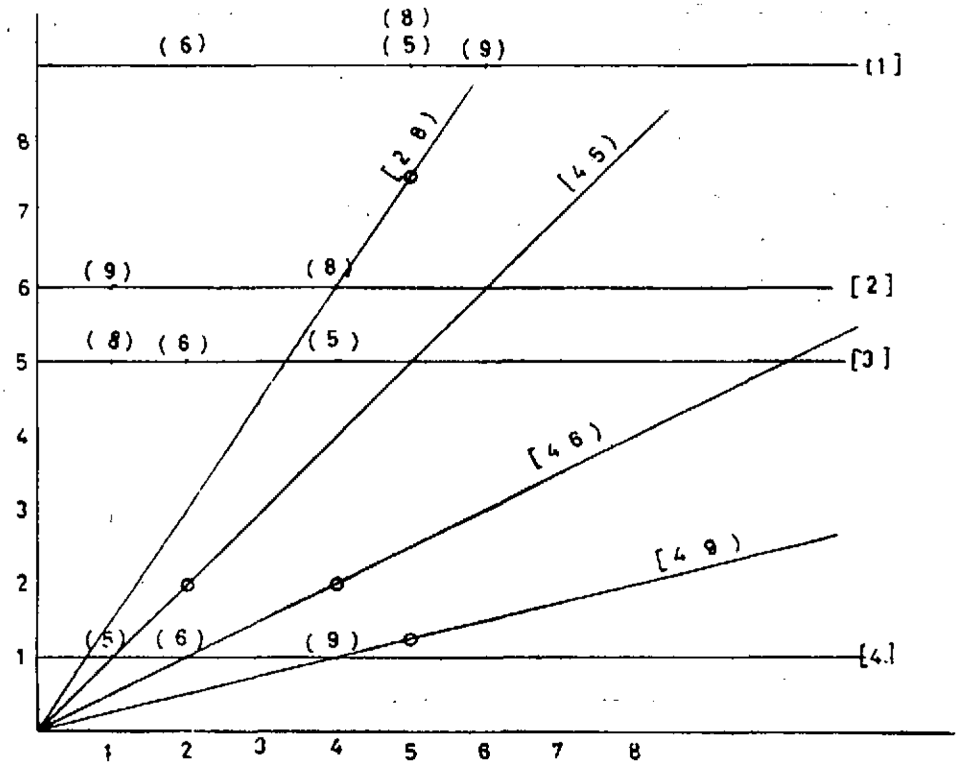


Gráfico para pasar de la TABLA 1A a la TABLA 2A

En este gráfico los cuatro puntos señalados con un circulito en las rectas [2,8), [4,5), [4,6), [4,9), demuestran que el de mayor ordenada es el de la [2,8), luego el pivote es el elemento $a_{28} = 4$. Es decir, entrará en la base la variable x_8, y saldrá la x'_2.

A partir de la Tabla 1A se obtiene la siguiente

TABLA 2A

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
[0]	.	—5	.	.	13	31	—44	.	15	—2
[1]	4	—5	.	.	25	23	—4	.	19	6
[2]	.	1	.	.	—1	—3	.	4	1	6
[3]	.	—1	4	.	17	11	.	.	—9	14
[4]	.	1	.	4	3	5	.	.	17	10

Esta Tabla está formada a partir de la A1 escribiendo la misma fila [2] y los demás elementos b_{ij} por la fórmula

$$b_{ij} = a_{ij} \; a_{i_1 j_1} - a_{ij_1} \; a_{i_1 j}$$

De momento basta con escribir la fila [0], columna (10) y las columnas (5), (6) y (9) que están encabezadas por números positivos, dejando pendientes de cálculo las (2) y (7) Las variables básicas en 2A son (1), (3), (4) y (8) como se observa por las columnas formadas por ceros y un 4.

A partir de la Tabla 2A formamos el gráfico para pasar de esta Tabla 2A a la 3A, con el cual se verá qué elemento se debe elegir como nuevo pivote en la Tabla 2A.

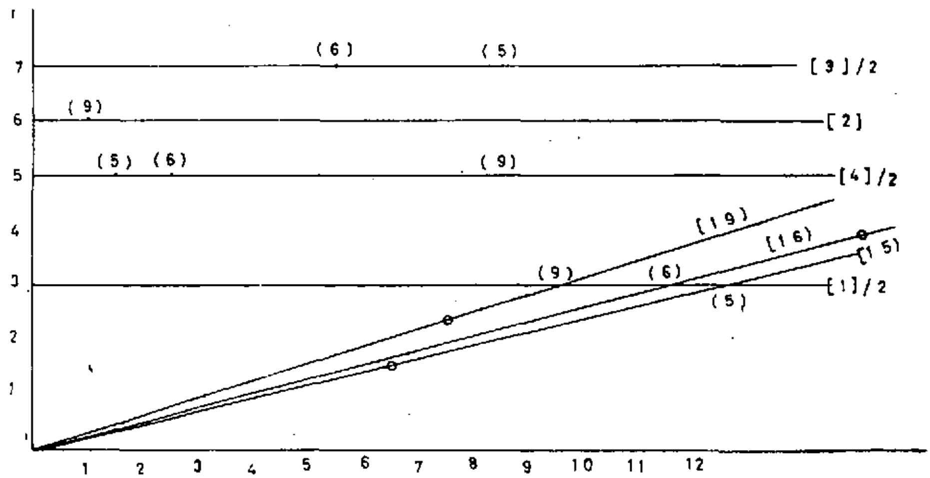


Gráfico para pasar de la TABLA 2A a la TABLA 3A

Los tres puntos señalados con un circulito en las rectas [1,5), [1,6), [1,9) corresponden a las abcisas igual a la mitad de los términos positivos correspondientes en la fila [0]. De estos tres puntos el de mayor ordenada coresponde a la recta [1,6) luego el nuevo pivote es $b_{16} = 23$.

Ahora se hace imprescindible el calcular los dos elementos que faltan en la fila [1] de las columnas (2) y (7). Con ellos ya se puede pasar a la siguiente

TABLA 3A

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
[0]	—124	40	.	.	—476	.	—888	.	—244	—232
[1]	4	—5	.	.	25	23	—4	.	19	6
[2]		8	.	.		.		92		156
[3]		32	92	.		.		.		256
[4]	— 20	48	.	92	—56	.	480	.	296	200

El pivote en esta Tabla está en la fila [4] columna (2), y es el número 48.

Es preciso completar la fila [4] de la Tabla 3A y se pasaría a formar la Tabla siguiente.

TABLA 4A

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
[0]	—	.	.	—	—	.	—	.	—	–19136
[1]		.	.			1104		.		1.288
[2]		.	.			.		4416		5.888
[3]		.	4416			.		.		5.888
[4]		48	.			.		.		200

pero se comprueba sin necesidad de efectuar cálculos que son negativos los elementos de la fila [0] que corresponden a las variables no básicas lo que prueba que se ha alcanzado la solucón óptima que se obtiene para

$$x'_1 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_7 = 0, \quad x_9 = 0$$

y resulta

$$x'_2 = 3x_2 = \frac{200}{48}, \; x_2 = \frac{200}{144} = \frac{25}{18} = 1'3888 \ldots$$

$$x'_3 = 2x_3 = \frac{5.888}{4.416}, \; x_3 = \frac{2.944}{4.416} = \frac{2}{3} = 0'6666 \ldots$$

$$x_6 = \frac{1.288}{1.104} = \frac{7}{6} = 1'1666 \ldots$$

$$x_8 = \frac{5.888}{4.416} = \frac{4}{3} = 1'3333 \ldots$$

$$x_0 = \frac{19.136}{4x23x48} = \frac{19.186}{4.416} = \frac{13}{3} = 4'3333 \ldots$$

Como comprobación resulta de la ecuación inicial de x_0

$$x_0 = 2x_5 + 4x_6 - x_7 + 5x_8 + 5x_9 - 7 =$$

$$4 \times 1'1666 \ldots + 5 \times 1'3333 \ldots - 7 = 4'3333 \ldots$$

Otras dos comprobaciones convenientes se obtienen de las filas [2] y [3] de la Tabla 1A o sea, de las ecuaciones de partida que contienen x_2 y x_3 con coeficiente no nulo.

APLICACION PARA h = 2

Partiendo del sistema (6), la introducción directa de dos variables en la base quedará determinada eligiendo apropiadamente los subíndices i_1, j_1, i_2, j_2 que definen el determinante

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{vmatrix}$$

de modo que se cumplan las condiciones correspondientes (12).

A priori no puede afirmarse que la determinación directa de i_1, j_1, i_2, j_2 conduzca al mismo resultado que la introducción primero de i_1, j_1 por el método anterior y después i_2, j_2 por el mismo método.

Supongamos, por ejemplo, que tenemos las variables x_1, x_2, ..., x_9 y que se tiene las siguientes variables básicas factibles, con su valor de x_0

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ \ldots\ldots\ x_0 = 3$$

y que el mejor cambio de una variable conduce a

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_5 \ \ldots\ldots\ x_0 = 6$$

y ahora el mejor cambio conduce a

$$x_1,\ x_2,\ x_6,\ x_5 \ \ldots\ldots\ x_0 = 8$$

En estas condiciones no es imposible que la mejor sustitución directa de dos variables, partiendo del primer grupo conduza a

$$x_1\,,\ x_2\,,\ x_6\,,\ x_7 \ldots\ldots x_0 = 20$$

a pesar de valer, por ejemplo

$$x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_6 \ldots\ldots x_0 = 5$$

o incluso no ser factible la base x_1, x_2, x_3, x_6; además esta situación no impediría realizar por los algoritmos conocidos los pasos de una a otra base

$$(x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4) \qquad \begin{array}{l}(x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_6)\\ (x_1\,,\ x_2\,,\ x_6\,,\ x_7)\end{array}$$

A pesar de estas ventajas el procedimiento que resulta para $h = 2$ tiene estos inconvenientes: 1.° da lugar a una construcción muy engorrosa en general. 2.° Si el óptimo se consigue con un cambio de una variable sola se realiza un esfuerzo estéril. De todos modos vamos a realizar su estudio.

Las condiciones que deberíamos exigir a i_1, j_1, i_2, j_2 de acuerdo con (12), llamando

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} \\ a_{i_2j_1} & a_{j_2j_2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

son

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & a_{i_1n+1} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & a_{i_2n+1} \\ a_{ij_1} & a_{ij_2} & a_{in+1} \end{vmatrix} \Delta_2 \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{i_1n+1} & a_{i_1j_2} \\ a_{i_2n+1} & a_{i_2j_2} \end{vmatrix} \Delta_2 \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 n+1} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 n+1} \end{vmatrix} \Delta_2 \geq 0$$

y que

$$\frac{-\Delta_2(0,n+1)}{\Delta_2} \text{ aumente lo más posible}$$

Nosotros excluiremos la igualdad en todas las relaciones anteriores. Además, podemos limitarnos a suponer que

$$\Delta_2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{u_1 j_1} & a_{u_1 j_2} \\ a_{u_2 j_1} & a_{u_2 j_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

es un posible determinante Δ_2 y fuese negativo bastará permutar entre sí las dos filas y tomar para Δ_2 al determinante que resulta después de este cambio de filas.

La condición de que sea positivo

$$\Delta_2(i,n+1 = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 n+1} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 n+1} \\ a_{ij_1} & a_{ij_2} & a_{in+1} \end{vmatrix} > 0$$

está expresada geométricamente por el hecho de que el triedro que definen los tres vectores

$$(a_{i_1 j_1}, a_{i_1 j_2}, a_{i_1 n+1}) \quad , \quad (a_{i_2 j_1}, a_{i_2 j_2}, a_{i_2 n+1}),$$

$$(a_{ij_1}, a_{ij_2}, a_{in+1}),$$

que podemos suponer representado en un sistema dextrógiro OXYZ y con el vértice en O, esté orientado a derechas. Como supondremos

$$a_{in+1} > 0 \qquad \text{(todo i)}$$

al cortar el triedro anterior por el plano z = 1 resulta un triángulo que visto desde +OZ tiene también orientación positva (giro contrario al de las agujas de un reloj).

La construcción gráfica que haremos se apoya en esta idea.

Sean v_1 y v_2 dos subíndices de las variables x_j. Sea *u* un número de 1 a m que determina una ecuación de nuestro sistema.

Dibujemos el punto P_{u,v_1,v_2} de coordenadas (a_{uv_1}, a_{uv_2}) en un sistema OXY que tomamos en nuestro papel milimetrado; este punto P_{u,v_1,v_2} junto con la cota a_{un+1} nos determina un punto P^*_{u,v_1,v_2} del espacio cuyas coordenadas son

$$(a_{uv_1}, a_{uv_2}, a_{un+1})$$

El punto P_{u,v_1,v_2} del dibujo lo uniremos con el origen de coordenadas O, y sobre el eje OY (o cualquier otra recta que pase por O) llevaremos a partir de O la longitud a_{un+1} que determina el punto A_u y la unidad que determina el punto U; uniremos A_u con P_{u,v_1,v_2} y trazaremos la pararela a $A_u P_{u,v_1,v_2}$ por U cortando esta paralela en Q_{u,v_1,v_2} a la recta OP_{u,v_1,v_2}.

De este modo el punto Q_{u,v_1,v_2} con la cota 1 representa la intersección de OP^*_{u,v_1,v_2} con el plano z = 1 cuyos puntos tienen la cota 1.

Supongamos hecho esto con todos los valores

$$u = 1, 2, 3, \ldots, m$$

obteniendo así los puntos

$$Q_{1,v_1,v_2}, \quad Q_{2,v_1,v_2}, \quad \ldots\ldots, \quad Q_{m,v_1,v_2}$$

Si son u_1 y u_2 dos valores de u, para que puedan servir para determinar nuestros determinantes Δ_2 deberá ser el triángulo

$$Q_{u_1,v_1,v_2}, \quad Q_{u_2,v_1,v_2}, \quad Q_{u,v_1,v_2}$$

$$\text{todo } u \neq u_1, \; u_2$$

siempre orientado a derechas lo que prueba que los dos puntos

$$Q_{u_1,v_1,v_2}, \quad Q_{u_2,v_1,v_2}$$

no pueden ser más que los que determinen un lado del mínimo polígono convexo que envuelve a todos los puntos Q_{u, v_1, v_2} (u = 1, 2, ..., m).

Este polígono puede designarse por (v_1, v_2).

La condición

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{u_1 v_1} & a_{u_1 v_2} \\ a_{u_2 v_1} & a_{u_2 v_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{u_1 v_1} & a_{u_1 v_2} & a_{u_1\, n+1} \\ a_{u_2 v_1} & a_{u_2 v_2} & a_{u_2\, n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

muestra que $OQ_{u_1, v_1, v_2} Q_{u_2, v_1, v_2}$ debe estar también orientado a derechas lo que excluye del polígono anterior aquellos lados, si los hay, que sean vistos desde el punto O por la parte exterior del polígono (v_1, v_2) considerado anteriormente.

La condición

$$\begin{vmatrix} a_{u_1\, n+1} & a_{u_1 v_2} \\ a_{u_2\, n+1} & a_{u_2 v_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{M} \begin{vmatrix} 0 & a_{u_1 v_2} & a_{u_1\, n+1} \\ 0 & a_{u_2 v_2} & a_{u_2\, n+1} \\ -M & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

(M bastante grande y positivo)

prueba que el lado Q_{u_1, v_1, v_2}, Q_{u_2, v_1, v_2} queda visto desde $-OX$ por la parte interior del polígono, lo que excluye de nuestro polígono convexo todos los lados de la parte izquierda que se ven desde $-OX$ por la parte exterior del polígono.

Análogamente resulta que los lados que desde $-OY$ se ven por la parte exterior del polígono también hay que excluirlos.

Con estas restricciones nos quedarán para i_1, i_2 unos posibles valores determinados por ciertos pares de puntos como por ejemplo

$$Q_{u_1, v_1, v_2} \quad Q_{u_2, v_1, v_2} \, .$$

Ahora entre estos pares u_1, u_2 es preciso seleccionar el que haga máximo el valor de

$$x_0 = - \frac{\begin{vmatrix} a_{u_1 v_1} & a_{u_1 v_2} & a_{u_1 n+1} \\ a_{u_2 v_1} & a_{u_2 v_2} & a_{u_2 n+1} \\ a_{o v_1} & a_{o v_2} & a_{o n+1} \end{vmatrix}}{}$$

$$\begin{vmatrix} a_{u_1 v_1} & a_{u_1 v_2} \\ a_{u_2 v_1} & a_{u_2 v_2} \end{vmatrix}$$

relación que equivale tras sencillos cálculos, a

$$\begin{vmatrix} a_{u_1 v_1} & a_{u_1 v_2} & a_{u_1 n+1} \\ a_{u_2 v_1} & a_{u_2 v_2} & a_{u_2 n+1} \\ a_{o v_1} & a_{o v_2} & a_{o n+1} + x_0 \end{vmatrix} = 0$$

haciendo $z = a_{on+1} + x_0$ vemos que se puede buscar la coordenada z del plano

$$\begin{vmatrix} a_{u_1 v_1} & a_{u_1 v_2} & a_{u_1 n+1} \\ a_{u_2 v_1} & a_{u_2 v_2} & a_{u_2 n+1} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

para $x = a_{ov_1}$, $y = a_{ov_2}$; de este modo la mayor de estas coordenadas al variar v_1, v_2 nos permitiría fijar j_1, j_2, ya que se obtendría $\text{máx}(z) = \text{máx}\,(a_{on+1} + x_0)$ cuando sea máxmo x_0.

La determinación de la coordenada z del plano anterior es factible por el siguiente procedimiento.

Sea A el punto de coordenadas (a_{ov_1}, a_{ov_2}) en el dibujo; uniendo Q_{u_1, v_1, v_2} con $Q_{u_2 v_1 v_2}$ tenemos una recta de cota 1 del plano considerado que corta a OA en A'.

Cuando más cerca caiga A' de O mayor será la tercera coordenada que habrá que considerar como cota de A para que defina un punto del plano considerado. Esto determina un único lado Q_{u_1, v_1, v_2}, $Q_{u_2, v_1 v_2}$ del polígono (v_1, v_2) a partir del cual se buscará fácilmente la cota de A (que numéricamente vale $\frac{OA}{O'A}$). Esto se repetirá para todo v_1, v_2 y la mayor de estas cotas determinará i_1, j_1, i_2, j_2.

Como en el razonamiento anterior es

$$z = a_{on+1} + x_0$$

resulta

$$x_0 = -a_{on+1} + z$$

lo que prueba que el incremento de x_0 viene dado por la cota z.

Esto prueba que si la semirrecta que parte de O y contiene al punto A no corta a la recta $Q_{u_1,v_1,v_2}\, Q_{u_2,v_1v_2}$ (sino que es la semirrecta opuesta la que corta a esta última) resulta que z será negativo y el lado Q_{u_1,v_1,v_2} $Q_{u_2v_1v_2}$ habrá que desecharlo.

Es inmediato que si las dos coordenadas del punto A (a_{ov_1}, a_{ov_2}) son negativas no es preciso considerar en absoluto el par v_1, v_2; pero si una es negativa y la otra positiva puede intervenir el par v_1, v_2 en el estudio aunque se ve fácilmente que la posición de los lados admisibles del polígono que resulte queda más limitada.

La aplicación de estas normas resulta enojosa en general.

En el caso particular en que los datos a que se van a apliar estas reglas cumplen la condición.

$$a_{1n+1} = a_{2n+1} = \dots = a_{mn+1} = 1$$

se simplifica notablemente el procedimiento y puede resultar ventajosa su aplicación. También podría aplicarse el procedimiento dividiendo previamente cada fila [i] por a_{in+1} .

Cuando se haya determinado la matriz pivote que conviene utilizar

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} \end{vmatrix}$$

Se puede comenzar transformando sólo las filas i_1, i_2 de modo que la matriz anterior se transforme en la matriz idéntidad. El procedimiento puede ser el siguiente; representado por $[i_1]$, $[i_1]'$, $[i_1]''$, etc. la fila $[i_1]$, y sus transformadas sucesivas, se calcula

$$\frac{1}{a_{i_1j_1}}\,[i_1] = [i_1]'$$

$$[i_2] - a_{i_2j_1}\,[i_1]' = [i_2]'$$

$$\frac{1}{a'_{i_2j_2}}\,[i_2]' = [i_2]''$$

$$[i_1]' - a'_{i_1j_2}\,[i_2]'' = [i_1]''$$

Con esto las filas $[i_1]$, $[i_2]$ se cambian en $[i_1]''$, $[i_2]''$.

Cualquier otra fila [i] se transforma ahora así

$$[i]'' = [i]' = [i] - a_{ij_1}\,[i_1]'' - a_{ij_2}\,[i_2]''$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m$$

De este modo las nuevas filas [i]" componen la nueva Tabla en que se han cambiado dos variables de la base.

Si aplicamos estas normas a la Tabla 1A empezaremos obteniendo los gráficos (5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 7), (6, 8), (6, 9), (7, 8), (7, 9), (8, 9).

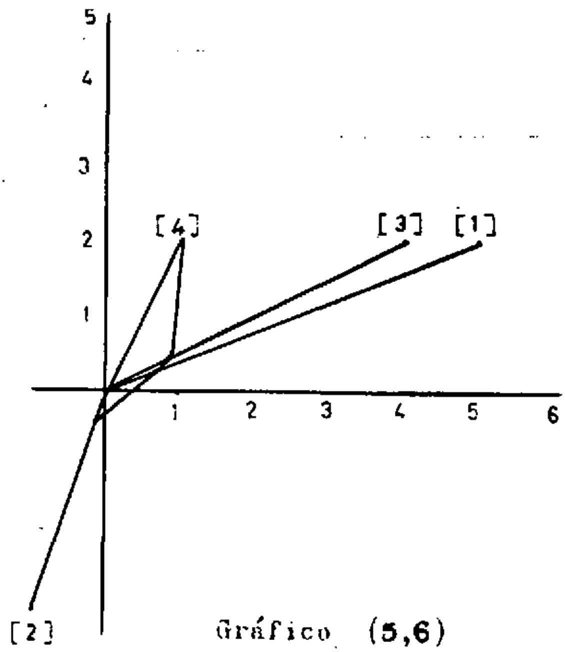


Gráfico (5,6)

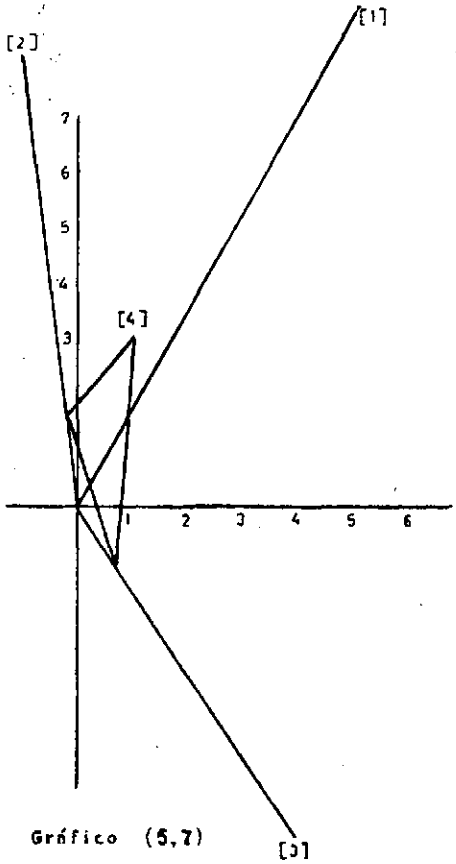


Gráfico (5,7)

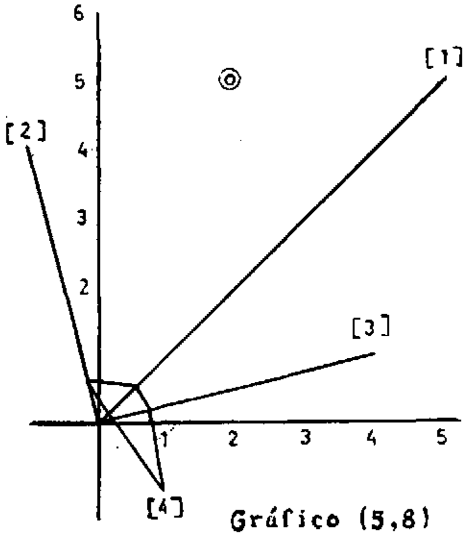


Gráfico (5,8)

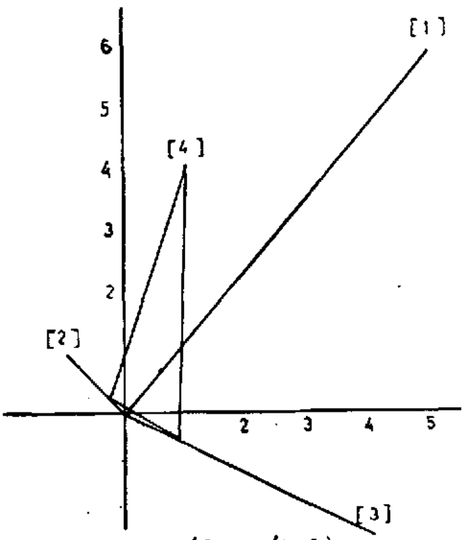


Gráfico (5,9)

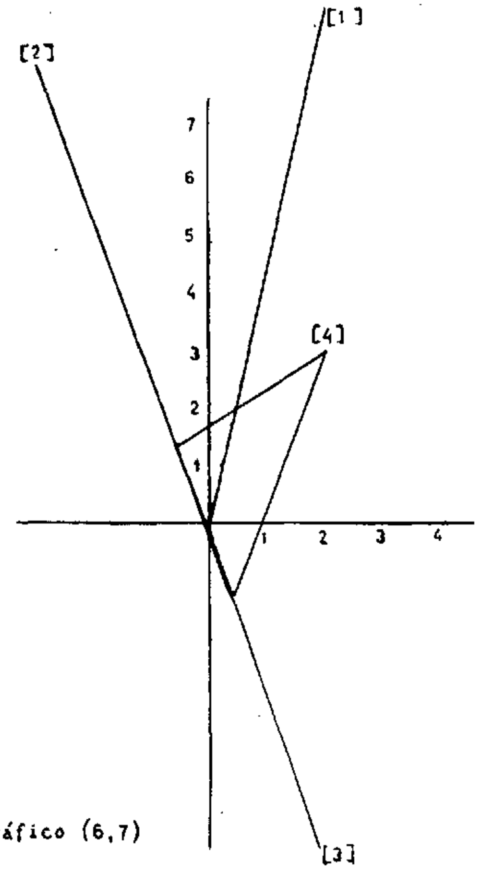


Gráfico (6,7)

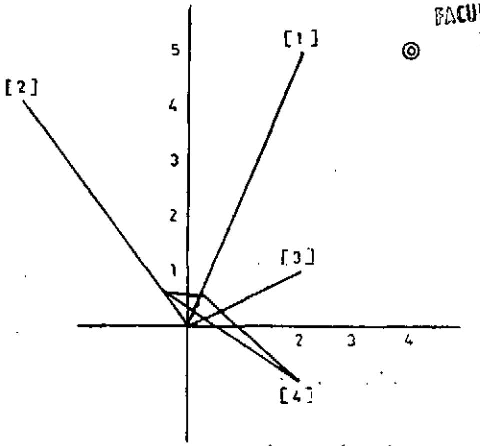


Gráfico (6,8)

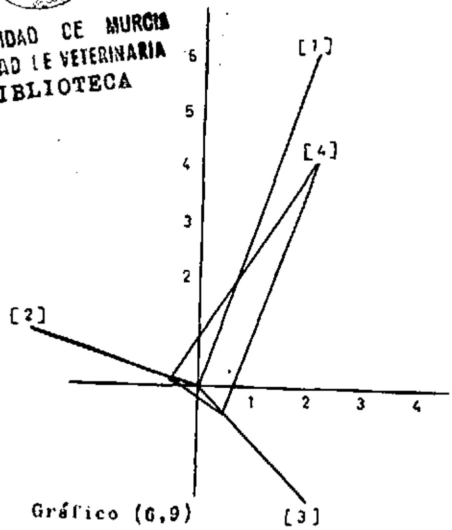


Gráfico (6,9)

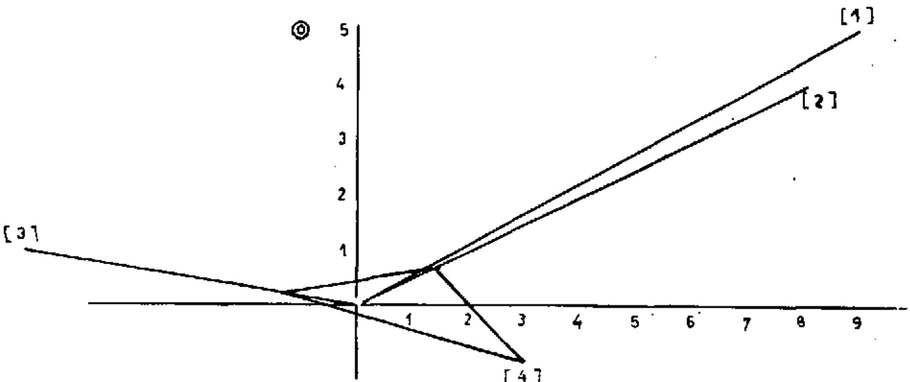


Gráfico (7,8)

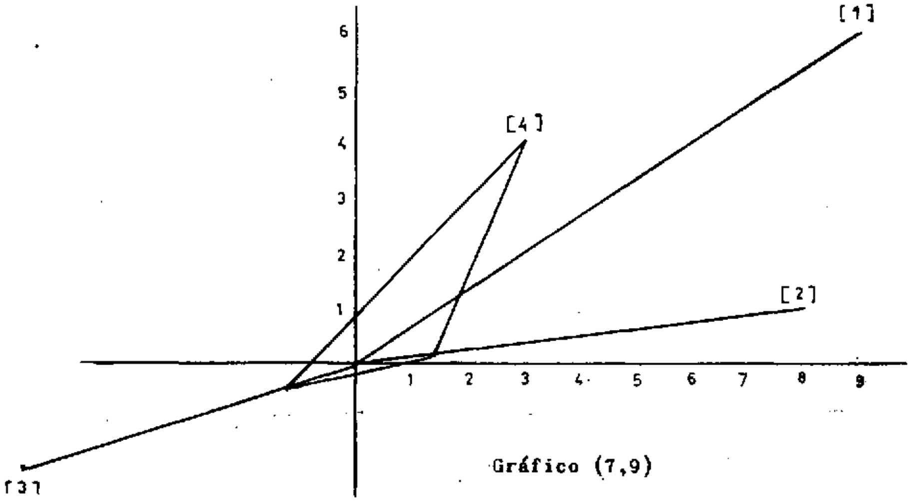


Gráfico (7,9)

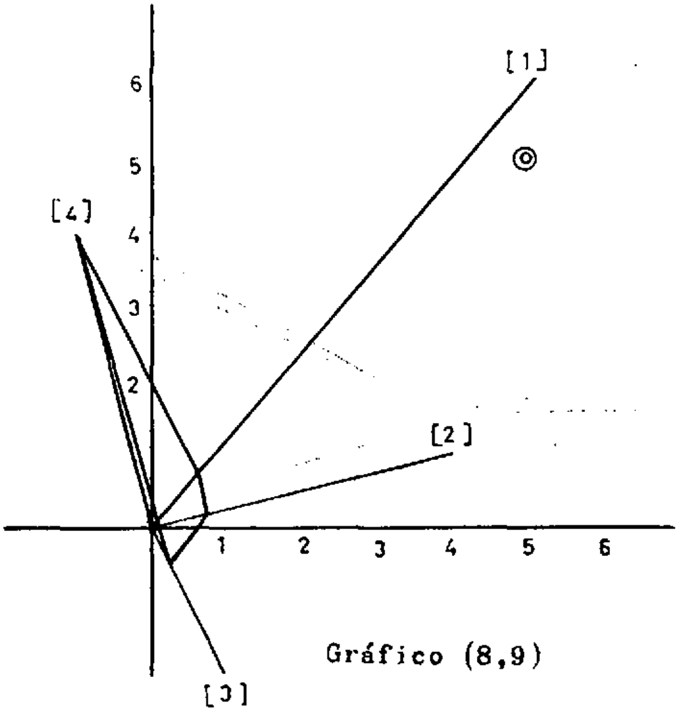
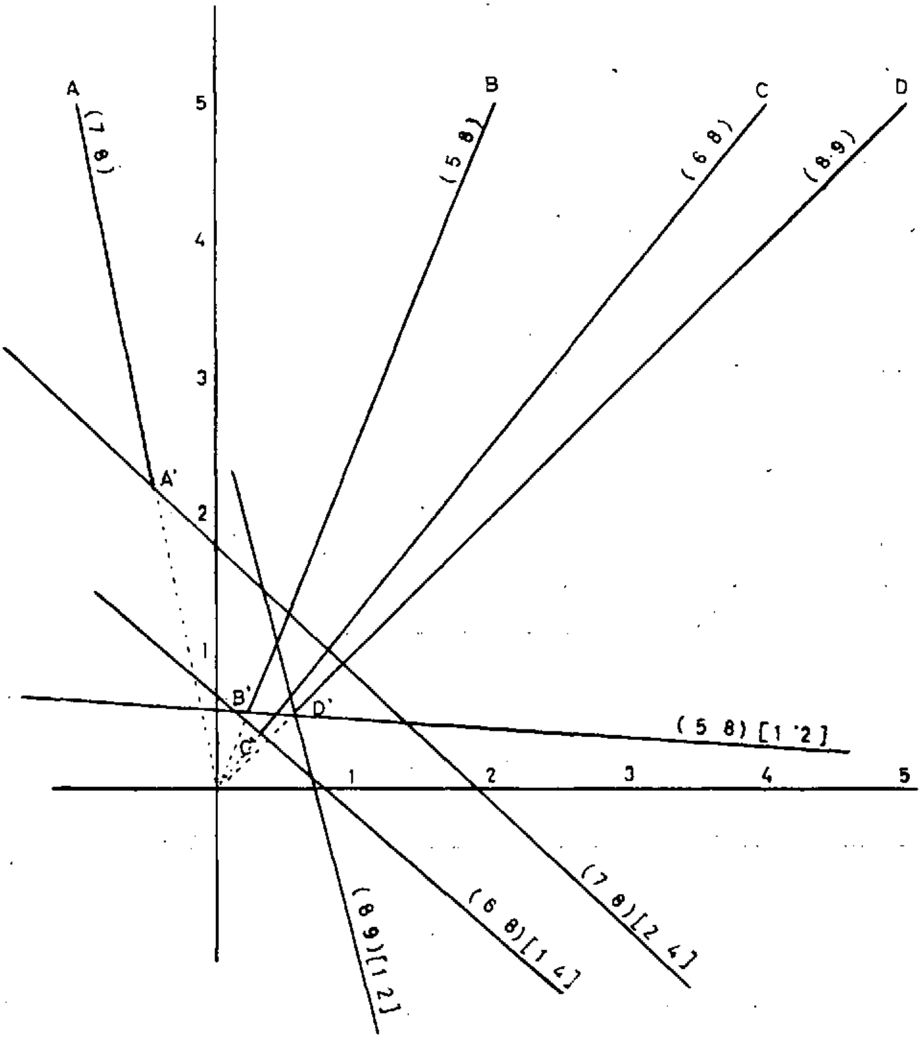


Gráfico (8,9)



Resumen de los Gráficos (5,6) al (8,9)

Estos gráficos muestran que las únicas combinaciones posibles para hacer el cambio son las

(5, 8) [1, 2]
(6, 8) [1, 4]
(7, 8) [2, 4]
(8, 9) [1, 2]

Después se ha hecho un gráfico que resume lo más importante de los anteriores a doble escala y se ve fácilmente que de los cocientes

$$\frac{OA}{OA'}, \quad \frac{OB}{OB'}, \quad \frac{OC}{OC'}, \quad \frac{OD}{OD'}$$

el máximo es $\frac{OC}{OC'}$ que corresponde a la combinación

(6, 8) [1,4]

lo cual nos determina definitivamente las dos variables que entran y las dos que salen de la base, ya que queda determinada la matriz pivote de segundo orden en la Tabla 1A.

Con objeto de evitar decimales calcularemos

$$[1]' = [1] + 5\,[4]$$

$$[4]' = [4] - [1]$$

y dejando pendiente de cálculo las filas [0], [2] y [3] resulta

TABLA 1B' INCOMPLETA

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
[0]										
[1]'	1	.	.	5	10	12	24	.	26	14
[2]										
[3]										
[4]'	—1	.	.	1	—4	.	—6	— 6	—2	—8

Ahora podemos completar esta tabla mediante las siguientes operaciones

$$[0]' = [0] - \tfrac{1}{3}\ [1]' + \tfrac{5}{6}\ [4]'$$
$$[2]' = [2] + \tfrac{1}{4}\ [1]' + \tfrac{4}{6}\ [4]'$$
$$[3]' = [3] - \tfrac{1}{6}\ [1]' + \tfrac{1}{6}\ [4]'$$

o bien

$$[0]'' = 6\ [0] - 2\ [1]' + 5\ [4]'$$
$$[2]'' = 12\ [2] + 3\ [1]' + 8\ [4]'$$
$$[3]'' = 6\ [3] - [1]' + [4]'$$

y resulta

TABLA 1B'

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
[0]''	—7	.	.	—5	—27	.	—84	.	—32	—26
[1]'	1	.	.	5	10	12	24	.	26	14
[2]''	—5	12	.	23	—14	.	120	,	74	50
[3]''	—2	.	6	—4	10	.	—66	.	—40	8
[4]'	—1	.	.	1	—4	.	—6	—6	—2	—8

El coeficiente de x_0 es -6 y como negativo o nulos los elementos de la fila [0] (es indiferente el signo del de la columna (10), el máximo ha sido alcanzado.

La solución obtenida a partir de esta tabla corresponde al máximo siendo los valores de las variables independientes

$$x'_1 = x_4 = {}_5 = x_7 = x_9 = 0$$

$$x'_2 = \frac{50}{12} = 3x_2 \qquad x_2 = \frac{25}{18}$$

$$x'_3 = \frac{8}{6} = 2x_3 \qquad x_3 = \frac{2}{3}$$

$$x_6 = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

$$x_8 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$x_0 = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

En la Tabla 1B' eran innecesarios los elementos de las filas [2] y [3] excepto los de las columnas (2) y (3). Para comprobaciones se utilizaría la Tabla 1A de partida.

Podemos resumir del siguiente modo las conclusiones que hemos obtenido.

1. La ecuación [0] que contiene la variable a maximizar debe ser tratada en los cambios de las Tablas del método del simplex como las restantes ecuaciones, solamente que esta ecuación interviene en el criterio que permite seleccionar las variables que se cambian. Los cálculos se hacen más simples y uniformes y conceptualmente el procedimiento es más comprensible para el que lo aprende.

2. Al estudiar el paso de una Tabla a la siguiente es conveniente hacer un gráfico que determine para cada columna una recta de mínima pendiente entre a lo más m rectas, y después la máxima ordenada de estas rectas que corresponden a ciertas abcisas. Así se consigue obtener el cambio de variable que más incrementa x_0. Con este procedimiento no pueden volver a aparecer conjuntos de variables básicas que tengan m-1 variables comunes con el conjunto ya utilizado.

3. Los cálculos pueden hacerse sin introducir cocientes pues las reglas de cálculo para cada nueva Tabla son las que se siguen para eliminar incógnitas en los sistemas de ecuaciones lineales. Esto podría tener la ventaja de la exactitud de los cálculos mientras no sea grande el número de cifras, pero tiene el inconveniente de que aumenta el número de multiplicaciones en los cálculos.

4. Al confeccionar una tabla a partir de la anterior será preciso calcular los coeficientes de la fila [0] y columna (n + 1). Después se completarán las columnas imprescindibles para pasar a la table siguiente dejando los huecos para si fuese necesario en lo sucesivo ir calculando los números que deben figurar en dichos huecos. Para comprobaciones siempre disponemos del sistema original.

5. Puede intentarse el cambio simultáneo de dos variables de la base. Esto es recomendable si los términos independientes fuesen todos iguales a la unidad (excepto el de la ecuación [0]. El procedimiento gráfico que determina qué par de variables entran en la base y en qué par de ecuaciones quedarán con coeficientes no nulos estas variables se simplifica en ese caso particular. También podrían, estos términos independientes de las ecuaciones, reducirse a la unidad dividiendo cada ecuación por su término independiente. El número de etapas en los cálculos se puede reducir notablemente ya que no podrán volver a aparecer bases que tengan m-2 variables comunes con las bases ya utilizadas.