Función de medias de las distribuciones truncadas

POR

JOSE MARIA RUIZ GOMEZ

Dpto. de Matemáticas y Estadística
Universidad de Murcia

RESUMEN

En la Parte I del presente trabajo, utilizando el concepto de distribuciones truncadas obtenidas de una distribución unidimensional de función de distribución F(x), se introduce el de función de medias y se estudian sus propiedades. En las Partes II y III, limitándonos a distribuciones de tipo continuo y discreto respectivamente, se resuelve completamente la caracterización de las funciones de medias y el problema de inversión de la transformación funcional que se estudia. En IV se expone la relación entre los casos continuo y discreto. Una generalización a dos o más dimensiones la exponemos en la Parte V, estudiando los casos continuo y discreto.

ABSTRACT

In Part I of the present paper and using the concepts of truncated distributions from a unidimensional distribution F(x) we introduce the concept of function of means and study its properties. In Parts II and III and referred only to continuous and discrete distributions, we solve completely the characterization of functions of means and the problem of inversion for the functional transformation that we study. In IV we show the relation between the discrete and continuous case.

A generalization to two or more dimensions is exposed in Part V studying the discrete and continuous case.

INTRODUCCION

En la Parte I del presente trabajo se introducen los conceptos de distribuciones truncadas (I1) obtenidas de una distribución unidimensional de función de distribución dada F(x), y el de función de medias m(x) (I2), construidas a partir de las distribuciones truncadas.

En los I.3, 4, 5 se ven propiedades generales de las funciones de medias m(x) y por consiguiente condiciones necesarias para que una función real dada pueda ser función de medias.

En líneas generales, el problema que se plantea consiste en buscar respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que una función real m(x) sea función de medias de alguna función de distribución F(x)?

b) Si una función real m(x) es función de medias, ¿cuál es la función de distribución F(x) de la cual procede?

La pregunta *b*) anterior lleva implícita esta otra:

c) ¿Pueden dos funciones de distribución distintas producir la misma función de medias?

Si las respuestas a estas preguntas asegurasen una correspondencia biyectiva entre la familia $\mathfrak{F}$ de las funciones de distribución y la familia $\mathscr{M}$ de funciones de medias, habríamos establecido una caracterización de las distribuciones mediante sus funciones de medias análoga a la que existe, por ejemplo, entre las distribuciones y las funciones características.

Para abordar el problema planteado en los interrogantes *a*), *b*), *c*), se ha estudiado el caso de distribuciones continuas en la Parte II, y después el de distribuciones discretas, Parte III, pues nos parece más fácil el caso continuo que el discreto. Esta situación paradójica no es única en la Matemática, pues hay muchas ocasiones en que se presenta.

Una situación que abarque a ambas soluciones discreta y continua depende sin duda del concepto de producto-integral utilizado por V. Volterra [32], G. Peano [19], N. Arley [1] y otros.

En la Parte IV exponemos la relación de los casos continuo y discreto.

Una generalización adecuada a dos o más dimensiones es posible y es expuesta en la Parte V, estudiando también el caso continuo y discreto.

Antecedentes de la fórmula de inversión (II.3.7) hemos encontrado en L. Berzolari [2].

Un estudio más limitado y superficial ha sido hecho por nosotros [23] con el título «Los momentos en las distribuciones truncadas».

Un trabajo análogo es el de P. Zoroa [34] que se refiere a la mediana.

I. DISTRIBUCIONES UNIDIMENSIONALES TRUNCADAS

Generalidades

I.1. *Distribuciones unidimensionales truncadas*

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria real $X : \Omega \rightarrow R$, con función de distribución F definida por:

$$F(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}) = P(X(\omega) \leqslant x) \tag{I.1.1}$$

Para cada x real tal que $F(x) > 0$, el conjunto:

$$A = \{\omega \varepsilon \Omega : X(\omega) \leqslant x\} \varepsilon \mathcal{A} \tag{I.1.2}$$

posee una probabilidad positiva $P(A) = F(x) > 0$, luego no hay dificultad en considerar el nuevo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ donde para cada $C \varepsilon \mathcal{A}$ se define:

$$P_A(C) = P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} \tag{I.1.3}$$

que son las probabilidades condicionadas por el suceso A. Con este espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ la función de distribución de $X = X(\omega)$, que ahora puede recibir el nuevo nombre $U = U(\omega)$ es:

$$F(u/x) = P_A(\{\omega \varepsilon \Omega : X(\omega) \leqslant u\}) =$$

$$= \frac{P(X(\omega) \leqslant u, X(\omega) \leqslant x)}{P(X \leqslant x)} = \frac{P(X(\omega) \leqslant \min(u,x))}{P(X(\omega) \leqslant x)} = \frac{F(\min(u,x))}{F(x)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{F(u)}{F(x)} & \text{si} \quad u \leqslant x \\ 1 & \text{si} \quad u \geqslant x \end{cases} \tag{I.1.4}$$

Esta función de distribución F(u/x), definida para F(x) > 0, *diremos que es la función de distribución de la variable aleatoria X truncada por la derecha en el punto x.*

La condición F(x) > 0 determina el conjunto:

$$\mathcal{D} = \{x : F(x) > 0\} \tag{I.1.5}$$

donde puede variar el parámetro x que interviene en F(u/x).

Proposición I.1.1. El conjunto $\mathcal{D}$ de (1.5) sólo puede ser uno de los tres intervalos siguientes:

$$(-\infty, +\infty) \quad , \quad (\alpha, +\infty) \quad , \quad [\alpha, +\infty)$$

Demostración. El resultado es trivial y se debe a que sólo existen tres posibilidades:

1) que F(x) > 0 para todo x con lo cual $\mathcal{D} = (-\infty, +\infty)$

2) que sea $F(\alpha) = 0$ y $F(\alpha + h) > 0$ para todo h > 0, valiendo entonces $\mathcal{D} = (\alpha, +\infty)$

3) que sea $F(\alpha) > 0$ y $F(\alpha - h) = 0$ para todo h > 0, resultando $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$.

Una vez definida la función de distribución F(u/x) (1.4) a partir de una variable aleatoria X vemos que esta función de distribución F(u/x) no precisa ya para nada del espacio de probabilidad original $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que sirvió para definirla, pues queda determinada por la fórmula (1.4) en el dominio $\mathcal{D}$ (1.5), en que sólo es preciso manejar F(x).

En atención a la observación anterior, en lo sucesivo, dada una función de distribución F(x), estudiaremos la familia de funciones de distribución con el parámetro x

$$F(u/x) = \begin{cases} \dfrac{F(u)}{F(x)} & \text{si} \quad u \leqslant x \\ 1 & \text{si} \quad u \geqslant x \end{cases} \tag{I.1.6}$$

con $x \varepsilon \mathcal{D} = \{x : F(x) > 0\}$.

pasando por alto el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que pudo engendrar estas funciones de distribución.

Definiciones análogas a las distribuciones truncadas por la derecha en el punto x son las siguientes.

Definición I.1.2. Si X es una variable aleatoria de función de distribución F(x), *la función de distribución de X truncada por la izquierda en el punto x* viene dada por

$$F(u/x) = \text{Prob}(X \leqslant u/X \geqslant x) =$$

$$= \frac{\text{Prob}(X \leqslant u,\ X \geqslant x)}{P(X \geqslant x)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\text{Prob}(\phi)}{\text{Prob}(X \geqslant x)} = 0 & \text{si} \quad u < x \\[2ex] \dfrac{\text{Prob}(x \leqslant X \leqslant u)}{\text{Prob}(X \geqslant x)} = \dfrac{F(u) - F(x-)}{1 - F(x-)} & \text{si} \quad u \geqslant x \end{cases} \tag{I.1.7}$$

para $x \varepsilon \mathcal{D} = \{x : F(x-) < 1\}$ (*).

Definición I.1.3. Dada la variable aleatoria X de función de distribución F, la *variable aleatoria X truncada a ambos lados* en los puntos x, y $(x < y)$ tiene la función de distribución

$$F(u/x, y) = \text{Prob}(X \leqslant u/x \leqslant X \leqslant y) = \frac{\text{Prob}(x \leqslant X \leqslant \min(u, y))}{\text{Prob}(x \leqslant X \leqslant y)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P(\phi)}{P(x \leqslant X \leqslant y)} = 0 & \text{si} \quad u < x \\[2ex] \dfrac{P(x \leqslant X \leqslant u)}{P(x \leqslant X \leqslant y)} = \dfrac{F(u) - F(x-)}{F(y) - F(x-)} & \text{si} \quad x \leqslant u \leqslant y \\[2ex] 1 & \text{si} \quad u \geqslant y \end{cases} \tag{I.1.8}$$

(*) F(x—) es la notación para el límite por la izquierda:

$$F(x-) = \lim_{\substack{u \to x \\ u < x}} F(u)$$

donde

$$(x, y)\varepsilon\mathcal{D} = \{(x, y)\varepsilon R^2 : F(y) > F(x-)\} \qquad (I.1.9)$$

Oportunamente extenderemos estas ideas a dos o más dimensiones.

I.2. *Función de medias m(x)*

Sea F(x) una función de distribución unidimensional y F(u/x) la familia de funciones de distribución truncadas por la derecha, definidas por (1.4) en (1.5).

Si llamamos X a la variable aleatoria que tiene la función de distribución F(x), la media de X truncada por la derecha en el punto x, o, dicho brevemente, la media de la función de distribución F(u/x), vendrá dada por

$$m(x) = \int_{(-\infty,x]} u \, d_u F(u/x) \qquad (I.2.1)$$

(para $x\varepsilon\mathcal{D}$)

suponiendo que la integral (2.1) exista para $x\varepsilon\mathcal{D}$.

Esta expresión (2.1) evidentemente depende de x, el punto de truncamiento, por lo que (2.1) define una función m con dominio $\mathcal{D}$ que en lo sucesivo será llamada función de medias por truncamiento por la derecha de la función F(x), o más brevemente «función de medias».

Podríamos establecer esto de modo formal como sigue:

Definición I.2.1. Dada la función de distribución unidimensional F(x) llamaremos *función de medias* (por truncamiento por la derecha) de F(x) a la función m definida para $x\varepsilon\mathcal{D}$ por:

$$m(x) = \int_{(-\infty,x]} u \cdot dF(u/x) = \frac{\int_{(-\infty,x]} u \cdot dF(u)}{F(x)} \qquad (I.2.2)$$

en el supuesto de que exista la integral de Lebesgue-Stieltjes de (2.2) (integral finita).

El caso de variables aleatorias truncadas por la izquierda es, en cierto modo, simétrico del anterior y sus propiedades serán análogas en virtud de esta simetría, por lo que será citado de modo más superficial.

La función de medias por truncamiento por la izquierda se obtendrá utilizando la función de distribución (1.7) y queda establecida en la siguiente definición.

Definición I.2.2. Dada la función de distribución unidimensional F(x), llamaremos función de medias de F(x) (por truncamiento por la izquierda) a la función

$$m^*(x) = \frac{\int_{[x-,\infty)} u \cdot dF(u)}{1 - F(x-)} \tag{I.2.3}$$

en el dominio

$$\mathcal{D} = \{x : F(x-) < 1\} \tag{I.2.4}$$

suponiendo que la integral de (2.3) exista (sea finita).

En (2.3) la integral que interviene es

$$\int_{[x,\infty)} \mu d\mu_F$$

donde μ_F es la medida inducida por F y puede también mirarse como

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \int_{[x-h,\infty)} udF(u) = \int_{[x-,\infty)} udF(u)$$

Del mismo modo, se puede formular la siguiente definición:

Definición I.2.3. Dada la función de distribución unidimensional F(x) llamaremos función de medias de F(x) por truncamiento por ambos lados a la función

$$m(x,y) = \frac{\int_{[x-,y)} udF(u)}{F(y) - F(x-)} \tag{I.2.5}$$

que queda definida en el dominio $\mathcal{D}$ de (1.9).

Ahora podemos formular el objetivo del presente estudio de un modo más técnico del que se expresó en la Introducción.

Sea $\mathfrak{F}$ el conjunto de todas las funciones de distribución unidimensionales para las que existe la integral (con valor finito)

$$\int_{(-\infty,0]} u dF(u) \qquad \text{(I.2.6)}$$

con esta limitación existe la integral de (2.2) para todo x.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las funciones reales m(x) que resultan por (2.2), o sea

$$\mathcal{M} = \{ m : m(x) = \int_{(-\infty,x]} u dF(u)/F(x),\ x \varepsilon \mathcal{D};\ F \varepsilon \mathfrak{F} \}$$

y ω la aplicación de $\mathfrak{F}$ en $\mathcal{M}$

$$\omega : \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{M} \qquad \text{(I.2.7)}$$

definida por (2.2), o sea, $m = \omega(F)$ es la función de medias de F, según la Definición 2.1.

Entonces *nuestro objeto es estudiar la aplicación* ω de (2.7).

Las preguntas formuladas en la Introducción pueden replantearse ahora de modo más preciso.

a) Caracterizar el conjunto $\mathcal{M}$ por propiedades intrínsecas de sus elementos m.

b) Problema básico es el de obtener explícitamente ω^{-1}, o sea, obtener la inversa de (2.7), $F = \omega^{-1}(m)$.

c) El problema anterior contiene implícitamente la cuestión de si ω es una transformación uno a uno o inyectiva, pues de lo contrario, dada una $m \varepsilon \mathcal{M}$, $\omega^{-1}(\{m\})$ sería un subconjunto de $\mathfrak{F}$ no unitario en general.

d) Otra cuestión es la de encontrar los transformados por ω de conjuntos distinguidos de $\mathfrak{F}$, por ejemplo, averiguar cuál es el transformado de las funciones de distribución continuas.

I.3. *Acotación y monotonía de la función m(x)*

Mientras no se diga nada en contra, al hablar de funciones de medias nos referiremos a las funciones de medias por truncamiento por la derecha, o sea a (2.2).

Proposición I.3.1. Sea $m \varepsilon \mathcal{M} = \omega(\mathfrak{F})$ una función de medias. Entonces el dominio $\mathcal{D}$ de *m* sólo puede ser de uno de los tres tipos siguientes

$$(-\infty,\infty) \quad , \quad (\alpha,\infty) \quad , \quad [\alpha,\infty)$$

Demostración. Es consecuencia de la definición I.2.1 y de la Proposición I.1.1.

Proposición I.3.2. Sea $F \varepsilon \mathfrak{F}$ una función de distribución cualquiera y $m = \omega(F)$ su función de medias (2.2). Entonces se verifica para todo $x \varepsilon \mathcal{D}$,

$$m(x) < x \tag{I.3.1}$$

con la única excepción del caso $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$ en el cual vale

$$\begin{array}{lll} m(x) < x & \text{para} & x > \alpha \\ m(x) = \alpha & \text{para} & x = \alpha \end{array} \tag{I.3.2}$$

Demostración. En el caso $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$ y $x = \alpha$ se tiene

$$m(\alpha) = \frac{\displaystyle\int_{(-\infty,\alpha]} u dF(u)}{F(\alpha)} = \frac{\alpha(F(\alpha) - F(\alpha-))}{F(\alpha)} = \alpha$$

y resulta (I.3.2) para $x = \alpha$.

Exluido este caso, $x \varepsilon \mathcal{D}$ implica la existencia de $x' \varepsilon \mathcal{D}$, con $x' < x$, luego

$$m(x) = \frac{1}{F(x)} \int_{(-\infty,x]} u dF(u) =$$

$$= \frac{1}{F(x)} \left(\int_{(-\infty,x']} u dF(u) + \int_{(x',x]} u dF(u) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{F(x)} \left(x'F(x') + x(F(x) - F(x')) \right) <$$

$$< \frac{1}{F(x)} \left(xF(x') + x(F(x) - F(x')) \right) = x$$

ya que $F(x') > 0$ por ser $x' \varepsilon \mathcal{D}$, obteniéndose por tanto (3.2).

Proposición I.3.3. En las condiciones de la Proposición I.3.1 anterior, en los casos.

$$\mathcal{D} = (\alpha, \infty) \quad \text{y} \quad \mathcal{D} = [\alpha, \infty)$$

Se verifica para todo $x \varepsilon \mathcal{D}$

$$m(x) \geqslant \alpha \tag{I.3.3}$$

En (3.3) la igualdad aparece sólo en el caso $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$ si $F(x) = F(\alpha)$, o sea, se tiene

$$m(x) = \alpha \quad \text{si y sólo si} \quad F(x) = F(\alpha) \tag{I.3.4}$$

Demostración. En el caso $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$, llamemos

$$A = \{x : F(x) = F(\alpha) > 0\}$$

(este conjunto puede reducirse al conjunto unitario $\{\alpha\}$).
Entonces si $x \varepsilon A$

$$m(x) = \frac{1}{F(x)} \int_{(-\infty,x]} u dF(u) = \frac{1}{F(\alpha)} \alpha(F(\alpha) - F(\alpha-)) = \alpha$$

y queda probado (3.4). Excluido este caso, si $x \varepsilon \mathcal{D}$ vale

$$F(x) > F(\alpha) \geqslant 0$$

y resulta tomando x' con $\alpha < x' < x$, $F(\alpha) \leqslant F(x') < F(x)$ (existe un tal x' por la continuidad por la derecha en α),

$$m(x) = \frac{1}{F(x)} \int_{(-\infty,x]} u dF(u) = \frac{1}{F(x)} \int_{[\alpha,x]} u dF(u) =$$

$$= \frac{1}{F(x)} \left(\int_{[\alpha,x']} u dF(u) + \int_{(x',x]} u dF(u) \right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{F(x)} \left[\alpha F(x') + x' \left(F(x) - F(x') \right) \right] >$$

$$> \frac{1}{F(x)} (\alpha F(x') + \alpha \left(F(x) - F(x') \right) = \alpha \tag{I.3.5}$$

o sea

$$m(x) > \alpha$$

y queda probada completamente la Proposición.

Consecuencia inmediata de las Proposiciones 3.2 y 3.3 es el siguiente corolario.

Corolario I.3.1. En los casos

$$\mathcal{D} = (\alpha,\infty) \quad \text{y} \quad \mathcal{D} = [\alpha,\infty)$$

se verifica que

$$\lim_{x\to\alpha} m(x) = \alpha \tag{I.3.6}$$

Demostración. Es trivial tomando límites en las desigualdades

$$\alpha \leqslant m(x) < x$$

que resultan de las Proposiciones anteriores.

Lema I.3.1. Sea $F\varepsilon\mathfrak{F}$, $m = \omega(F)$, A y B dos números reales tales que $A\varepsilon\mathcal{D}$, $B\varepsilon\mathcal{D}$, $A \neq \alpha$ en el caso $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$ (esta última equivale a $m(A) < A$ por la Proposición 3.2). Entonces se verifica la siguiente igualdad

$$\frac{A - m(B)}{A - m(A)} - \frac{F(A)}{F(B)} = \frac{(A-\xi)(F(B)-F(A))}{(A-m(A))F(B)} \tag{I.3.7}$$

$$A \leqslant \xi \leqslant B \quad \text{o} \quad B \leqslant \xi \leqslant A$$

donde ξ está entre A y B; y también

$$\frac{A - m(B)}{A - m(A)} \leqslant \frac{F(A)}{F(B)} \tag{I.3.8}$$

valiendo en (3.8) el signo de igualdad en los siguientes casos:

$$\begin{array}{lll} \text{si} \quad A < B & \text{si y sólo si} & F(A) = F(B) \\ \text{si} \quad A = B & \text{siempre} & \\ \text{si} \quad A > B & \text{si y sólo si} & F(A-) = F(B) \end{array}$$

Demostración. Por una parte se tiene

$$m(A) = \frac{\displaystyle\int_{(-\infty,A]} u dF(u)}{F(A)}, \quad m(B) = \frac{\displaystyle\int_{(-\infty,B]} u dF(u)}{F(B)} \tag{I.3.9}$$

Suponiendo $A < B$, resulta de (3.9)

$$F(B)m(B) = F(A)m(A) + \int_{(A,B]} udF(u) \tag{I.3.10}$$

y sustituyendo

$$\int_{(A,B]} udF(u) = \xi(F(B) - F(A)) \tag{I.3.11}$$

con $\qquad A \leqslant \xi \leqslant B$

resulta

$$F(B)m(B) - F(A)m(A) = \xi(F(B) - F(A)) \tag{I.3.12}$$

que restada a la igualdad

$$F(B)A - F(A)A = A(F(B) - F(A)) \tag{I.3.13}$$

conduce a

$$F(B)(A - m(B)) - F(A)(A - m(A)) = (A - \xi)(F(B) - F(A)) \tag{I.3.14}$$

de la cual resulta (3.7) dividiendo por $(A - m(A))F(B) > 0$.

Si fuese $A > B$ de (3.9) resulta

$$F(A)m(A) - F(B)m(B) = \int_{(B,A]} udF(u)$$

y sustituyendo

$$\int_{(B,A]} udF(u) = \xi(F(A) - F(B)) \tag{I.3.15}$$

con $\qquad B \leqslant \xi \leqslant A$

resulta

$$F(A)m(A) - F(B)m(B) = \xi(F(A) - F(B)) \tag{I.3.16}$$

que es la misma forma (3.12) y junto con (3.13) conduce a (3.7).

Demostrada ya (3.7) se obtiene la (3.8) por ser el segundo miembro de (3.7) siempre menor o igual que cero. En efecto, si $A < B$, vale

$$F(A) \leqslant F(B) \quad , \quad A \leqslant \xi$$

por (3.11) y por tanto

$$\frac{(A-\xi)(F(B)-F(A))}{(A-m(A))F(B)} \leqslant 0 \qquad \text{(I.3.17)}$$

y resulta (3.8). Si $A > B$ vale

$$F(B) \leqslant F(A) \quad , \quad \xi \leqslant A$$

por (3.15), luego también vale (3.17).

Probada ya (3.8), vamos a precisar cuándo en esta relación vale el signo de igualdad y cuándo el de desigualdad.

Para ello, volveremos a distinguir los dos casos:

1.º $A < B$. Si $F(A) = F(B)$ el segundo miembro de (3.7) es cero y por tanto vale la igualdad en (3.8). Si fuese $F(A) \neq F(B)$ será $F(B) - F(A) > 0$ evidentemente, y además $A < \xi$, que se deduce de la integral (3.11)

$$\int_{(A,B]} udF(u) = \xi(F(B) - F(A)) > A(F(B) - F(A)) \qquad \text{(I.3.18)}$$

La última desigualdad es consecuencia de lo siguiente: la continuidad por la derecha de $F(x)$ en $x = A$ asegura la existencia de un x' tal que

$$A < x' < B, F(A) \leqslant F(x') < F(B)$$

con lo cual

$$\int_{(A,B]} udF(u) = \int_{(A,x']} udF(u) + \int_{(x',B]} udF(u) \geqslant$$

$$\geqslant A(F(x') - F(A)) + x'(F(B) - F(x')) >$$

$$> A(F(x') - F(A)) + A(F(B) - F(x')) = A(F(B) - F(A))$$

y se obtiene la desigualdad de (3.18) y queda acabado el caso $A < B$:

2.º Si $A > B$ y fuese $F(A-) = F(B)$ resulta para la integral (3.15)

$$\xi(F(B) - F(A)) = \int_{(B,A]} udF(u) = A(F(A) - F(A-)) =$$

$$= A(F(A) - F(B))$$

que permite asegurar: o $F(A) = F(B)$ y (3.7) es cero, o $\xi = A$ y también (3.7) es cero, luego valdrá la igualdad en (3.8).

Por otra parte, si $A > B$ pero $F(A-) > F(B)$ valdrá $F(B) - F(A) \leqslant \leqslant F(B) - F(A-) < 0$ y sólo nos falta demostrar que $\xi < A$, para comprobar que (3.7) es negativa.

Ahora, por la definición de límite por la izquierda, existe un x' tal que

$$B < x' < A \qquad\qquad F(B) < F(x') \leqslant F(A-)$$

de donde para la integral (3.15) se tiene

$$\xi(F(A) - F(B)) = \int_{(B,A]} u dF(u) = \int_{(B,x']} u dF(u) + \int_{(x',A]} u dF(u) \leqslant$$

$$\leqslant x'(F(x') - F(B)) + A(F(A) - F(x')) < A(F(x') - F(B)) + A(F(A) - F(x')) =$$

$$= A(F(A) - F(B))$$

de donde se sigue $\xi < A$ y queda probado que (3.7) es negativo y vale la desigualdad en (3.8).

Como el caso $A = B$ es trivial el lema queda probado en su totalidad.

Proposición I.3.4. Sea $F \varepsilon \mathcal{F}$ y $m = \omega(F)$ entonces la función de medias $m(x)$ es creciente en sentido amplio, es decir,

$$x_1 \varepsilon \mathcal{D} \quad , \quad x_1 < x_2 \qquad m(x_1) \leqslant m(x_2)$$

pudiendo precisarse que el signo de igualdad en la última relación se presenta si, y sólo si,

$$F(x_1) = F(x_2)$$

Demostración. Para el caso $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$, $x_1 = \alpha$, vale $m(x_1) = m(\alpha) = \alpha$ por la Proposición 3.2 y por la Proposición 3.3

$$m(x_2) \geqslant \alpha = m(\alpha) = m(x_1)$$

valiendo el signo de igualdad si, y sólo si, $F(x_2) = F(\alpha) = F(x_1)$ como específica la misma Proposición 3.3, luego la Proposición es cierta si $x_1 = \alpha$ y $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$.

Excluido este caso será

$$m(x_1) < x_1$$

y aplicando (3.8) del lema anterior con $x_1 = A$, $x_2 = B$ obtenemos

$$\frac{x_1 - m(x_2)}{x_1 - m(x_1)} = \frac{F(x_1)}{F(x_2)} \qquad \text{si} \quad F(x_1) = F(x_2)$$

y

$$\frac{x_1 - m(x_2)}{x_1 - m(x_1)} < \frac{F(x_1)}{F(x_2)} < 1 \qquad \text{si} \quad F(x_1) < F(x_2)$$

luego si

$$F(x_1) = F(x_2) \quad \text{resulta} \quad m(x_1) = m(x_2)$$

y si

$$F(x_1) < F(x_2) \quad \text{resulta} \quad m(x_1) < m(x_2)$$

quedando demostrada la Proposición.

Obsérvese que si $F(x_1) = F(x_2)$ resulta que $F(x)$ es constante en $[x_1,x_2]$; existe entonces un intervalo máximo de la forma $[p,q)$ o $[p,q]$ que contiene al $[x_1,x_2]$ donde F es constante; basta tomar

$$p = \inf \{x : F(x) = F(x_1)\}$$
$$q = \sup \{x : F(x) = F(x_1)\}$$

Este intervalo máximo queda caracterizado por cumplirse

$$F(p - h) < F(p) = F(q-) < F(q + h)$$

$$\text{para todo } h > 0$$

Al hablar de los *intervalos donde F es constante* nos referiremos a estos intervalos máximos. Lo mismo debe entenderse al hablar de los *intervalos donde* una función de medias *m(x) es constante.* El conjunto de los intervalos donde F es constante es numerable y su unión vamos ahora a denotarla por C; evidentemente C es medible Lebesque (aunque su medida puede ser ∞).

Si es P_F la medida de probabilidad asociada a la función de distribución F es evidente que para el interior C° de C vale

$$P_F(C^\circ) = 0$$

pues se cumple para los intervalos (p,q) que componen C°

$$P_F((p,q)) = F(q-) - F(p) = 0$$

Llamaremos *punto de crecimiento* de la función de distribución F(x) a un punto x_0 tal que

$$F(x_0 + h) - F(x_0 - h) > 0 \quad \text{para } h > 0 \tag{I.3.19}$$

y lo mismo para una función de medias m(x), x_0 será de crecimiento de m si

$$m(x_0 + h) - m(x_0 - h) > 0 \quad \text{para } h > 0 \tag{I.3.20}$$

Es inmediato de la Proposición 3.4 el siguiente corolario

Corolario I.3.2. Si $F \varepsilon \mathfrak{F}$ y $m = \omega(F)$, los intervalos donde F es constante son los mismos que los intervalos donde m es constante. Los puntos de crecimiento de F son los mismos que los puntos de crecimiento de m.

Demostración. Siendo [p,q) o [p,q] un intervalo donde F es constante vale

$$F(p - h) < F(p) = F(q-) < F(q + h)$$

$$\text{para todo } h > 0$$

Es evidente por la Proposición 3.4 que esto es equivalente a

$$m(p - h) < m(p) = m(q-) < m(q + h)$$

$$\text{para todo } h > 0$$

de donde resulta una parte del corolario.

También (3.19) y (3.20) son equivalentes por la Proposición 3.4, de donde resulta la segunda parte de nuestro Corolario 3.2, con lo que queda éste demostrado en su totalidad.

Es evidente que el complementario de C°, es el conjunto de los puntos de crecimiento de F, para el cual se tiene

$$P_F((-\infty, \infty) - C^\circ) = 1$$

I.4. *Continuidad de la función m(x)*

Proposición I.4.1. La función de medias $m \varepsilon \mathcal{M}$ es continua por la derecha para todo $x \varepsilon \mathcal{D}$.

Demostración. Debemos ver que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left(m(x_0+h) - m(x_0)\right) = 0 \tag{I.4.1}$$

Pero se tiene (todos los límites son por la derecha para $h \to 0$).

$$\lim(m(x_0+h) - m(x_0)) = \lim\left(\frac{\int_{(-\infty,x_0+h]} udF(u)}{F(x_0+h)} - \frac{\int_{(-\infty,x_0]} udF(u)}{F(x_0)}\right) =$$

$$= \frac{\lim \int_{(-\infty,x_0+h]} udF(u)}{\lim F(x_0+h)} - \frac{\int_{(-\infty,x_0]} udF(u)}{F(x_0)} =$$

$$= \frac{1}{F(x_0)}\left(\int_{(-\infty,x_0]} udF(u) - \int_{(-\infty,x_0]} udF(u)\right) = 0$$

y queda probada la Proposición.

Para los límites por la izquierda da información la siguiente Proposición.

Proposición I.4.2. Si es $m = \omega(F)$, los puntos donde F es continua son los mismos que los puntos en que m es continua.

Debe notarse, sin embargo, que en el caso $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$ F es discontinua en α con el salto

$$F(\alpha) - F(\alpha-) = F(\alpha) > 0$$

pero m (que es continua lateralmente por la derecha) no está definida para $x < \alpha$ por lo que no posee salto.

Demostración. Excluido el caso $x = \alpha$ y $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$ de la nota anterior se tiene para $x_0 \varepsilon \mathcal{D}$, (algún $x_0 - h \varepsilon \mathcal{D}$)

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}(m(x_0)-m(x_0-h))=\lim\left(\frac{\displaystyle\int_{(-\infty,x_0]}udF(u)}{F(x_0)}-\frac{\displaystyle\int_{(-\infty,x_0-h]}udF(u)}{F(x_0-h)}\right)=$$

$$=\frac{\displaystyle\int_{(-\infty,x_0]}udF(u)}{F(x_0)}-\frac{\displaystyle\int_{(-\infty,x_0]}udF(u)}{F(x_0-)} \tag{I.4.2}$$

Si es x_0 un punto de continuidad de $F(x)$ vale

$$F(x_0-)=F(x_0)\quad,\quad \int_{(-\infty,x_0]}udF(u)=\int_{(-\infty,x_0)}udF(u)$$

y resulta cero el límite (4.2), luego un punto de continuidad de F lo es de m.

Sea ahora x_0 un punto de discontinuidad de F llamemos

$$F(x_0)-F(x_0-)=\delta>0$$

y poniendo para abreviar

$$I=\int_{(-\infty,x_0)}udF(u)$$

resulta

$$\int_{(-\infty,x_0]}udF(u)=I+x_0\delta \tag{I.4.3}$$

luego el límite (4.2) es

$$\frac{I+x_0\delta}{F(x_0)}-\frac{I}{F(x_0-)}=\frac{I(F(x_0-)-F(x_0))+x_0\delta F(x_0-)}{F(x_0-)\,F(x_0)}=$$

$$=\frac{\delta(x_0F(x_0-)-I)}{F(x_0-)\,F(x_0)} \tag{I.4.4}$$

por tanto, según esta última expresión, para ver que x_0 es un punto de discontinuidad de m basta ver que $x_0F(x_0-) > I$.

De las hipótesis referentes a $x_0 \varepsilon \mathcal{D}$ (excluido el caso $D = [\alpha, \infty)$, $x_0 = \alpha$) resulta que existe un $x_0 - h$ tal que

$$h > 0 \quad , \quad 0 < F(x_0 - h) < F(x_0)$$

y obtenemos

$$I = \int_{(-\infty, x_0)} udF(u) = \int_{(-\infty, x_0 - h]} udF(u) + \int_{(x_0 - h, x_0)} udF(u) \leqslant$$

$$\leqslant (x_0 - h)F(x_0 - h) + x_0(F(x_0-) - F(x_0 - h)) <$$

$$< x_0F(x_0 - h) + x_0(F(x_0-) - F(x_0 - h)) = x_0F(x_0-)$$

ó sea, $I < x_0F(x_0-)$, con lo que queda demostrado lo que se deseaba.

I.5. *Integrabilidad de $dm(x)/(x - m(x))$*

Lema 1.5.1. Sea $m = \omega(F)$, $a \varepsilon \mathcal{D}$, $m(a) < a$. Entonces vale

$$\inf_{x \geqslant a} (x - m(x)) = K > 0 \tag{I.5.1}$$

Demostración. En primer lugar buscaremos un entorno de $+\infty$ donde la acotación quede asegurada.

Para cualquier $x > a$ vale

$$x - m(x) \geqslant \frac{F(a)}{F(x)}(x - m(a)) \tag{I.5.2}$$

que resulta de (3.8) con $A = x$, $B = \alpha$.

Evidentemente es posible elegir un número $b > a$ tal que se verifique

$$\frac{F(a)}{F(x)}(x - m(a)) > a - m(a) \tag{I.5.3}$$

para $x \geqslant b$

pues el límite del miembro de la izquierda de (5.3) es infinito si $x \to +\infty$.
De (5.2) y (5.3) resulta

$$x - m(x) > a - m(a) \qquad \text{para } x \geqslant b$$

Según esta última propiedad, todos los valores de $x - m(x)$ en $[b,\infty)$ son mayores que un valor de $x - m(x)$ en $[a,b]$, a saber el $a - m(a)$, luego

$$\inf_{x \geqslant a} (x - m(x)) = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} (x - m(x))$$

y, por tanto, para demostrar (5.1) es suficiente demostrar que

$$\inf_{[a,b]} (x - m(x)) = K > 0 \tag{I.5.4}$$

Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión con $x_n \varepsilon [a,b]$ para todo n, tal que

$$\lim_n (x_n - m(x_n)) = K$$

Podemos suponer (x_n) convergente, o sea,

$$\lim_n x_n = x_0 \varepsilon [a,b]$$

pues de lo contrario se tomaría una subsucesión convergente.
Si (x_n) contiene infinitos términos $x_{n_i} \geqslant x_0$ resulta

$$x_{n_i} - m(x_{n_i}) \to x_0 - m(x_0) = K > 0$$

por la continuidad de m por la derecha, y queda probado que $K > 0$.
De lo contrario habrá infinitos términos $x_{m_i} < x_0$ y resulta

$$x_{m_i} - m(x_{m_i}) \to x_0 - m(x_0-) = K \geqslant x_0 - m(x_0) > 0$$

con lo que queda demostrado (5.1) y (5.4).

Lema I.5.2. Si $\dot{m} = \omega(F)$, $a \varepsilon \mathcal{D}$, $m(a) < a$ existe un $h > 0$ tal que para todo x', x'', si

$$a < x' < x'' < x' + h \tag{I.5.5}$$

se cumple

$$x' - m(x'') > h \tag{I.5.6}$$

Demostración. Sea K el número del Lema I.5.1 anterior y $h = \frac{K}{2}$.

Entonces si

$$a < x' < x'' < x' + h$$

se verifica $\quad x' - x'' > -h \quad$ y también

$$x' - m(x'') = (x' - x'') + (x'' - m(x'')) > -h + K = h$$

y queda probado el Lema.

Lema I.5.3. Sea $m = \omega(F)$, $a \varepsilon \mathcal{D}$, $m(a) < a$. Para cualquier sucesión monótona creciente con límite infinito

$$a = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

$$(x_n < x_{n+1} \quad \text{todo } n)$$

la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} \tag{I.5.7}$$

es convergente.

Para alguna sucesión monótona creciente con límite infinito

$$a = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_i - m(x_{i+1})} \tag{I.5.8}$$

es convergente.

Demostración. Para la primera parte del Lema se tiene de (3.8) con $A = x_{i+1}$, $B = x_i$.

$$\frac{x_{i+1} - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} \leqslant \frac{F(x_{i+1})}{F(x_i)}$$

y por tanto

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1} - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} \leqslant \prod_{1}^{n} \frac{F(x_{i+1})}{F(x_i)} = \frac{F(x_{n+1})}{F(x_1)} \leqslant \frac{1}{F(x_1)}$$

luego es convergente el producto de términos mayores que la unidad (o mejor, no menores que la unidad)

$$\prod_{1}^{\infty} \frac{x_{i+1} - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} = \prod_{1} \left(1 + \frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})}\right)$$

y por tanto convergente la serie de términos positivos (5.7), quedando demostrada la primera parte del Lema.

Para la segunda parte, sea h el número que interviene en el Lema 5.2 y la sucesión

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$$

elegida de modo que $x_{i+1} - x_i < h$ para todo i. Tendremos

$$\frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_i - m(x_{i+1})} - \frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_i + 1)} = \frac{(m(x_{i+1}) - m(x_i))\,(x_{i+1} - x_i)}{(x_i - m(x_{i+1}))\,(x_{i+1} - m(x_{i+1}))}$$

y aquí, haciendo intervenir las acotaciones

$$x_{i+1} - x_i < h \quad , \quad x_i - m(x_{i+1}) > h \; ,$$

$$\frac{1}{x_i - m(x_{i+1})} < \frac{1}{h} \quad , \quad \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - m(x_{i+1})} < 1$$

queda

$$\frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_i - m(x_{i+1})} - \frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} < \frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})}$$

luego

$$\frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_i - m(x_{i+1})} < 2\,\frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})}$$

y por tanto la serie (5.8) tiene como mayorante la (5.7) multiplicada por 2, por lo que (5.8) es convergente y queda demostrado el Lema en su totalidad.

Teorema I.5.1. Si es $m = \omega(F)$, $a \varepsilon \mathcal{D}$, $m(a) < a$ la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_{(a,\infty)} \frac{dm(x)}{x - m(x)} \tag{I.5.9}$$

tiene valor finito.

Demostración. La función $x - m(x)$ es medible Lebesgue (es de variación acotada) y positiva en (a,∞). Lo mismo le ocurre a su inversa $\dfrac{1}{x - m(x)}$. Sólo falta comprobar la finitud de la integral (5.9).

El Lema 5.3 en su segunda parte asegura la existencia de una sucesión

$$a \doteq x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$$

para la cual la serie (5.8) es convergente.

Como la función

$$\frac{1}{x - m(x)}$$

cumple la acotación

$$0 < \frac{1}{x - m(x)} < \frac{1}{K}$$

en el intervalo $(a,x_n]$ según el Lema 5.1 y la medida asociada a m, μ_m, nos da un valor finito como medida de $(a,x_n]$.

$$\mu_m((a,x_n]) = m(x_n) - m(a)$$

resulta que existe la integral (con valor finito)

$$\int_{(a,x_n]} \frac{dm(x)}{x - m(x)} = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{(x_i,x_{i+1}]} \frac{dm(x)}{x - m(x)} \tag{I.5.10}$$

pero para $x_i < x \leqslant x_{i+1}$ vale

$$m(x_i) \leqslant m(x) \leqslant m(x_{i+1})$$

luego

$$-m(x) \geqslant -m(x_{i+1})$$

que sumada con $x > x_i$ nos da

$$x - m(x) \geqslant x_i - m(x_{i+1}) \geqslant h > 0$$

(en esta última se utiliza el Lema 5.2)
y por tanto

$$\frac{1}{x - m(x)} < \frac{1}{x_i - m(x_{i+1})}$$

desigualdad que llevada a (5.10) nos da

$$\int_{(a,x_n]} \frac{dm(x)}{x - m(x)} < \sum_{i=1}^{n-1} \int_{(x_i,x_{i+1}]} \frac{dm(x)}{x_i - m(x_{i+1})} =$$

$$= \sum_{1}^{n-1} \frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_i - m(x_{i+1})} < \sum_{1} \frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_i - m(x_{i+1})} < \infty$$

y esta acotación, como $x_n \to \infty$, nos da la finitud de (5.9).

El Teorema 5.1 deja sin contestar lo que le ocurre a la integral

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{dm(x)}{x - m(x)} \tag{I.5.11}$$

Ello requiere un nuevo estudio.

Lema I.5.4. Sea $m = \omega(F)$ para $F\varepsilon\mathcal{F}$ y $a\varepsilon\mathcal{D}$.

1.º Si $\mathcal{D} = (-\infty, \infty)$ existe una sucesión monótona decreciente

$$a = x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$$

para la que se verifica

$$\lim_{n} x_n = -\infty \tag{I.5.12}$$

$$\lim_n \frac{x_{n+1} - m(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} = +\infty$$

2.° Si $\mathcal{D} = (\alpha, \infty)$ existe una sucesión monótona decreciente

$$a = x_1 > x_2 > x_3 > \dots$$

para la que se verifica

$$\lim_n x_n = \alpha$$

$$\lim_n \frac{x_{n+1} - m(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} = +\infty \tag{I.5.13}$$

Demostración. Partamos de cualquier sucesión

$$z_0 = a > z_1 > z_2 > \dots$$

que supondremos cumple con

$$\begin{aligned} &\lim_n z_n = -\infty \qquad \text{en el caso 1.°} \\ &\lim_n z_n = \alpha \qquad \text{en el caso 2.°} \end{aligned} \tag{I.5.14}$$

pues prácticamente el resto de la demostración es el mismo.

Construiremos una nueva sucesión del siguiente modo.

Podemos mantener

$$x_1 = z_0 \quad , \quad x_2 = z_1$$

sin introducir en el intervalo (z_1, z_0) nuevos términos.

En el intervalo $[z_2, z_1]$ la función $x - m(x)$ por el Lema 5.1 cumple una acotación de la forma

$$x - m(x) \geqslant K \qquad \text{en} \quad [z_2, z_1]$$

Si se divide el intervalo $[z_2, z_1]$ en p partes iguales por puntos

$$z_2 = y_p < y_{p-1} < y_{p-2} < \dots < y_1 < y_0 = z_1$$

valdrá

$$y_r - y_{r+1} = h = \frac{z_1 - z_2}{p}$$

pero el número p puede ser elegido de modo que

$$\frac{K}{h} = \frac{pK}{z_1 - z_2} > 2$$

con esta condición, para todo $x \varepsilon [z_2, z_1]$ se cumple

$$\frac{x - m(x)}{y_r - y_{r+1}} > \frac{K}{h} > 2$$

conseguido esto, llamaremos

$$x_2 = y_0 \quad , \quad x_3 = y_1, \ \ldots \ , \ x_{p+2} = y_p = z_2$$

con lo que hemos construido nuestra sucesión hasta el término x_{p+2}.
En el intervalo siguiente $[z_3, z_2]$ volvamos a llamar K a un número tal que $x - m(x) \geqslant K$ y podemos introducir q números equidistantes.

$$z_3 = t_q < t_{q-1} < \ldots < t_1 < t_0 = z_2$$

de modo que

$$t_r - t_{r+1} = h = \frac{z_2 - z_3}{q}$$

pero el número q puede ser elegido de modo que para $x \varepsilon [z_3, z_2]$

$$\frac{x - m(x)}{t_r - t_{r+1}} > \frac{qK}{z_2 - z_3} > 3$$

conseguido esto, llamaremos

$$x_{p+2} = z_2 = t_0$$
$$x_{p+3} = t_1$$
$$\vdots$$
$$x_{p+2+q} = t_q = z_3$$

Seguiremos de este modo extendiendo nuestra sucesión de forma que para $x \varepsilon [z_N, z_{N-1}]$ valga

$$\frac{x - m(x)}{x_r - x_{r+1}} > N$$

para $x_r \in [z_N, z_{N+1}]$.

Es evidente que cada x_{n+1} así formado pertenece a un intervalo $[z_N, z_{N-1})$ y x_n al intervalo $[z_N, z_{N-1}]$ con lo cual

$$\frac{x_{n+1} - m(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} > N$$

de donde resultan las segundas relaciones de (5.12) y (5.13); teniendo en cuenta, además, que la sucesión monótona (x_n) contiene a la subsucesión (z_n) para la que vale (5.14); también valen las primeras de (5.12) y (5.13) y el Lema está completo.

Lema I.5.5. Sea $m = \omega(F)$ para un $F \varepsilon \mathfrak{F}$ y $a \varepsilon \mathcal{D}$.

1.° Si $\mathcal{D} = (-\infty, \infty)$, para cualquier sucesión

$$a = x_1 > x_2 > x_3 > \ldots \qquad \text{(I.5.15)}$$

que cumpla con

$$\lim_n x_n = -\infty \qquad \text{(I.5.16)}$$

se verifica que la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{m(x_i) - m(x_{i+1})}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} \quad \text{es divergente} \qquad \text{(I.5.17)}$$

También existe alguna sucesión (5.15) que cumple (5.16) y tal que la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{m(x_i) - m(x_{i+1})}{x_i - m(x_{i+1})} \qquad \text{(I.5.18)}$$

es divergente.

2.° Si $\mathcal{D} = (\alpha,\infty)$ para cualquier sucesión como la (5.15) que cumpla con

$$\lim_n x_n = \alpha \tag{I.5.19}$$

se verifica que la serie (5.17) es divergente.

También existe alguna sucesión (5.15) que cumple con (5.19) y para la que la serie (5.18) es divergente.

Demostración. Sea (5.15) cualquier sucesión monótona decreciente que cumpla (5.16) en el caso 1.° y (5.19) en el 2.° Se verifica, indistintamente, aplicando (3.8) con $A = x_{i+1}$, $B = x_i$

$$\frac{x_{i+1} - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} \leqslant \frac{F(x_{i+1})}{F(x_i)}$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{x_{i+1} - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} \leqslant \frac{F(x_n)}{F(x_1)}$$

y haciendo tender n a infinito, como $F(x_n)$ tiene de límite cero (tanto en el caso 1.° como en el 2.° por (5.16) o (5.19)) resulta que diverge a cero el producto infinito

$$\prod_1^{\infty} \frac{x_{i+1} - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{m(x_i) - m(x_{i+1})}{x_{i+1} - m(x_{i+1})}\right)$$

que prueba la divergencia de la serie (5.17) en los dos casos 1.° y 2.°

Sea ahora una sucesión (5.15) que cumple la condición adicional

$$\lim_n \frac{x_{n+1} - m(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} = +\infty \tag{I.5.20}$$

lo cual es posible por el Lema 5.4 según (5.12) y (5.13). Para esta sucesión (x_n) (5.17) es divergente, pero el cociente de un término de (5.18) por el correspondiente de (5.17) es

$$\frac{m(x_i) - m(x_{i+1})}{x_i - m(x_{i+1})} : \frac{m(x_i) - m(x_{i+1})}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} =$$

$$= \frac{x_{i+1} - m(x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1}) + x_{i+1} - m(x_{i+1})} = \frac{1}{\dfrac{x_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} + 1} \to 1$$

habiendo utilizado (5.20); por tanto, las dos series (5.17) y (5.18) tienen el mismo carácter, o sea, (5.18) es divergente y la demostración está completa.

Teorema I.5.2. Si es $m = \omega(F)$ en los dos casos $\mathcal{D} = (-\infty, \infty)$ y $\mathcal{D} = (\alpha, \infty)$ la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{dm(x)}{x - m(x)} \tag{I.5.21}$$

se hace infinita.

Demostración. Basta demostrar que para cualquier $a \in \mathcal{D}$ se hace infinita la integral

$$\int_{(-\infty, a]} \frac{dm(x)}{x - m(x)} \tag{I.5.22}$$

en el caso 1.°, o la

$$\int_{(\alpha, a]} \frac{dm(x)}{x - m(x)} \tag{I.5.23}$$

en el 2.° En virtud del Lema 5.5 elegiremos una sucesión (5.15) que haga divergente (5.18) y que cumpla (5.16) o (5.19) según los casos. La integral

$$\int_{(x_n, a]} \frac{dm(x)}{x - m(x)} = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{(x_{i+1}, x_i]} \frac{dm(x)}{x - m(x)}$$

existe y es finita para todo n; pero se tiene para

$$x_{i+1} < x \leqslant x_i \quad , \quad m(x_{i+1}) \leqslant m(x) \leqslant m(x_i)$$

$$0 < x - m(x) \leqslant x_i - m(x_{i+1}) \quad , \quad \frac{1}{x - m(x)} \geqslant \frac{1}{x_i - m(x_{i+1})}$$

y por tanto

$$\int_{(x_{i+1}, x_i]} \frac{dm(x)}{x - m(x)} \geqslant \frac{m(x_i) - m(x_{i+1})}{x_i - m(x_{i+1})}$$

luego sumando desde $i = 1$ a $n-1$

$$\int_{(x_n,a]} \frac{dm(x)}{x - m(x)} \geqslant \sum_{1}^{n-1} \frac{m(x_i) - m(x_{i+1})}{x_i - m(x_{i+1})}$$

y haciendo tender n a infinito resulta que (5.22) y (5.23) es infinito, y (5.21) también lo es, con lo cual queda acabada la demostración del Teorema.

Nos queda el caso $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$ en que, contrariamente a lo que ocurre en los casos $\mathcal{D} = (-\infty,\infty)$, $\mathcal{D} = (\alpha,\infty)$, la integral (5.21) es finita. Comencemos por el siguiente Lema.

Lema I.5.6. Sea $F \varepsilon \mathfrak{F}$, $m = \omega(F)$, $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$ y $a \varepsilon \mathcal{D}$ tal que $m(a) < a$ (o lo que es lo mismo $a > \alpha$). Entonces existe una sucesión monotona decreciente

$$a = x_1 > x_2 > x_3 > \dots$$

con las siguientes propiedades

$$1.^{a} \quad \lim_{n} x_n = \alpha \tag{I.5.24}$$

$$2.^{a} \quad x_{r+1} - m(x_r) > 0 \tag{I.5.25}$$

$$3.^{a} \quad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{m(x_r) - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \tag{I.5.26}$$

es una serie convergente.

Demostración. Vamos a definir la sucesión (x_n) de la siguiente forma

$$x_1 = a \qquad\qquad x_{n+1} = \frac{x_n + m(x_n)}{2} \tag{I.5.27}$$

con lo cual

$$x_{n+1} = \frac{x_n + m(x_n)}{2} < \frac{x_n + x_n}{2} = x_n$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + m(x_n)}{2} > \frac{\alpha + \alpha}{2} = \alpha$$

que prueban, por inducción, que la sucesión está bien definida y es monotona decreciente.

Si su límite es b se tiene de (5.27)

$$b = \frac{b + m(b)}{2} \quad , \quad b \varepsilon \mathcal{D} = [\alpha, \infty)$$

o sea, $b = m(b)$, luego $b = \alpha$ y queda probado (5.24).

Además

$$x_{r+1} - m(x_r) = \frac{x_r + m(x_r)}{2} - m(x_r) = \frac{x_r - m(x_r)}{2} \qquad \text{(I.5.28)}$$

que es positivo y resulta (5.25).

Además, para las medias en x_r y x_{r+1} aplicando (3.8) con $A = x_r$, $B = x_{r+1}$ resulta

$$\frac{x_r - m(x_{r+1})}{x_r - m(x_r)} \leqslant \frac{F(x_r)}{F(x_{r+1})}$$

$$\prod_{1}^{n-1} \frac{x_r - m(x_{r+1})}{x_r - m(x_r)} \leqslant \prod_{1}^{n-1} \frac{F(x_r)}{F(x_{r+1})} = \frac{F(x_1)}{F(x_n)} \leqslant \frac{F(x_1)}{F(\alpha)}$$

$$\prod_{1}^{n-1} \left(1 + \frac{m(x_r) - m(x_{r+1})}{x_r - m(x_r)}\right) \leqslant \frac{F(x_1)}{F(\alpha)}$$

luego es convergente el producto infinito

$$\prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{m(x_r) - m(x_{r+1})}{x_r - m(x_r)}\right) \leqslant \frac{F(x_1)}{F(\alpha)}$$

y por tanto la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{m(x_r) - m(x_{r+1})}{x_r - m(x_r)} \qquad \text{(I.5.29)}$$

también es convergente, pero el cociente de un término de (5.26) por el correspondiente de (5.29) es

$$\frac{m(x_r)-m(x_{r+1})}{x_{r+1}-m(x_r)} : \frac{m(x_r)-m(x_{r+1})}{x_r-m(x_r)} = 2$$

como se sigue de (5.28), lo que prueba que (5.26) es también convergente, y el Lema está completo.

Teorema I.5.3. Sea $F \varepsilon \mathfrak{F}$, $m = \omega(F)$ y $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$. Entonces la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{dm(x)}{x-m(x)}$$

tiene valor finito.

Demostración. Bastará demostrar la finitud de

$$\int_{[\alpha,a]} \frac{dm(x)}{x-m(x)} \qquad \text{con} \quad a > \alpha$$

habida cuenta del Teorema 5.1.

Si utilizamos la sucesión (x_n) del Lema 5.6 tenemos

$$\int_{(x_n,a]} \frac{dm(x)}{x-m(x)} = \sum_{r=1}^{n-1} \int_{(x_{r+1},x_r]} \frac{dm(x)}{x-m(x)} \tag{I.5.30}$$

pero para $x \in (x_{r+1}, x_r]$ se tiene

$$x > x_{r+1} \quad ,$$

$$-m(x) > -m(x_r) \quad ,$$

$$x - m(x) > x_{r+1} - m(x_r) > 0 \quad ,$$

$$\frac{1}{x-m(x)} < \frac{1}{x_{r+1}-m(x_r)} \quad ,$$

$$\int_{(x_{r+1},x_r]} \frac{dm(x)}{x-m(x)} < \int_{(x_{r+1},x_r]} \frac{dm(x)}{x_{r+1}-m(x_r)} =$$

$$= \frac{m(x_r)-m(x_{r+1})}{x_{r+1}-m(x_r)} \tag{I.5.31}$$

por lo que llevando la acotación (5.31) a (5.30) resulta

$$\int_{(x_n,a]} \frac{dm(x)}{x-m(x)} \leqslant \sum_{1}^{n-1} \frac{m(x_r)-m(x_{r+1})}{x_{r+1}-m(x_r)} <$$

$$< \sum_{1}^{\infty} \frac{m(x_r)-m(x_{r+1})}{x_{r+1}-m(x_r)} \tag{I.5.32}$$

y como esta serie es convergente por el Lema 5.6 resulta tomando límites para $n \to \infty$ en (5.32)

$$\int_{(\alpha,a]} \frac{dm(x)}{x-m(x)} < \infty$$

y por tanto

$$\int_{[\alpha,a]} \frac{dm(x)}{x-m(x)} < \infty$$

que es lo que se quería demostrar.

I.6. *Conjuntos especiales de funciones de distribución*

En el conjunto $\mathfrak{F}$ de funciones de distribución hay conjuntos especiales o distinguidos que por ω se transformarán en conjuntos de $\mathcal{M}$ que podrán ser caracterizados de alguna forma.

Por ejemplo, las funciones de distribución continuas constituyen un subconjunto $\mathfrak{F}_c \subset \mathfrak{F}$ al cual le corresponden las funciones de medias continuas que forman el conjunto $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}$ (Proposición 4.2) y su estudio será objeto de la Parte II.

Las funciones de distribución de tipo discreto componen otro conjunto $\mathfrak{F}_d \subset \mathfrak{F}$ que será estudiado en la Parte III.

Las funciones de distribución F con media finita

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} u dF(u) \tag{I.6.1}$$

constituyen un conjunto $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$ y el conjunto $\omega(\mathfrak{F}_1)$ está formado por las funciones de medias m acotadas superiormente conforme afirma el siguiente enunciado.

Proposición I.6.1. Una función de distribución F tiene media (6.1) finita si, y sólo si, su función de medias $m = \omega(F)$, es una función acotada superiormente.

Demostración. Si vale (6.1) existe el límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} m(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_{-\infty}^{x} u dF(u)}{F(x)} = a$$

y como m(x) es monotona creciente, vale

$$m(x) \leqslant \lim_{x \to +\infty} m(x) = a$$

para todo x, luego m es una función acotada superiormente.

Recíprocamente si

$$m(x) = \int_{-\infty}^{x} u dF(u) \,/\, F(x) \leqslant K$$

$$\int_{-\infty}^{x} u dF(u) \leqslant K\, F(x) \leqslant K \tag{I.6.2}$$

luego tomando límites en la función monotona acotada de la izquierda de (6.2) resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dF(u) = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} u dF(u) \leqslant K$$

y queda probado que F posee media finita, con lo que se completa la Proposición.

Uno de los criterios para clasificar las funciones de distribución es el de atender al conjunto $\mathcal{D}$ que forma el dominio de su función de medias, es decir, para cada $F \varepsilon \mathfrak{F}$ vale

a) $\mathcal{D} = (-\infty, \infty)$ Si $F(x) > 0$ para todo x
b) $\mathcal{D} = (\alpha, \infty)$ si $F(\alpha) = 0$ y
$F(\alpha + h) > 0$ para todo $h > 0$
c) $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$ si $F(\alpha) > 0$ y
$F(\alpha - h) = 0$ para todo $h > 0$

Podemos llamar $\mathfrak{F}_\infty$ al subconjunto de $\mathfrak{F}$ formado por las funciones de distribución para las cuales $\mathcal{D} = (-\infty, \infty)$, $\mathfrak{F}_\alpha$ al conjunto de las funciones de distribución para las cuales $\mathcal{D} = (\alpha, \infty)$, y finalmente $\mathfrak{F}_{\bar{\alpha}}$ al formado por las funciones de distribución cuyo conjunto es $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$.

Es fácil ver que estos conjuntos son disjuntos y que

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\infty \cup (\bigcup_\alpha \mathfrak{F}_\alpha) \cup (\bigcup_\alpha \mathfrak{F}_{\bar{\alpha}})$$

Es también claro que son disjuntos todos los conjuntos que resultan de los anteriores

$$\mathcal{M}_\infty = \omega(\mathfrak{F}_\infty)$$
$$\mathcal{M}_\alpha = \omega(\mathfrak{F}_\alpha)$$
$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}} = \omega(\mathfrak{F}_{\bar{\alpha}})$$

y que

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty \cup (\bigcup_\alpha \mathcal{M}_\alpha) \cup (\bigcup_\alpha \mathcal{M}_{\bar{\alpha}})$$

Definición I.6.1. Dada una función de distribución y un número real cualquiera c, llamaremos traslación T_c de F a la función de distribución

$$F_1 = T_c F$$

definida así

$$F_1(x) = F(x - c)$$

Podría también decirse que si la variable aleatoria X tiene de función de distribución F, entonces la variable aleatoria $X + c$ tiene de función de distribución $T_c F$.

Análogamente se puede definir en $\mathcal{M}$ una traslación del siguiente modo.

Definición I.6.2. Sea c un número real cualquiera. La traslación t_c es una transformación de $\mathcal{M}$ definida así: para cada $m \varepsilon \mathcal{M}$ con dominio $\mathcal{D}$, $t_c m = m_1$ consiste en la función de medias tal que

$$m_1(x) = m(x - c) + c \qquad \text{para } x \varepsilon \mathcal{D} + c$$

(el dominio de $t_c m$ es por tanto $\mathcal{D} + c$).

En esta definición queda pendiente de comprobar que $t_c m \varepsilon \mathcal{M}$, lo cual resulta de la siguiente Proposición.

Proposición I.6.2. Sea $m = \omega(F)$; entonces $t_c m = \omega(T_c F)$.

Demostración. La función de medias de $T_c F$ está definida por

$$\frac{\int_{(-\infty,x]} ud(T_cF)(u)}{(T_cF)(x)} = \frac{\int_{(-\infty,x]} udF(u-c)}{F(x-c)} = \frac{\int_{(-\infty,x]} (u-c)dF(u-c)}{F(x-c)} +$$

$$+ \frac{\int_{(-\infty,x]} cdF(u-c)}{F(x-c)} = \frac{\int_{(-\infty,x-c]} tdF(t)}{F(x-c)} + c = m(x-c) + c$$

que de acuerdo con la definición anterior es $t_c m$.

Es fácil ver, por tanto, que

$$\begin{aligned} T_c(\mathfrak{F}_\infty) &= \mathfrak{F}_\infty \\ T\,(\mathfrak{F}_\alpha) &= \mathfrak{F}_{\alpha+c} \\ T_c(\mathfrak{F}_{\bar{\alpha}}) &= \mathfrak{F}_{\overline{\alpha+c}} \end{aligned}$$

y que el conjunto T_c es un grupo,

$$T_c\, T_{c'} = T_{c+c'}$$

Para el estudio de las relaciones entre $F \varepsilon \mathfrak{F}$ y $m = \omega(F) \varepsilon \mathcal{M}$, bastaría, por lo anterior, limitarse a los casos

$$F \varepsilon \mathfrak{F}_\infty \quad , \quad F \varepsilon \mathfrak{F}_0 \quad , \quad F \varepsilon \mathfrak{F}_{\bar{0}}$$

I.7. *Condiciones necesarias para que una función sea función de medias*

En los párrafos anteriores hemos encontrado propiedades de las funciones de medias m(x) que permiten formular condiciones necesarias para que una función real dada m(x) sea una función de medias.

Estas condiciones necesarias deben de ser formuladas, por supuesto, como propiedades intrínsecas de las funciones m a considerar, es decir, deben ser formuladas como propiedades que se expresen sin que intervenga en su enunciado la función de distribución F(x) de la cual pueda proceder.

De este modo podemos enunciar la siguiente Proposición.

Proposición I.7.1. Sea m una función real cualquiera. Condiciones necesarias para que m sea una función de medias son las siguientes.

1.ª El dominio $\mathcal{D}$ de m debe ser de una de las formas siguientes

$$(-\infty,\infty) \quad , \quad (\alpha,\infty) \quad , \quad [\alpha,\infty)$$

2.ª a) Si $\mathcal{D} = (-\infty,\infty)$

$$m(x) < x \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}$$

b) Si $\mathcal{D} = (\alpha,\infty)$

$$\alpha < m(x) < x \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D}$$

c) Si $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$

$$\alpha \leqslant m(x) < x \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{D} - \{\alpha\}$$

$$m(x) = \alpha \qquad \text{para } x = \alpha$$

3.ª m es una función monotona creciente en sentido amplio, es decir:

$$\text{si} \quad x_1 \in \mathcal{D} \quad \text{y} \quad x_1 < x_2 \quad \text{entonces} \quad m(x_1) \leqslant m(x_2)$$

4.ª m es continua por la derecha para todo $x \in \mathcal{D}$.

5.ª Si para $a \in \mathcal{D}$ vale $m(a) < a$, la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_{(a,\infty)} \frac{dm(x)}{x - m(x)}$$

es finita.

6.ª Si $\mathcal{D} = (-\infty,\infty)$ o $\mathcal{D} = (\alpha,\infty)$ la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{dm(x)}{x - m(x)}$$

es infinita.

Si $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$ la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{dm(x)}{x - m(x)}$$

es finita.

Demostración. Las condiciones 1.ª y 2.ª resultan de las Proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3. La condición 3.ª resulta de la Proposición 3.4. La condición 4.ª resulta de la Proposición 4.1. La condición 5.ª es consecuencia del Teorema 5.1. La condición 6.ª es consecuencia del Teorema 5.2 y del 5.3, quedando completa la demostración.

Sea $\mathcal{M}'$ el conjunto de todas las funciones reales m que poseen las propiedades 1.ª a 6.ª de la Proposición 7.1 anterior. $\mathcal{M}'_\infty$, $\mathcal{M}'_\alpha$, $\mathcal{M}'_{\bar{\alpha}}$ serán los subconjuntos de $\mathcal{M}'$ cuyos elementos m son funciones con dominios $(-\infty,\infty)$, (α,∞), $[\alpha,\infty)$ respectivamente.

El enunciado de la Proposición 7.1 es simplemente la relación

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \tag{I.7.1}$$

Si las propiedades 1.ª a 6.ª de la Proposición 7.1 fuesen necesarias y suficientes para que una función m fuese función de medias, la relación (7.1) se convertiría en

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' \tag{I.7.2}$$

Más adelante se probará que esto no es cierto, es decir, la igualdad (7.2) es falsa. En efecto, se demostrará que

$$\mathcal{M}' - \mathcal{M} \neq \phi \tag{I.7.3}$$

Proposición I.7.2. Sea $F \varepsilon \mathfrak{F}_\infty$ y $m = \omega(F)$; entonces se verifica que

$$\lim_{x \to -\infty} F(x)\, m(x) = 0 \tag{I.7.4}$$

Demostración. Es trivial, pues

$$F(x)\, m(x) = \int_{(-\infty,x]} u dF(u)$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} \int_{(-\infty,x]} u dF(u) = 0$$

lo que prueba la Proposición.

La Proposición 7.2 no determina una condición necesaria intrínseca para que una función arbitraria m(x) sea una función de medias, porque exige en su enunciado el uso de su función de distribución F, lo que ya es suponer que $m \varepsilon \mathcal{M}$. De igual modo no lo sería la condición

$$\lim_{x \to -\infty} [m(x) \ (\omega^{-1}(m)) \ (x)] = 0 \tag{I.7.5}$$

pues $\omega^{-1}(m)$ no tendría sentido a menos que $m \varepsilon \mathcal{M}$ y volvemos a caer en un círculo vicioso.

Pero si fuese posible definir una expresión explícita E(m) para $m \varepsilon \mathcal{M}'_{\infty}$, de modo que en $\mathcal{M}_{\infty}$ se cumpliese $E(m) = \omega^{-1}(m)$ entonces

$$\lim_{x \to -\infty} (mE(m)) \ (x) = 0 \qquad \text{(condición 7.}^{a}\text{)} \tag{I.7.6}$$

sería una condición necesaria que agregada a las condiciones 1.ª a 6.ª nos determinaría un conjunto $\mathcal{M}''$ de modo que

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'' \subset \mathcal{M}' \tag{I.7.7}$$

La condición 7.ª será independiente de las seis anteriores si probamos que

$$\mathcal{M}' - \mathcal{M}'' \neq \phi \tag{I.7.8}$$

Las condiciones 1.ª a 7.ª serán necesarias y suficientes para que $m \in \mathcal{M}$ si

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}'' \tag{I.7.9}$$

Posteriormente volveremos sobre estas ideas.

II. DISTRIBUCIONES UNIDIMENSIONALES CONTINUAS. INVERSA DE ω EN ESTE CASO

II.1. *Funciones de distribución continuas*

Como se señaló en I.6, un subconjunto notable del conjunto $\mathfrak{F}$ (dominio de ω) es el conjunto $\mathfrak{F}_c$ de las funciones de distribución continuas pertenecientes a $\mathfrak{F}$. Llamaremos $\mathcal{M}_c = \omega(\mathfrak{F}_c)$ al conjunto de las funciones de medias que son imágenes por ω de estas funciones de distribución continuas. Esta Parte tiene por objeto estudiar ω restringida a $\mathfrak{F}_c$.

En primer lugar debe notarse que si $F\varepsilon\mathfrak{F}_c$ el conjunto

$$\mathcal{D} = \{x : F(x) > 0\}$$

es de la forma $(-\infty,\infty)$ o (α,∞), quedando excluido el caso $[\alpha,\infty)$ que forzosamente implica una discontinuidad de F en $x = \alpha$.

Proposición II.1.1. Sea $F\varepsilon\mathfrak{F}$, y $m = \omega(F)$. Condición necesaria y suficiente para que $F\varepsilon\mathfrak{F}_c$ es que *m* tenga como dominio $(-\infty,\infty)$ o (α,∞) y que sea continua en su dominio.

Demostración. Basta tener en cuenta la nota anterior y la Proposición I.4.2.

II.2. *Funciones de distribución absolutamente continuas*

En el conjunto $\mathfrak{F}_c$ hay un conjunto importante que es el de las funciones de distribución absolutamente continuas, cuyo conjunto lo denotaremos por $\mathfrak{F}_a \subset \mathfrak{F}_c$.

El conjunto transformado

$$\mathcal{M}_a = \omega(\mathfrak{F}_a) \subset \mathcal{M}_c$$

es de esperar que esté formado por los elementos de $\mathcal{M}_c$ que sean a su vez funciones de medias absolutamente continuas; en efecto, esto queda asegurado en la proposición siguiente.

Proposición II.2.1. Sea $F\in\mathfrak{F}_c$ y $m = \omega(F)$ ($\mathcal{D}$ será $(-\infty,\infty)$ o (α,∞)). Condición necesaria y suficiente para que F sea absolutamente continua es que lo sea m en cada intervalo $[a,b] \subset \mathcal{D}$.

En otras palabras, las funciones

$$m\varepsilon\mathcal{M}_a = \omega(\mathfrak{F}_a)$$

son absolutamente continuas en cada intervalo acotado, y las funciones de $\mathcal{M}_c - \mathcal{M}_a$ no lo son.

Demostración. Partamos de la relación (I.3.8).

$$\frac{A - m(A)}{B - m(A)} \leqslant \frac{F(A)}{F(B)} \tag{II.2.1}$$

del Lema I.3.1, de donde (restando una unidad a ambos miembros) resulta

$$\frac{m(A)-m(B)}{A-m(A)} \leqslant \frac{F(A)-F(B)}{F(B)} \tag{II.2.2}$$

Sean ahora x', x'' dos puntos del intervalo $[a,b]$ con $a \leqslant x' < x'' \leqslant b$. Haciendo en (2.2) $A = x''$, $B = x'$ y tras sencillos cálculos se llega a

$$m(x'')-m(x') \leqslant \frac{x''-m(x'')}{F(x')}\,(F(x'')-F(x'))$$

y de aquí resulta

$$m(x'')-m(x') \leqslant \frac{b-m(a)}{F(a)}\,(F(x'')-F(x')) \tag{II.2.3}$$

Otra relación que nos será útil resulta de (2.2) haciendo $A=x'$, $B=x''$, donde como antes se supone $a \leqslant x' < x'' \leqslant b$, y resulta

$$F(x'')-F(x') \leqslant \frac{F(x'')}{x'-m(x')}\,(m(x'')-m(x'))$$

y haciendo uso del Lema I.5.1.

$$F(x'')-F(x') \leqslant \frac{F(b)}{K}\,(m(x'')-m(x')) \tag{II.2.4}$$

Sea ahora F absolutamente continua en $(-\infty,\infty)$ y por tanto absolutamente continua en cada intervalo $[a,b]\in\mathcal{D}$.

Fijado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si los intervalos $(x'_i, x''_i) \subset [a,b]$ son disjuntos y $\sum_1^n (x''_i - x'_i) < \delta$ entonces

$$\sum_1^n (F(x''_i)-F(x'_i)) < \varepsilon$$

luego, también por (2.3).

$$\sum_1^n (m(x''_i)-m(x'_i)) < \frac{b-m(a)}{F(a)}\,\varepsilon$$

que prueba que m es absolutamente continua en $[a,b]$.

Supongamos ahora que, recíprocamente, m es absolutamente continua en cada intervalo $[a,b] \subset \mathcal{D}$. Entonces, fijado $[a,b]$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta < 0$ tal que, si los intervalos $(x'_i, x''_i) \subset [a,b]$ son disjuntos y

$$\sum_1^n (x''_i - x'_i) < \delta$$

se sigue

$$\sum_1^n (m(x''_i) - m(x'_i)) < \varepsilon$$

y por tanto, utilizando (2.4)

$$\sum_1^n (F(x''_i) - F(x'_i)) < \frac{F(b)}{K} \varepsilon$$

que prueba la continuidad absoluta de F(x) en todo intervalo $[a,b] \subset \mathcal{D}$. Teniendo en cuenta que F es monotona y

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

resulta fácilmente que F es absolutamente continua en $(-\infty, \infty)$ y la Proposición queda demostrada.

II.3. *Funciones de distribución derivables*

En ciertas cuestiones resulta de manejo más simple las funciones derivables.

Por ello, vamos a considerar el subconjunto

$$\mathfrak{F}_D \subset \mathfrak{F}_a$$

de las funciones de distribución de $\mathfrak{F}$ que tengan derivada continua, excepto en un número finito de puntos $a_1, a_2, \ldots a_n$ en cada uno de los cuales la derivada de F(x) pueda no existir, o existir pero no ser continua. En los intervalos $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_n, \infty)$ la derivada de $F \varepsilon \mathfrak{F}_D$ existe y es continua y por supuesto en los puntos a_i, la función F es continua.

Sin embargo, la siguiente Proposición se aplica a cualquier función $F \varepsilon \mathfrak{F}$.

Proposición II.3.1. Sea $F \in \mathfrak{F}$ y $m = \omega(F)$ y x un punto interior de $\mathcal{D}$.

Entonces, m es derivable en x si, y sólo si, F es derivable en x. Además, cuando existen estas derivadas vale la igualdad.

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{m'(x)}{x - m(x)} \tag{II.3.1}$$

Demostración. En primer lugar veamos la relación entre la derivabilidad de

$$F(x) \quad y \quad G(x) = \int_{(-\infty,x]} udF(u)$$

Sea $h > 0$; entonces

$$\frac{1}{h}(G(x+h) - G(x)) = \frac{1}{h}\int_{(x,x+h]} udF(u) =$$

$$= \frac{1}{h}\xi(F(x+h) - F(x)) = \xi\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \tag{II.3.2}$$

$$(\xi \text{ entre } x \text{ y } x + h)$$

mientras que si $h = -h' < 0$ se tiene

$$\frac{1}{h}(G(x+h) - G(x)) = \frac{1}{-h'}(G(x-h') - G(x)) =$$

$$= \frac{1}{h'}(G(x) - G(x-h')) = \frac{1}{h'}\int_{(x-h',x]} udF(u) =$$

$$= \frac{1}{h'}\xi(F(x) - F(x-h')) = \xi\frac{F(x-h') - F(x)}{-h'}$$

$$(\xi \text{ entre } x - h' \text{ y } x)$$

que es la misma (3.2), la cual vale tanto para h positivo como negativo.

De la igualdad (3.2) se sigue que si F es derivable en x, G también lo es y vale $G'(x) = xF'(x)$. Por tanto, el cociente

$$m(x) = \frac{G(x)}{F(x)} \qquad (x \varepsilon \mathcal{D})$$

también es derivable, lo que prueba una parte de la Proposición.

Supongamos que, recíprocamente, m es derivable en x. Obtenemos, restando

$$m(x+h)\ F(x+h) = G(x+h)$$

$$m(x)\ F(x) = G(x)$$

$$m(x+h)\ F(x+h) - m(x)\ F(x) = G(x+h) - G(x)$$

y de ésta y (3.2)

$$m(x+h)\frac{F(x+h)-F(x)}{h} + F(x)\frac{m(x+h)-m(x)}{h} = \xi\,\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

o bien

$$F(x)\,\frac{m(x+h)-m(x)}{h} = (\xi - m(x+h))\,\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \qquad \text{(II.3.3)}$$

y como existen los límites

$$\lim_{h} \frac{m(x+h)-m(x)}{h} = m'(x)$$

$$\lim_{h} (\xi - m(x+h)) = x - m(x) \neq 0$$

también existe el límite que define $F'(x)$ y además al tomar límites en (3.3) resulta (3.1) y queda completa la demostración de la Proposición.

Corolario II.3.1. Si $F \varepsilon \mathfrak{F}_c$ y $m = \omega(F)$, entonces, condición necesaria y suficiente para que $F \varepsilon \mathfrak{F}_D$ es que m tenga derivada continua salvo en un número finito de puntos. Los puntos en que F no tiene derivada son los mismos que los puntos donde m no tiene derivada. Los puntos en que F tiene derivada y ésta no es continua son los mismos que los puntos en que m tiene derivada pero ésta no es continua.

Demostración. Por la Proposición anterior, si $F \varepsilon \mathfrak{F}_D$, en los intervalos (a_i, a_{i+1}) en que F tiene derivada continua, m tiene derivada y es continua por (3.1) y recíprocamente si m tiene derivada continua en estos intervalos F la tiene igualmente. En los puntos a_i en que F no tiene derivada, m tampoco la tiene y recíprocamente por la misma Proposición 3.1. Finalmente si en un punto a_i una de las funciones $F'(x)$ o $m'(x)$ no es continua, tampoco lo es la otra, o sea, las relaciones

$$\lim_{x \to a_i} m'(x) \neq m'(a_i)$$

$$\tag{II.3.4}$$

$$\lim_{x \to a_i} F'(x) \neq F'(a_i)$$

se implican mutuamente ya que de la igualdad (3.1) resultan las dos relaciones

$$\frac{\lim\limits_{x \to a_i} F'(x)}{F(a_i)} = \frac{\lim\limits_{x \to a_i} m'(x)}{a_i - m(a_i)} \tag{II.3.5}$$

$$\frac{F'(a_i)}{F(a_i)} = \frac{m'(a_i)}{a_i - m(a_i)} \tag{II.3.6}$$

luego si los primeros miembros no son iguales tampoco los segundos, y recíprocamente.

Corolario II.3.2. Sea $F \varepsilon \mathfrak{F}_D$, $m = \omega(F)$. Entonces F queda determinada por *m* mediante una integral de Riemann

$$\ln \frac{F(b)}{F(a)} = \int_a^b \frac{m'(u)du}{u - m(u)} \tag{II.3.7}$$

donde (a,b) es cualquier intervalo contenido en $\mathcal{D}$, y por tanto

$$F(x) = \exp\left[-\int_x^{\infty} \frac{m'(u)du}{u - m(u)}\right] \quad \text{si } x \varepsilon \mathcal{D}$$
$$F(x) = 0 \quad \text{si } x \notin \mathcal{D} \tag{II.3.8}$$

por lo tanto la restricción de ω a $\mathfrak{F}_D$ es inyectiva, o sea, la restricción

$$\omega : \mathfrak{F}_D \rightarrow \mathcal{M}_D = \omega(\mathfrak{F}_D)$$

es una biyección.

Demostración. La igualdad (3.7) resulta de obtener la integral de Riemann de ambos miembros de (3.1) que existe si $F \varepsilon \mathfrak{F}_D$. La igualdad (3.8) resulta de hacer tender *b* a infinito en (3.7) y sustituir *a* por *x*. La igualdad (3.8) prueba que la restricción de ω a $\mathfrak{F}_D$ es inyectiva, lo cual completa la demostración.

Para la obtención de la fórmula de inversión (3.8) nos hemos limitado al caso elemental en que $F \varepsilon \mathfrak{F}_D$. Podría haberse generalizado esto al caso en que $F \varepsilon \mathfrak{F}_a$ tuviera una derivada F' integrable Riemann, pero todavía es más general la solución que daremos en el párrafo siguiente en que volvemos a considerar el conjunto $\mathfrak{F}_c \subset \mathfrak{F}$ de las funciones de distribución continuas.

II.4. *Inversa de ω en el caso de distribuciones continuas*

Antes de dar la generalización de la fórmula de inversión (3.8) al caso en que $F \varepsilon \mathfrak{F}_c$ daremos varios Lemas previos.

Lema II.4.1. Sea $F \varepsilon \mathfrak{F}_c$, $m = \omega(F)$, $[a,b] \subset \mathcal{D}$, entonces las integrales de Riemann-Stieltjes

$$I = \int_{[a,b]} \frac{dm(x)}{x - m(x)} \quad , \quad J = \int_{[a,b]} \frac{dF(x)}{F(x)} \tag{II.4.1}$$

existen, son continuas en a y b, y son iguales entre sí.

Demostración. La existencia se debe a que las funciones

$$\frac{1}{x - m(x)} \quad \text{y} \quad \frac{1}{F(x)}$$

son continuas en [a,b]. La continuidad resulta de que las funciones m(x) y F(x) detrás del signo de diferencial son continuas.

La igualdad $I = J$ resulta como sigue. Sea $\varepsilon > 0$ un número dado. La existencia de la integral I determina para este ε un $\delta_1 > 0$ tal que para toda partición

$$\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \quad \text{tal que}$$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots x_n = b$$

$$N(\pi) = \max(x_{i+1} - x_i) < \delta_1$$

se cumple

$$|I(\pi) - I| < \varepsilon \tag{II.4.2}$$

donde

$$I(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x'_i - m(x'_i)} \tag{II.4.3}$$

para cualesquiera x'_i con $x_i \leqslant x'_i \leqslant x_{i+1}$. Pero en (4.3) vamos a tomar en lo que sigue el valor particular $x'_i = x_{i+1}$.

También la existencia de J, permite asegurar que a $\varepsilon > 0$, le corresponde un $\delta_2 > 0$ tal que si la participación $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ cumple con

$$N(\pi) < \delta_2$$

se verifica

$$|J(\pi) - J| < \varepsilon \tag{II.4.4}$$

donde

$$J(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{F(x'_i)} \tag{II.4.5}$$

para cualesquiera x'_i con $x_i \leqslant x'_i \leqslant x_{i+1}$, pero en lo que sigue tomaremos en (4.5) $x'_i = x_i$. Además, si

$$N(\pi) < \delta_3 < \frac{KF(a)}{F(b) - F(a)}\,\varepsilon \tag{II.4.6}$$

donde K es la constante del Lema I.5.1, resulta, siendo ξ_i números que cumplen con $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$, que la expresión (positiva)

$$S(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - \xi_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i))}{(x_{i+1} - m(x_{i+1}))\,F(x_i)}$$

puede acotarse superiormente como sigue

$$S(\pi) < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta_3(F(x_{i+1}) - F(x_i))}{KF(a)} = \delta_3 \frac{F(b) - F(a)}{KF(a)} < \varepsilon \qquad \text{(II.4.7)}$$

esta última desigualdad por (4.6).

Luego si elegimos la participación π de modo que $N(\pi) < \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ valdrá simultáneamente (4.2) y (4.4) y (4.7) y por tanto

$$\begin{aligned} |I - J| &= |(I - I(\pi)) + (J(\pi) - J) + (I(\pi) - J(\pi))| < |I(\pi) - I| + \qquad \text{(II.4.8)} \\ &+ |J(\pi) - J| + |I(\pi) - J(\pi)| < \varepsilon + \varepsilon + |I(\pi) - J(\pi)| \end{aligned}$$

pero

$$I(\pi) - J(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{m(x_{i+1}) - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} - \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{F(x_i)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1} - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1})} - \frac{F(x_{i+1})}{F(x_i)} \right)$$

y esta última expresión si aplicamos (I.3.7) con $A = x_{i+1}$, $B = x_i$, nos da

$$|I(\pi) - J(\pi)| = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - \xi_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i))}{(x_{i+1} - m(x_{i+1}))(F(x_i)} = S(\pi) < \varepsilon$$

por (4.7) y finalmente (4.8) se convierte en

$$|I - J| < 3\varepsilon$$

que prueba $I = J$ y el Lema queda demostrado.

Las integrales (4.1) no cambian si se sustituye el intervalo [a,b] por el intervalo abierto (a,b) o por uno semiabierto. Por esta razón en lo sucesivo podemos denotar las integrales (4.1) en la forma

$$I = \int_a^b \frac{dm(x)}{x - m(x)} \quad , \quad J = \int_a^b \frac{dF(x)}{F(x)}$$

Lema II.4.2. Sea $F \varepsilon \mathfrak{F}_c$ y $[a,b] \subset \mathcal{D}$. Entonces vale la igualdad

$$J = \int_a^b \frac{dF(x)}{F(x)} = \ln \frac{F(b)}{F(a)} \tag{II.4.9}$$

Demostración. Si fuese $F(a) = F(b)$ la igualdad es evidente. Así pues supondremos $0 < F(a) < F(b)$. Es evidente, igualmente, que

$$J_0 = \int_{F(a)}^{F(b)} \frac{dt}{t} = \ln \frac{F(b)}{F(a)} \tag{II.4.10}$$

Pero, para J_0, fijado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que si la partición de $[F(a), F(b)]$, $\pi = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ cumple con

$$F(a) = t_0 < t_1 < \dots < t_n = F(b)$$

$$N(\pi) = \max (t_{i+1} - t_i) < \delta_1$$

vale

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_{i+1} - t_i}{t'_i} - J_0 \right| < \varepsilon \tag{II.4.11}$$

con $t_i \leqslant t'_i \leqslant t_{i+1}$. Y ahora la continuidad uniforme de $F(x)$ en $[a,b]$ determina para δ_1 un $\delta > 0$ tal que si

$$a \leqslant x' < x'' \leqslant b, \qquad x'' - x' < \delta \qquad \text{se cumple} \quad F(x'') - F(x') < \delta_1$$

luego para cualquier partición del intervalo $[a,b]$

$$\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$$

$$N(\sigma) = \max (x_{i+1} - x_i) < \delta$$

resulta, llamando a los números distintos que aparecen en

$$F(x_0) \leqslant F(x_1) \leqslant F(x_2) \leqslant \ldots \leqslant F(x_m)$$

con la nueva notación

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \qquad (n \leqslant m)$$

que vale

$$t_{i+1} - t_i = F(x_{j+1} - F(x_j)) < \delta_1$$

(puede haber varios $F(x_r)$ iguales a $F(x_{j+1})$ y varios iguales a $F(x_j)$),

$$S(\sigma) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{F(x_{j+1}) - F(x_j)}{F(x'_j)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_{i+1} - t_i}{t'_i} \qquad \text{(II.4.12)}$$

valor que llevado a (4.11) nos da

$$| S(\sigma) - J_0 | < \varepsilon$$

y por tanto $J = J_0$, o sea, por (4.10) resulta (4.9) y queda demostrado el Lema.

Teorema II.4.1. Sea $F \varepsilon \mathfrak{F}_c$, $m = \omega(F)$ y $[a,b] \subset \mathcal{D}$. Entonces vale la igualdad

$$\ln \frac{F(b)}{F(a)} = \int_a^b \frac{dm(x)}{x - m(x)} \tag{II.4.13}$$

Por consiguiente, en este caso la función de distribución F queda determinada por su función de medias m, por la fórmula

$$\underset{(x \in \mathcal{D})}{F(x) = \exp} \left[- \int_x^\infty \frac{dm(x)}{x - m(x)} \right] \tag{II.4.14}$$

Demostración. La igualdad (4.13) resulta de los Lemas 4.1 y 4.2. La fórmula (4.14) resulta de hacer en (4.13) tender *b* a infinito y cambiar *a* por x; quedando la demostración acabada.

Evidentemente si $\mathcal{D} = (\alpha, \infty)$ es preciso definir F(x) por dos igualdades

$$F(x) = \exp \left[- \int_x^\infty \frac{dm(x)}{m - m(x)} \right] \quad \text{si } x \in \mathcal{D}$$

$$F(x) = 0 \qquad\qquad \text{si } x \notin \mathcal{D}$$

II.5. *Condiciones necesarias y suficientes para que* $m \in \mathcal{M}_c$

En la Parte I, párrafo 7, se dieron condiciones necesarias para que una función dada *m* sea función de medias. En este párrafo vamos a concretar en el caso continuo condiciones que caracterizan a las funciones de medias.

Lema II.5.1. Sea $m = \omega(F) \in \mathcal{M}_c$ una función de medias (de tipo continuo) con dominio $\mathcal{D} = (-\infty, \infty)$. Entonces se verifica

$$\lim_{x \to -\infty} m(x) \exp \left[- \int_x^\infty \frac{dm(t)}{t - m(t)} \right] = 0 \tag{II.5.1}$$

Demostración. La Proposición I.7.2 afirma que

$$\lim_{x \to -\infty} m(x)\, F(x) = 0 \tag{II.5.2}$$

pero el Teorema 4.1 permite sustituir en (5.2) F(x) por la expresión (4.14) obteniéndose (5.1), y queda probado el Lema.

Lema II.5.2. Sea m(x) una función real (no forzosamente una función de medias) que posee las siguientes propiedades:

1.ª Su dominio $\mathcal{D}$ es de la forma $(-\infty,\infty)$ o (α,∞).

2.ª Es monotona creciente en sentido amplio y continua.

3.ª Cumple $m(x) < x$, y si $\mathcal{D} = (\alpha,\infty)$, $m(x) > \alpha$.

4.ª La integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_x^{\infty} \frac{dm(t)}{t - m(t)}$$

tiene valor finito para todo $x \varepsilon \mathcal{D}$.

En estas condiciones la expresión

$$E(x) = \exp\left[-\int_x^{\infty} \frac{dm(t)}{t - m(t)} \right] \tag{II.5.3}$$

satisface la igualdad

$$E(b)\, m(b) - E(a)\, m(a) = \int_a^b u\, dE(u) \tag{II.5.4}$$

para todo a y b con $a < b$, $a \varepsilon \mathcal{D}$.

Demostración. La expresión E(x) de (5.3) existe por la propiedad 4.ª del Lema, y se ve por las restantes que es monotona creciente en sentido amplio y continua, todo lo cual asegura también la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes de (5.4).

En los cálculos que siguen haremos uso en cierto momento de la igualdad

$$\exp z = 1 + z + \rho z^2 \qquad \text{(II.5.5)}$$

$$\text{para} \quad |z| < \frac{1}{2} \quad \text{con } 0 < \rho < 1$$

igualdad que resulta de la fórmula de Taylor

$$\exp z = 1 + z + \frac{1}{2} e^{\theta z} z^2$$

$$\text{poniendo } \rho = \frac{1}{2} e^{\theta z}$$

Utilizamos una partición

$$\pi = \{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$
$$a = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = b$$

del intervalo [a,b], con norma

$$N(\pi) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (u_{i+1} - u_i)$$

e introduciremos la siguiente notación

$$\Delta E(u_i) = E(u_{i+1}) - E(u_i) \qquad \text{(II.5.6)}$$

$$\Delta m(u_i) = m(u_{i+1}) - m(u_i) \qquad \text{(II.5.7)}$$

$$I = \int_a^b u dE(u) \qquad \text{(II.5.8)}$$

$$I(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1} \, \Delta E(u_i) \qquad \text{(II.5.9)}$$

$$R = I - I(\pi) \qquad \text{(II.5.10)}$$

$$z_i = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{dm(t)}{t - m(t)} \qquad \text{(II.5.11)}$$

Vamos a hacer algunas transformaciones en la expresión

$$I(\pi) - E(b)\ m(b) + E(a)\ m(a)$$

Se obtiene, sustituyendo (5.9) en la anterior

$$I(\pi) - (E(b)\ m(b) - E(a)\ m(a)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}\ \Delta E(u_i) - \sum_{i=0}^{n-1} (E(u_{i+1})\ m(u_{i+1}) - E(u_i)\ m(u_i)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}\ \Delta E(u_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m(u_{i+1})\ \Delta E(u_i) - \sum_{i=0}^{n-1} E(u_i)\ \Delta m(u_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - m(u_{i+1}))\ \Delta E(u_i) - \sum_{i=0}^{n-1} E(u_i)\ \Delta m(u_i) \qquad \text{(II.5.12)}$$

La expresión $\Delta E(u_i)$ que aparece en (5.12) puede transformarse así

$$\Delta E(u_i) = E(u_{i+1}) - E(u_i) = E(u_i) \left(\frac{E(u_{i+1})}{E(u_i)} - 1 \right) =$$

$$= E(u_i)\ (\exp \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{dm(t)}{t - m(t)} - 1) = E(u_i)\ (\exp\ z_i - 1) \qquad \text{(II.5.13)}$$

y haciendo de momento la hipótesis

$$|z_i| < \frac{1}{2} \tag{II.5.14}$$

se puede aplicar (5.5), con lo que (5.13) se transforma en

$$\Delta E(u_i) = E(u_i)(z_i + \rho z_i^2) \tag{II.5.15}$$

$$0 < \rho < 1 \quad , \quad \rho \text{ depende de } i$$

y llevando (5.15) a (5.12)

$$I(\pi) - E(b)\ m(b) + E(a)\ m(a) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - m(u_{i+1}))\ E(u_i)(z_i + \rho z_i^2) - \sum_{i=0}^{n-1} E(u_i)\,\Delta m(u_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} E(u_i)\,[(u_{i+1} - m(u_{i+1}))z_i - \Delta m(u_i)] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} E(u_i)(u_{i+1} - m(u_{i+1}))\rho z_i^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} E(u_i)(u_{i+1} - m(u_{i+1})\left(z_i - \frac{\Delta m(u_i)}{u_{i+1} - m(u_{i+1})}\right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} E(u_i)(u_{i+1} - m(u_{i+1}))\rho z_i^2 = S + T \tag{II.5.16}$$

con

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} E(u_i)(u_{i+1} - m(u_{i+1}))\left(z_i - \frac{\Delta m(u_i)}{u_{i+1} - m(u_{i+1})}\right) \qquad \text{(II.5.17)}$$

$$T = \sum_{i=0}^{n-1} E(u_i)(u_{i+1} - m(u_{i+1}))\rho z_i^2 \qquad \text{(II.5.18)}$$

de este modo, con la hipótesis (5.14) hemos conseguido la descomposición

$$I - E(b)\ m(b) + E(a)\ m(a) = R + S + T \qquad \text{(II.5.19)}$$

donde R, S y T están dados por (5.10), (5.17) y (5.18).

Sea ahora ε un número fijo tal que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

a) Existe un $\delta_1 > 0$ tal que si $N(\pi) < \delta_1$ debe valer

$$|R| = |I - I(\pi)| < \varepsilon \qquad \text{(II.5.20)}$$

en virtud de la definición de Riemann-Stieltjes aplicada a I en (5.8).

b) También existe un $\delta_2 > 0$ tal que si $N(\pi) < \delta_2$ debe verificarse

$$0 < z_i = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{dm(t)}{t - m(t)} < \varepsilon < \frac{1}{2} \qquad \text{(II.5.21)}$$

debido a la continuidad uniforme de

$$g(u) = \int_a^u \frac{dm(t)}{t - m(t)} \qquad \text{en } [a,b]$$

De esta forma ya se cumple la hipótesis (5.14) que se sigue de (5.21) y por tanto es válida la descomposición (5.19).

Además el tercer término de la descomposición (5.19) se acota en atención a (5.21) así

$$0 < T < \sum_{i=0}^{n-1} E(u_i)(u_{i+1} - m(u_{i+1})\rho z_i^2 < \sum_{i=0}^{n-1} E(b)(b - m(a))\varepsilon z_i =$$

$$= E(b)(b - m(a)) \int_a^b \frac{dm(t)}{t - m(t)} \cdot \varepsilon = K \cdot \varepsilon \qquad \text{(II.5.22)}$$

$$\text{con} \qquad K = E(b)(b - m(a)) \int_a^b \frac{dm(t)}{t - m(t)}$$

c) Finalmente, la continuidad uniforme de $\dfrac{1}{x - m(x)}$ en [a,b] prueba que para el número ε existe un $\delta_3 < 0$ tal que si x', x'' están en [a,b] y $0 < x'' - x' < \delta_3$ vale

$$\left| \frac{1}{x'' - m(x'')} - \frac{1}{x' - m(x')} \right| < \varepsilon$$

de donde se sigue fácilmente

$$z_i - \frac{\Delta m(u_i)}{u_{i+1} - m(u_{i+1})} = \sigma \Delta m(u_i)\varepsilon \qquad \text{(II.5.23)}$$

(con $|\sigma| \leqslant 1$, σ depende de i)

y por tanto el segundo término de la descomposición (5.19) se acota así

$$|S| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} E(u_i)(u_{i+1} - m(u_{i+1})) \left(z_i - \frac{\Delta m(u_i)}{u_{i+1} - m(u_{i+1})} \right) \right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} E(b)(b - m(a)) \Delta m(u_i)\varepsilon = H \cdot \varepsilon \tag{II.5.24}$$

con $H = E(b)(b - m(a))(m(b) - m(a))$.

Por tanto si $N(\pi) < \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ valen (5.20), (5.22) y (5.24), luego la descomposición (5.19) (también válida) nos da

$$|I - E(b)m(b) + E(a)m(a))| = |R + S + T| \leqslant |R| + |S| + |T| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + H\varepsilon + K\varepsilon = (1 + H + K)\varepsilon$$

y como $1 + H + K$ es fijo y ε arbitrario en $(0, \frac{1}{2})$ debe ser

$$I - E(b)\ m(b) + E(a)\ m(a) = 0$$

que prueba (5.4) y por tanto el Lema.

Teorema II.5.1. Sea m una función real en su dominio. Las condiciones (simultáneas) siguientes son necesarias y suficientes para que m sea una función de medias de una función de distribución de $\mathfrak{F}_c$.

1.° El dominio $\mathcal{D}$ de m debe ser de la forma

$$(-\infty, \infty) \quad \text{o} \quad (\alpha, \infty)$$

2.° Debe valer para todo $x \varepsilon \mathcal{D}$

$$m(x) < x$$

y además si $\mathcal{D} = (\alpha, \infty)$

$$m(x) > \alpha$$

3.º m es creciente en sentido amplio.

4.º m es continua en $\mathcal{D}$.

5.º Para todo $x \varepsilon \mathcal{D}$ la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_x^\infty \frac{dm(t)}{t - m(t)} \quad \text{es finita}$$

6.º La integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{dm(t)}{t - m(t)} \quad \text{es infinita}$$

7.º En el caso $\mathcal{D} = (-\infty, \infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} m(x) \exp \left[- \int_x^\infty \frac{dm(t)}{t - m(t)} \right] = 0$$

Demostración. La necesidad de las condiciones 1.ª a 6.ª se sigue de la Proposición 1.1 y de la Proposición I.7.2. La necesidad de la condición 7.ª se sigue del Lema 5.1.

Para probar que estas condiciones 1.ª a 7.ª son suficientes, supongamos que una función, que vamos a llamar $\overline{m}(x)$, es una función continua en su dominio $\mathcal{D}$ y que satisface las condiciones 1.ª a 7.ª del Teorema.

Definamos la función

$$\overline{F}(x) = \exp \left[- \int_x^\infty \frac{d\overline{m}(t)}{t - \overline{m}(t)} \right] \quad \text{para } x \varepsilon \mathcal{D} \qquad \text{(II.5.25)}$$

$$\overline{F}(x) = 0 \qquad \text{si } x \notin \mathcal{D} \qquad \text{(II.5.26)}$$

La parte (5.26) sólo se precisa si $\mathcal{D} = (\alpha, \infty)$.

Demostraremos primero que la función $\overline{F}$ es una función de distribución.

En primer lugar la definición de $\overline{F}$ tiene sentido por la condición 5.ª La continuidad para $x \varepsilon \mathcal{D}$ y la monotonía de $\overline{F}$ también son triviales. Además para todo $x \varepsilon \mathcal{D}$ (dominio de $\overline{m}$) resulta ser $\overline{F}(x) > 0$, con lo cual

$$\mathcal{D} = \{x : \overline{F}(x) > 0\}$$

También es fácil ver que

$$\lim_{x \to +\infty} \overline{F}(x) = 1$$

mientras

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} \overline{F}(x) = 0 \qquad \text{si } \mathcal{D} = (-\infty, \infty) \\ &\lim_{x \to \alpha-} \overline{F}(x) = 0 \qquad \text{si } \mathcal{D} = (\alpha, \infty) \end{aligned} \tag{II.5.27}$$

utilizando la condición 6.ª

Con esto queda ya probado que $\overline{F}$ es una función de distribución continua. Ahora el Lema 5.2 puede ser aplicado pues se cumplen para $\overline{m}$ las hipótesis de dicho Lema y la E(x) (5.3) es en este caso $\overline{F}(x)$, de donde por (5.4)

$$\overline{F}(b)\overline{m}(b) - \overline{F}(a)\overline{m}(a) = \int_a^b u d\overline{F}(u) \tag{II.5.28}$$

$$(a < b, \quad a \varepsilon \mathcal{D})$$

En el caso $\mathcal{D} = (\alpha, \infty)$, resulta, por (5.27) y la condición 2.ª del Lema,

$$\lim_{x \to \alpha-} \overline{F}(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \alpha-} \overline{m}(x) = \alpha$$

luego

$$\lim_{a \to \alpha -} \overline{F}(a)\overline{\overline{m}}(a) = 0$$

y de (5.28) se obtiene

$$\overline{F}(b)\overline{\overline{m}}(b) = \int_{\alpha}^{b} u d\overline{F}(u) = \int_{-\infty}^{b} u d\overline{F}(u)$$

o bien

$$\overline{\overline{m}}(b) = \frac{\int_{-\infty}^{b} u d\overline{F}(u)}{\overline{F}(b)}$$

lo que prueba en este caso

$$\overline{F} \varepsilon \mathfrak{F}_c \quad y \quad \overline{\overline{m}} = \omega(\overline{F})$$

En el caso $\mathcal{D} = (-\infty, \infty)$ la condición 7.ª permite escribir

$$\lim_{a \to -\infty} \overline{\overline{m}}(a)\ \overline{F}(a) = 0$$

y por tanto de (5.28) resulta

$$\overline{F}(b)\overline{\overline{m}}(b) = \int_{-\infty}^{b} u d\overline{F}(u)$$

o sea

$$\overline{\overline{m}}(b) = \frac{\int_{-\infty}^{b} u d\overline{F}(u)}{\overline{F}(b)}$$

que prueba igualmente que $\overline{F} \in \mathfrak{F}_c$ y $\overline{\overline{m}} = \omega(\overline{F})$, lo cual completa la demostración del Teorema.

II.6. *Ejemplos y comentarios*

En la Proposición I.7.1 se establecieron unas condiciones necesarias para que una función real dada m sea una función de medias, o sea, para que $m \varepsilon \mathcal{M} = \omega(\mathfrak{F})$. Como quedó dicho en el párrafo 6 de la Parte I, llamamos $\mathcal{M}'$ al conjunto de aquellas funciones que satisfagan las condiciones expuestas en dicha Proposición I.7.1. Si nosotros probamos que

$$\mathcal{M}' - \mathcal{M} \neq \phi$$

(que es I.7.3) resultará que las condiciones de la Proposición I.7.1 no son suficientes para que una función m sea función de medias. Esto se comprueba con el siguiente ejemplo.

Ejemplo II.6.1. Sea m(x) la función definida por

$$\begin{aligned} m(x) &= 2x - Kx^2 && \text{si } x \leqslant x_0 \\ m(x) &= 2x_0 - Kx_0^2 && \text{si } x \geqslant x_0 \end{aligned} \qquad \text{(II.6.1)}$$

donde $K > 0$, $x_0 < 0$.

Es fácil comprobar que esta función (6.1) definida en $(-\infty, \infty)$ satisface todas las condiciones de la Proposición I.7.1.

En particular las condiciones 5.ª y 6.ª de la Proposición I.7.1 resultan de las expresiones

$$\int_x^\infty \frac{dm(t)}{t - m(t)} = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \qquad \text{si } x \leqslant x_0$$

$$\int_x^\infty \frac{dm(t)}{t - m(t)} = 0 \qquad \text{si } x \geqslant x_0$$

$$(x_0 < 0)$$

Por tanto $m \varepsilon \mathcal{M}'$. Ahora bien m es continua, luego si fuese cierto $m \varepsilon \mathcal{M}$ valdría $m \varepsilon \mathcal{M}_c = \omega(\mathfrak{F}_c)$ y debería cumplir las condiciones necesarias señaladas en el Teorema 5.1, pero la condición 7.ª del Teorema 5.1 no se cumple ya que

$$\lim_{x \to -\infty} m(x) \exp\left[-\int_x^\infty \frac{dm(t)}{t - m(t)}\right] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (2x - Kx^2) \left(\frac{x_0}{x}\right)^2 = -K^2 \neq 0$$

con lo cual $m \notin \mathcal{M}_c$, $m \notin \mathcal{M}$ y por tanto

$$\mathcal{M}' - \mathcal{M} \neq \phi$$

como deseábamos probar.

Evidentemente la función *m* (6.1) de este conjunto satisface las condiciones 1.ª a 6.ª del Teorema 5.1 pero no la 7.ª, lo que prueba que esta última condición es independiente de las anteriores y no puede suprimirse de dicho Teorema 5.1.

Ejemplo II.6.2. La función definida por

$$m(x) = 2x \qquad \text{para } x \leqslant x_0$$

$$m(x) = 2x_0 \qquad \text{para } x \geqslant x_0$$

$$(x_0 < 0)$$

se comprueba fácilmente que satisface las condiciones del Teorema 5.1 y la aplicación de la fórmula (4.14) da la función de distribución.

$$F(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^2 \qquad \text{para } x \leqslant x_0$$

$$F(x) = 1 \qquad \text{para } x \geqslant x_0$$

$$(x_0 < 0)$$

Este ejemplo resulta de (6.1) sustituyendo $K = 0$ (valor que allí excluíamos).

Ejemplo II.6.3. A la función de distribución continua

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && \text{para } x \leqslant 0 \\ F(x) &= x^r && \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ F(x) &= 1 && \text{para } x \geqslant 1 \end{aligned}$$

con $r > 0$

le corresponde la función de medias

$$m(x) = \frac{r}{r+1} x \qquad 0 < x \leqslant 1$$

$$m(x) = \frac{r}{r+1} \qquad x \geqslant 1$$

Tanto el paso de F a m por (I.2.2), como el de m a F por (4.14), son inmediatos.

Ejemplo II.6.4. A la función de medias

$$m(x) = x^r \quad , \quad x > 1$$
$$(0 < r < 1)$$

le corresponde la función de distribución continua

$$F(x) = 0 \qquad \text{para } x \leqslant 1$$

$$F(x) = (1 - x^{r-1})^{r/1-r} \qquad \text{para } x \geqslant 1$$

$$(0 < r < 1)$$

En estos ejemplos omitimos la comprobación de las condiciones que deben cumplir las funciones m o F y la obtención de una mediante la otra por ser ejercicios de cálculo que no ofrecen dificultad.

Conviene observar que si una función de medias tiene como dominio $[\alpha,\infty)$ y es continua, por la Proposición 1.1 no es función de medias de una función de distribución continua. En efecto $F = \omega^{-1}(m)$ tendrá una discontinuidad en $x = \alpha$. Podría pensarse que restringiendo en dicho caso *m* al dominio (α,∞) obtendríamos una $F = \omega^{-1}(m)$ continua, pero tal restricción ya no es una función de medias, pues tal restricción (por supuesto caprichosa) entra en contradicción con lo que afirman los Teoremas I.5.2 y I.5.3 en cuyo contenido figuran estas Propiedades: si para $m \varepsilon \mathcal{M}$, vale $\mathcal{D} = (\alpha,\infty)$, la integral $\displaystyle\int_{(\alpha,\infty)} \frac{dm(x)}{x - m(x)}$

es infinita, pero si $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$ la integral $\displaystyle\int_{(\alpha,\infty)} \frac{dm(x)}{x - m(x)}$ es finita, que distingue sustancialmente los casos (α,∞) y $[\alpha,\infty)$.

No obstante, es cierto que la fórmula (4.13) es válida en todo intervalo $[a,b]$ de continuidad de $F(x)$ (y por tanto de $m(x)$) por lo que podría aplicarse también (4.14) al caso $[\alpha,\infty)$ si $m(x)$ es continua en todo su dominio. Esto ocurre en el siguiente ejemplo.

Ejemplo II.6.5. Sea la función

$$m(x) = x^r \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0$$

$$m(x) = x_0^r \qquad x \geqslant x_0$$

$$r > 1, \qquad 0 < x_0 < 1 \quad , \quad \mathcal{D} = [0,\infty)$$

Se cumplen las condiciones necesarias de la Proposición I.7.1 y como *m* es continua, es posible la aplicación de (4.14) y se obtiene

$$F(x) = 0 \qquad \text{para } x < 0$$

$$F(x) = \left(\frac{1 - x_0^{r-1}}{1 - x^{r-1}}\right)^{\frac{r}{r-1}} \qquad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$F(x) = 1 \qquad \text{para } x \geqslant 1$$

Evidentemente $F \notin \mathfrak{F}_c$ y el salto en $x = 0$ vale

$$F(0) - F(0-) = (1 - x_0^{r-1})^{\frac{r}{r-1}}$$

Ejemplo II.6.6. Sea la función *m* definida en $\mathcal{D} = (0,\infty)$ de la siguiente forma

$$m(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{si } x \in (0,\pi/2]$$

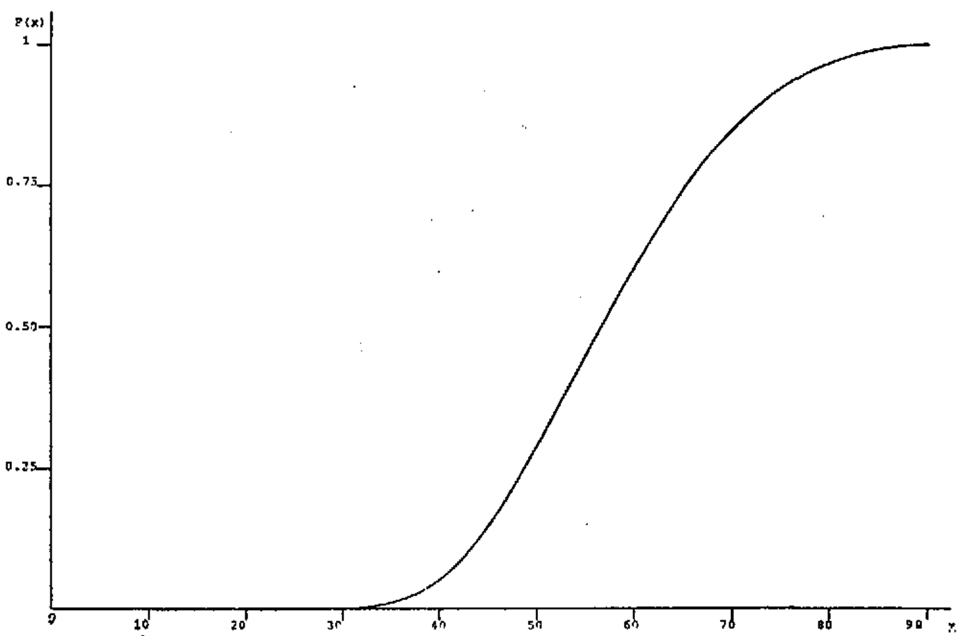
$$m(x) = 1 \qquad \text{si } x \geqslant \pi/2$$

Resulta inmediato comprobar que la función *m* verifica las propiedades de una función de medias continua.

Utilizando (3.8) obtenemos como función de distribución $F = \omega^{-1}(m)$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 && \text{si } x < 0 \\
F(x) &= \exp\left[-\int_{x}^{\pi/2} \frac{\cos t\, dt}{t - \operatorname{sen} t} \right] && \text{si } x \varepsilon (0,\pi/2] \qquad \text{(II.6.2)} \\
F(x) &= 1 && \text{si } x \geqslant \pi/2
\end{aligned}
$$

La integral de la fórmula (6.2) la obtenemos numéricamente por la fórmula de Simpson, obteniéndose como gráfica de F(x) la de la figura 1.



Gráfica de F(x) correspondiente a m(x) = sen x con 0<x<π/2 Figura 1

III. FUNCIONES DE MEDIAS DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS UNIDIMENSIONALES. INVERSA DE ω EN ESTE CASO

III.1. *Distribuciones discretas y sus funciones de medias*

Vamos a limitarnos a considerar en esta Parte el caso de *distribuciones de probabilidad discretas para las cuales existe un conjunto C* formado por un número *finito o numerable* de puntos, *sin ningún punto de acumulación a distancia finita y que tiene la propiedad* $P(C) = 1$.

Existen cuatro posibilidades en estas distribuciones.

a) El número de puntos en que está concentrada toda la probabilidad es finito, y los puntos son

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \qquad \text{(III.1.1)}$$

b) El conjunto C es numerable pero está acotado inferiormente. Los puntos de C pueden denotarse por

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots \qquad \text{(III.1.2)}$$

$$\text{con } \lim_{n} x_n = \infty$$

c) El conjunto C es numerable pero está acotado superiormente; si sus puntos ordenados por orden decreciente son

$$y_0 > y_1 > y_2 > \dots > y_n > \dots \qquad \text{(III.1.3)}$$

$$\text{con } \lim_{n} y_n = -\infty$$

cambiaremos de notación, para dar unidad a la exposición escribiendo $x_n = y_{-n}$ con lo cual (1.3) se escribirá así

$$x_0 > x_{-1} > x_{-2} > \dots > x_{-n} > \dots \qquad \text{(III.1.4)}$$

$$\text{con } \lim_{n \to -\infty} x_n = -\infty$$

d) El conjunto C numerable no está acotado superior ni inferiormente. Eligiendo $x_0 \varepsilon C$, los mayores que x_0 (incluyendo x_0) formarán una sucesión

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots \tag{III.1.5}$$

$$\text{con } \lim_{n} x_n = +\infty$$

y los menores que x_0 formarán otra

$$y_0 > y_1 > y_2 > \dots \tag{III.1.6}$$

$$\text{con } \lim_{n} y_n = -\infty$$

pero llamando para $n < 0$, $x_n = y_{-n}$, las dos sucesiones (1.5) y (1.6) pueden escribirse en forma de una sucesión con dos sentidos

$$\dots,\ x_{-n},\ \dots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots \tag{III.1.7}$$

$$\text{con } \lim_{n} x_n = +\infty$$

$$\lim_{n \to -\infty} x_n = -\infty$$

Por la forma de definir las distribuciones discretas, llamando $\mathfrak{F}_d \subset \mathfrak{F}$ al subconjunto de funciones de distribución que corresponde a este tipo, resulta fácilmente que si $F \varepsilon \mathfrak{F}_d$ es

$$F(x) \text{ constante en } [x_r, x_{r+1}) \tag{III.1.8}$$

$$F(x_r) - F(x_r -) > 0 \quad \text{para todo } r \text{ posible}$$

en todos los casos, y además en el caso a)

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && \text{en } (-\infty, x_0) \\ F(x) &= 1 && \text{en } [x_n, \infty) \end{aligned} \tag{III.1.9}$$

en el caso b)

$$F(x) = 0 \qquad \text{en} \quad (-\infty, x_0) \tag{III.1.10}$$

en el caso c)

$$F(x) = 1 \qquad \text{en} \quad [x_0, \infty) \tag{III.1.11}$$

Los casos a) y b) de (1.1) y (1.2) corresponden a $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$ precisamente con $\alpha = x_0$.

Los casos c) y d) de (1.4) y (1.7) tienen $\mathcal{D} = (-\infty, \infty)$.

Ahora queda excluido el caso $\mathcal{D} = (\alpha, \infty)$.

Los subconjuntos de $\mathfrak{F}_d$ de los tipos a), b), c) y d) señalados antes podemos denotarlos por

$$\mathfrak{F}_{a)} \qquad \mathfrak{F}_{b)} \qquad \mathfrak{F}_{c)} \qquad \mathfrak{F}_{d)} \tag{III.1.12}$$

que constituyen una partición de $\mathfrak{F}_d$, o sea, los conjuntos de (1.12) son disjuntos y su unión es $\mathfrak{F}_d$.

Igualmente podemos denotar por

$$\begin{gathered} \mathcal{M}_d = \omega(\mathfrak{F}_d) \quad , \quad \mathcal{M}_{a)} = \omega(\mathfrak{F}_{a)}) \ \mathcal{M}_{b)} = \omega(\mathfrak{F}_{b)}) \\ \mathcal{M}_{c)} = \omega(\mathfrak{F}_{c)}) \ \mathcal{M}_{d)} = \omega(\mathfrak{F}_{d)}) \end{gathered} \tag{III.1.13}$$

Proposición III.1.1. Sea $F \in \mathfrak{F}$ y $m = \omega(F)$. Condición necesaria y suficiente para que $m \in \mathcal{M}_d$ es que se cumpla:

1.º El dominio $\mathcal{D}$ de m debe ser de la forma $(-\infty, \infty)$ o $[\alpha, \infty)$.

2.º El conjunto C de puntos de discontinuidad de m debe ser finito o numerable sin puntos de acumulación a distancia finita.

3.º En el caso $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$ debe ser

$$\min C > \alpha$$

para el mínimo de C que indudablemente existe por la condición 2.ª

4.º Si x', x'' son dos puntos de C consecutivos, $m(x)$ debe ser constante en el intervalo $[x', x'')$.

En el caso $\mathcal{D} = [\alpha, \infty)$, $m(x)$ debe ser también constante en el intervalo $[\alpha, \min C)$.

Cuando exista máximo de C, $m(x)$ debe ser constante en el intervalo $[\max C, \infty)$.

Observación. Antes de pasar a la demostración veamos que se puede establecer una notación para los puntos de C con arreglo a su tipo de orden creciente.

En el caso $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$ llamaremos siempre x_0 a α y el conjunto $C \cup \{\alpha\} = C \cup \{x_0\}$ puede ordenarse en una de las dos formas siguientes

a) $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$
b) $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$

según sea C finito o numerable.

En el caso $\mathcal{D} = (-\infty,\infty)$ los puntos de C pueden ordenarse en una de las dos formas siguientes

c) $x_0 > x_{-1} > x_{-2} > \ldots > x_{-n} > \ldots$
d) $\ldots < x_{-n} \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$

según que exista máximo de C o no exista.

Con esta notación la condición 4.ª del enunciado se traduce así:

m(x) es constante en cada uno de los intervalos
$[x_r, x_{r+1})$ en todos los casos
$[x_n,\infty)$ en a)
$[x_0,\infty)$ en b)

Demostración. La imposibilidad de que $\mathcal{D} = (\alpha,\infty)$ ha sido señalada anteriormente, y constituye la condición 1.ª

La Proposición I.3.3 y la definición de $F \varepsilon \mathcal{F}_d$ nos conduce a las restantes condiciones, coincidiendo los casos a), b), c) y d) señalados al comienzo de este párrafo al coincidir las discontinuidades de F, con los tipos a), b), c) y d) de la observación anterior, quedando así probada la Proposición.

Proposición III.1.2. Sea $F \varepsilon \mathcal{F}_d$ y $m = \omega(F)$. En cualquiera de los casos (1.1), (1.2), (1.4) o (1.7) vale

$$\frac{F(x_r)}{F(x_{r+1})} = \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \qquad \text{(III.1.14)}$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de (I.3.8) del Lema I.3.1, tomando

$$A = x_{r+1} \quad , \quad B = x_r$$

y del hecho de ser F(x) constante en $[x_r, x_{r+1})$, por lo que

$$F(x_{r+1}-) = F(x_r)$$

y dicha igualdad (I.3.8) nos da

$$\frac{F(x_{r+1})}{F(x_r)} = \frac{x_{r+1} - m(x_r)}{x_{r+1} - m(x_{r+1})}$$

y como los numeradores de esta igualdad no son nulos, resulta (1.14).

Una consecuencia inmediata de (1.14) es la siguiente fórmula válida para todo $k \leqslant k'$ estando k y k' dentro de sus valores posibles

$$F(x_k) = \prod_{r=k}^{k'} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} F(x_{k'+1}) \qquad \text{(III.1.15)}$$

En el caso discreto que estamos considerando, puesto que en cada intervalo $[x_r, x_{r+1})$ tanto $F(x)$ como $m(x)$ son constantes, basta conocer los valores $F(x_r)$ y $m(x_r)$ en los puntos x_r para determinar F y m completamente.

Se suelen utilizar en los cálculos las probabilidades que corresponden a los puntos x_r

$$p_r = F(x_r) - F(x_r -) = F(x_r) - F(x_{r-1}) \qquad \text{(III.1.16)}$$

con lo cual se tiene, por ejemplo, la expresión siguiente para la función de medias

$$m(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} u dF(u)}{F(x)} = \frac{\sum\limits_{x_j \leqslant x} p_j x_j}{\sum\limits_{x_j \leqslant x} p_j}$$

y de acuerdo con la observación anterior, es suficiente conocer para todo r posible.

$$m(x_r) = \frac{\sum\limits_{j \leqslant r} x_j p_j}{\sum\limits_{j \leqslant r} p_j} \qquad \text{(III.1.17)}$$

III.2. *Obtención de ω^{-1} en el caso discreto*

La fórmula (1.14) o más directamente (1.15) permite obtener F a partir de *m* en el caso discreto.

Proposición III.2.1. Si $F \varepsilon \mathfrak{F}_d$ y $m = \omega(F)$, se puede obtener F a partir de *m* por las fórmulas siguientes:
Para el caso a)

$$F(x) = 0 \qquad \text{para } x < x_0$$

$$F(x_k) = \prod_{r=k}^{n-1} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \quad \text{si } k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{III.2.1}$$

$$F(x) = 1 \qquad \text{para } x \geqslant x_n$$

Para el caso b)

$$F(x) = 0 \qquad \text{para } x < x_0$$

$$F(x_k) = \prod_{r=k}^{\infty} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{III.2.2}$$

Para el caso c)

$$F(x_k) = \prod_{k \leqslant r \leqslant -1} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \quad k = -1, -2, -3, \ldots \tag{III.2.3}$$

$$F(x) = 1 \qquad \text{para } x \geqslant x_0$$

Para el caso d)

$$F(x_k) = \prod_{r=k}^{\infty} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{III.2.4}$$

Se entiende que en todos los casos a), b), c), d) $F(x) = F(x_r) =$ constante en los intervalos $[x_r, x_{r+1})$.

Demostración. Se obtienen estas fórmulas utilizando (1.15) y distinguiendo las particularidades de cada caso sin que ofrezcan dificultad los detalles pertinentes.

III.3. *Condiciones necesarias y suficientes para que* $m \in \mathcal{M}_d$

Teorema III.3.1. Sea *m* una función real. Condición necesaria y suficiente para que $m \in \mathcal{M}_d = \omega(\mathfrak{F}_d)$ son las siguientes:

1.ª El dominio $\mathcal{D}$ de *m* debe ser de una de las formas siguientes: $(-\infty,\infty)$ o $[\alpha,\infty)$.

2.ª Si $\mathcal{D} = (-\infty,\infty)$ para todo $x \in \mathcal{D}$.

$$m(x) < x$$

Si $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$

$$\alpha \leqslant m(x) < x \qquad \text{para todo } x > \alpha$$

$$m(\alpha) = \alpha$$

3.ª *m* es creciente en sentido amplio.

4.ª El conjunto C de los puntos de discontinuidad de *m* debe ser finito o numerable, sin ningún punto de acumulación a distancia finita. Para cada dos puntos de discontinuidad consecutivos x_r, x_{r+1}; $m(x)$ debe ser constante en $[x_r, x_{r+1})$. Si existe un punto de discontinuidad máximo M, $m(x)$ será constante en $[M,\infty)$.

En el caso $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$, si x_1 es el primer punto de discontinuidad debe ser $x_1 > \alpha$ y $m(x)$ constante en $[\alpha,x_1)$.

Observación. Los puntos del conjunto C o $C \cup \{\alpha\}$ de esta condición 4.ª pueden recibir la notación que se indicó en la observación a la Proposición 1.1, notación que adoptamos en lo que sigue.

5.ª Cuando no exista máximo de C, la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{m(x_{r+1}) - m(x_r)}{x_{r+1} - m(x_{r+1})} \tag{III.3.1}$$

es convergente (casos b) y d)).

6.ª Cuando sea $\mathcal{D} = (-\infty,\infty)$ la serie

$$\sum_{-\infty < r \leqslant -1} \frac{m(x_{r+1}) - m(x_r)}{x_{r+1} - m(x_{r+1})} \tag{III.3.2}$$

es divergente (casos c) y d)).

7.ª Cuando $\mathcal{D} = (-\infty, \infty)$ (casos c) y d))

$$\lim_{k \to -\infty} (m(x_k)) \prod_{r \geqslant k} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} = 0 \qquad \text{(III.3.3)}$$

Demostración. La necesidad de las condiciones 1.ª y 4.ª se sigue de la Proposición 1.1. La 2.ª, 3.ª, 5.ª y 6.ª se sigue de la 2.ª, 3.ª, 5.ª y 6.ª de la Proposición I.7.1 teniendo en cuenta la Proposición 1.1, ya que la integral de Lebesgue-Stieltjes de la condición 5.ª de la Proposición I.7.1 se convierte en la serie (3.1), y lo mismo ocurre con la integral y la serie de la condición 6.ª

La condición 7.ª se sigue de la Proposición I.7.1 y de la Proposición 2.1 fórmulas (2.3) y (2.4).

Para demostrar la suficiencia de dichas condiciones, supongamos que $\overline{m}$ es una función real que las satisface y $\overline{F}$ la función construida por las fórmulas (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) de acuerdo con el tipo del conjunto C.

$\overline{F}$ está definida por la expresión

$$\overline{F}(x_k) = \prod_{r \geqslant k} \frac{x_{r+1} - \overline{m}(x_{r+1})}{x_{r+1} - \overline{m}(x_r)} \qquad \text{(III.3.4)}$$

aparte de las particularidades que se señalan en (2.1), (2.2), (2.3), (2.4).

Se debe demostrar en primer lugar que $\overline{F}$ así construida es una función de distribución.

Por las condiciones 2.ª y 3.ª de la Proposición

$$0 < \frac{x_{r+1} - \overline{m}(x_{r+1})}{x_{r+1} - \overline{m}(x_r)} < 1 \qquad \text{(III.3.5)}$$

luego por (3.4),

$$0 < \overline{F}(x_r) < 1$$

si el producto existe. En los casos b) y d) la convergencia de (3.4) es equivalente a la de

$$\frac{1}{\overline{F}(x_k)} = \prod_{r \geqslant k} \frac{x_{r+1} - \overline{m}(x_r)}{x_{r+1} - \overline{m}(x_{r+1})} = \prod_{r \geqslant k} \left(1 + \frac{\overline{m}(x_{r+1}) - \overline{m}(x_r)}{x_{r+1} - \overline{m}(x_{r+1})}\right)$$

el cual es convergente por la condición 5.ª de la Proposición, es decir (3.4) es convergente. En los casos a) y c) la existencia de (3.4) no ofrece duda pues es un producto finito.

De la (3.4) se sigue:

$$\overline{F}(x_k) = \frac{x_{k+1} - \overline{m}(x_{k+1})}{x_{k+1} - \overline{m}(x_k)} \overline{F}(x_{k+1}) \qquad \text{(III.3.6)}$$

que junto con (3.5) nos da

$$\overline{F}(x_k) < \overline{F}(x_{k+1}) \qquad \text{(III.3.7)}$$

luego $\overline{F}$ es monótona.

Para demostrar en los casos c) y d) que

$$\lim_{k \to -\infty} \overline{F}(x_k) = 0 \qquad \text{(III.3.8)}$$

supongamos $k < 0$ y escribamos

$$\overline{F}(x_k) = \prod_{r \geqslant k} \frac{x_{r+1} - \overline{m}(x_{r+1})}{x_{r+1} - \overline{m}(x_r)} =$$

$$= \prod_{k \leqslant r \leqslant -1} \frac{x_{r+1} - \overline{m}(x_{r+1})}{x_{r+1} - \overline{m}(x_r)} \; P = \overline{F}(x_0) \prod_{k \leqslant r \leqslant -1} \frac{x_{r+1} - \overline{m}(x_{r+1})}{x_{r+1} - \overline{m}(x_r)}$$

$(P = \overline{F}(x_0))$

P vale 1 en el caso c) y

$\displaystyle\prod_{r \geqslant 0} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)}$ en el d) y en ambos casos $P = \overline{F}(x_0)$, luego

$$\frac{\overline{F}(x_0)}{\overline{F}(x_k)} = \prod_{k \leqslant r \leqslant -1} \left(1 + \frac{\overline{m}(x_{r+1}) - \overline{m}(x_r)}{x_{r+1} - \overline{m}(x_{r+1})}\right)$$

la condición 6.ª implica la divergencia de este producto, es decir,

$$\lim_{k \to -\infty} \frac{\overline{F}(x_0)}{\overline{F}(x_k)} = \infty$$

y por tanto vale (3.8).

La condición

$$\lim_{k \to +\infty} \overline{F}(x_k) = 1$$

es trivial en los casos a) y c) y es consecuencia de la convergencia del producto infinito (3.4) en b) y d).

Por lo tanto queda comprobado que $\overline{F}$ es una función de distribución $\overline{F} \varepsilon \mathfrak{F}_d$.

Sólo falta comprobar que $\omega(\overline{F}) = \overline{m}$. Ahora bien (3.6), que resultó de (3.4), se puede escribir

$$(x_{k+1} - \overline{m}(x_k))\ \overline{F}(x_k) = (x_{k+1} - \overline{m}(x_{k+1}))\ \overline{F}(x_{k+1})$$

de donde

$$\overline{F}(x_{k+1})\ \overline{m}(x_{k+1}) - \overline{F}(x_k)\ \overline{m}(x_k) = \overline{m}_{k+1}\ (\overline{F}(x_{k+1}) - \overline{F}(x_k))$$

cambiando k + 1 por r

$$\overline{F}(x_r)\ \overline{m}(x_r) - \overline{F}(x_{r-1})\ \overline{m}(x_{r-1}) = x_r(\overline{F}(x_r) - \overline{F}(x_{r-1}))$$

y utilizando la notación más breve (1.12)

$$\overline{F}(x_r) - \overline{F}(x_{r-1}) = \overline{F}(x_r) - \overline{F}(x_r -) = p_r$$

tenemos

$$\overline{F}(x_r)\ \overline{m}(x_r) - \overline{F}(x_{r-1})\ \overline{m}(x_{r-1}) = p_r x_r \qquad \text{(III.3.9)}$$

Supongamos por ejemplo el caso a) o b), o sea, $\mathcal{D} = [\alpha, \infty) = [x_0, \infty)$.

Podemos escribir (3.9) para $r = 1, 2, 3, \ldots, k$ y resulta, al sumar dichas igualdades

$$\overline{F}(x_k)\ \overline{m}(x_k) - \overline{F}(x_0)\ \overline{m}(x_0) = \sum_{r=1}^{k} p_r x_r$$

pero $\overline{m}(x_0) = x_0$ y como se define

$$p_0 = \overline{F}(x_0) - \overline{F}(x_0 -) = \overline{F}(x_0) \text{ resulta}$$

$$\overline{F}(x_k)\ \overline{m}(x_k) = \sum_{r=0}^{k} p_r x_r$$

$$\overline{F}(x_k) = \overline{F}(x_0) + \sum_{r=1}^{k} (\overline{F}(x_r) - \overline{F}(x_{r-1})) = \sum_{r=0}^{k} p_r$$

y finalmente

$$\overline{m}(x_k) = \frac{\sum\limits_{r\leqslant k} p_r x_r}{\sum\limits_{r\leqslant k} p_r} \tag{III.3.10}$$

que es la función de medias de la función de distribución F en la forma (1.17), o sea, $\overline{m} = \omega(\overline{F})$.

Esencialmente distinto es el caso en que $\overline{F}$ se determina por (2.3) o (2.4), o sea, en los casos c) y d).

En estos dos últimos casos, de (3.6) o (3.12), que siguen siendo válidas, se sigue

$$\sum_{k'\leqslant r\leqslant k} (\overline{F}(x_r)\ \overline{m}(x_r) - \overline{F}(x_{r-1})\ \overline{m}(x_{r-1})) = \sum_{k'\leqslant r\leqslant k} p_r x_r \tag{III.3.11}$$

Pero en los dos casos (2.3) y (2.4), la fórmula (3.4) llevada a la condición 7.ª del Teorema, o sea (3.3), permite escribir

$$\lim_{k\to -\infty} \overline{m}(x_k)\ \overline{F}(x_k) = 0$$

lo que prueba que si en (3.11) hacemos tender k′ a —∞, existe el límite del primer miembro y por tanto es convergente la serie del segundo miembro y obtenemos

$$\overline{F}(x_k)\ \overline{m}(x_k) = \sum_{r \leqslant k} p_r x_r$$

y por tanto

$$\overline{m}(x_k) = \frac{\displaystyle\sum_{r \leqslant k} p_r x_r}{\overline{F}(x_k)}$$

lo que prueba que

$$\overline{m} = \omega(\overline{F})$$

y queda demostrado el Teorema.

III.4. *Ejemplos*

Ejemplo III.4.1. Sea la función real *m* con dominio $\mathcal{D} = [0, \infty)$ definida de la siguiente forma

$$\left.\begin{aligned} m(r) &= \frac{ar}{a+1} && \text{si} \quad r = 0, 1, \ldots, n \\ m(x) &= \frac{an}{a+1} && \text{si} \quad x \geqslant n \end{aligned}\right\} \quad (a > 0) \qquad \text{(III.4.1)}$$

$m(x)$ constante en cada intervalo $[r, r+1)$

Resulta fácil comprobar que la función *m* así definida, verifica las propiedades de una función de medias discreta, es decir, $m \varepsilon \mathcal{M}_d$.

Por la Proposición 2.1 existe una función de distribución $F \varepsilon \mathfrak{F}_d$, cuyo valor es:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && \text{si} \quad x < 0 \\ F(r) &= \frac{n!\Gamma(r+a+1)}{r!\Gamma(n+a+1)} && \text{si} \quad r = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad \text{(III.4.2)} \\ F(x) &= 1 && \text{si} \quad x \geqslant n \end{aligned}$$

La función obtenida verifica las propiedades de una función de distribución, por ejemplo:

$$F(n) = 1; \quad p_r = F(r) - F(r-1) = \frac{an!\Gamma(r+a)}{r!\Gamma(n+a+1)} > 0 \quad \text{etc.}$$

Si $a = 1$, entonces $p_r = \dfrac{1}{n+1}$ y se trataría de una distribución con masa constante igual a $\dfrac{1}{n+1}$ en cada uno de los puntos r $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Si $a = 2$ entonces $p_r = \dfrac{2(r+1)}{(n+1)(n+2)}$ y se trataría de una distribución cuya probabilidad en cada punto r $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ es proporcional al valor $r + 1$.

Ejemplo III.4.2. Sea

$$x_0 > x_{-1} > x_{-2} > \ldots \tag{III.4.3}$$

una sucesión con

$$\lim_{n} x_{-n} = -\infty \tag{III.4.4}$$

y $c > 0$.

Definiremos

$$\begin{aligned} m(x) &= x_r - c \quad &\text{si} \quad x \in [x_r, x_{r+1}) \quad &(r \leqslant -1) \\ m(x) &= x_0 - c \quad &\text{si} \quad x \in [x_0, \infty) \quad & \end{aligned} \tag{III.4.5}$$

Se cumplen para esta función *m* las condiciones de la Proposición III.3.1.

Probaremos la condición 7.ª

Sea $k = -n < 0$. Entonces

$$m(x_k) \prod_{k \leqslant r \leqslant -1} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} =$$

$$= (x_{-n} - c) \prod_{-n \leqslant r \leqslant -1} \frac{x_{r+1} - (x_{r+1} - c)}{x_{r+1} - (x_r - c)} =$$

$$= (x_{-n} - c) \prod_{-n \leqslant r \leqslant -1} \frac{c}{c + \Delta x_r} =$$

$$= (x_{-n} - c) \frac{c}{c + x_0 - x_{-1}} \frac{c}{c + x_{-1} - x_{-2}} \cdots \frac{c}{c + x_{-n+1} - x_{-n}} \qquad \text{(III.4.6)}$$

y llamando

$$\begin{aligned} &x_0 - x_{-1} = ca_1 \\ &x_{-1} - x_{-2} = ca_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_{-n+1} - x_{-n} = ca_n \\ &x_0 - x_{-n} = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ &x_{-n} = x_0 - c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \end{aligned}$$

la expresión (4.6) se escribirá así

$$\frac{x_0 - c - c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)} \qquad \text{(III.4.7)}$$

Evidentemente $a_i > 0$ y $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ tiene de límite infinito, luego una parte de la expresión anterior es inmediato que tiende a cero

$$\frac{x_0 - c}{(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)} \to 0 \qquad \text{(III.4.8)}$$

La otra parte de (4.7) (prescindiendo de (4.8)) se reduce a

$$\frac{S_n}{\prod\limits^{n} (1 + a_i)} < \frac{S_n}{1 + S_n + \sum\limits_{i<j} a_i a_j} <$$

$$< \frac{S_n}{S_n + \sum\limits_{i<j} a_i a_j} = \frac{2S_n}{2S_n + \sum\limits_{i \neq j} a_i a_j} =$$

$$= \frac{2S_n}{2S_n + a_1(S_n - a_1) + a_2(S_n - a_2) + \ldots + a_n(S_n - a_n)} =$$

$$= \frac{2}{2 + a_1(1 - a_1/S_n) + a_2(1 - a_2/S_n) + \dots + a_n(1 - a_n/S_n)} \qquad \text{(III.4.9)}$$

Fijado $\varepsilon > 0$ elegiremos p de modo que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p > \frac{4}{\varepsilon}$$

y ya fijado p determinaremos q de modo que

$$\frac{a_i}{S_n} < \frac{1}{2} \qquad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, p$$

$$\text{si } n > q > p$$

con lo cual

$$a_i \left(1 - \frac{a_i}{S_n}\right) > \frac{a_i}{2} \qquad \text{(III.4.10)}$$

$$i = 1, 2, \dots, p \quad , \quad n > q$$

y (4.9) se acota así

$$\frac{S_n}{\prod_1^n (1 + a_i)} < \frac{2}{\sum_1^n a_i(1 - a_i/S_n)} <$$

$$< \frac{2}{\sum_1^p a_i(1 - a_i/S_n)} < \frac{2}{2/\varepsilon} = \varepsilon \qquad (n > q)$$

y resulta finalmente que el límite de (4.6) es cero, quedando probada la condición 7.ª de la Proposición 3.1.

Como las restantes se prueban también fácilmente resulta que la función *m* de (4.5) es una función de medias.

Ejemplo III.4.3. Sea

$$
\begin{array}{lll}
x_k = x_0 + kd & (d > 0) & \\
k = 0, -1, -2, -3, \ldots & & \\
m(x) = x_r - c & \text{si } x \varepsilon [x_r, x_{r+1}) & \\
 & & (c > 0) \qquad \text{(III.4.11)} \\
m(x) = x_0 - c & \text{si } x \varepsilon [x_0, \infty) &
\end{array}
$$

Esta función *m* es un caso particular del ejemplo anterior, por lo que m dada por (4.11) es una función de medias. La función de distribución correspondiente será

$$F(x_{-n}) = F(x_k) = \prod_{k \leqslant r \leqslant -1} \frac{x_{r+1} - (x_{r+1} - c)}{x_{r+1} - (x_r - c)} =$$

$$= \prod_{-n \leqslant r \leqslant -1} \frac{c}{c + d} = p^n \qquad (p = c/c + d)$$

y además $F(x_0) = 1$.

IV. RELACION ENTRE EL CASO DISCRETO Y CONTINUO

IV.1. *Producto-integral de Peano*

Existe una relación entre los casos discreto y continuo que vamos a exponer en lo que sigue.

Para ello introduciremos el producto-integral utilizado por G. Peano [19], V. Volterra [32], N. Arley [1] y otros.

El concepto es simple y se reduce a formar el concepto correlativo al de integral sustituyendo la operación de suma por la de producto, por lo que lo exponemos someramente.

Sea *f* una función continua y positiva en [a,b], y *g* una función continua y monótona creciente en [a,b], es decir, si

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b \qquad \text{se sigue} \qquad g(x_1) \leqslant g(x_2)$$

Estas limitaciones para *f* y *g* son suficientes para nuestro objeto.

A este par de funciones f y g queremos asociar un número J que llamaremos producto-integral en [a,b] y que representaremos por

$$J = \mathscr{P}_a^b (1 + f(x)\, dg(x)) \qquad \text{(IV.1.1)}$$

Sea π una partición de [a,b]

$$\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b \qquad \text{(IV.1.2)}$$

y

$$x_1', x_2', \ldots, x_k'$$

números cualesquiera con la única condición

$$x_r \leqslant x_r' \leqslant x_{r+1} \qquad r = 0, 1, \ldots, k-1 \qquad \text{(IV.1.3)}$$

La norma de la partición π viene dada por

$$N(\pi) = \max_r (x_{r+1} - x_r) \qquad \text{(IV.1.4)}$$

Denotemos por

$$J(\pi) = \prod_{r=0}^{k-1} (1+f(x_r')(g(x_{r+1}) - g(x_r)) = \prod_{r=0}^{k-1} (1+f(x_r'))\Delta g(x_r)) \qquad \text{(IV.1.5)}$$

$$\Delta g(x_r) = g(x_{r+1}) - g(x_r)$$

Establecida esta notación podemos formular la siguiente definición.

Definición IV.1.1. Llamamos producto integral (1.1) al número J si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición de norma

$$N(\pi) < \delta \quad \text{se tiene} \quad |J(\pi) - J| < \varepsilon$$

Este concepto está relacionado con el de integral. Llamemos I a la integral de Riemann-Stieltjes

$$I = \int_a^b f(x)dg(x) \qquad \text{(IV.1.6)}$$

Entonces podemos enunciar la siguiente Proposición.

Proposición IV.1.1. Siendo f(x), g(x) continuas en [a,b], f(x) positiva y g(x) monótona creciente existen (1.1) y (1.6) y se verifica la relación

$$\mathscr{P}_a^b (1 + f(x)dg(x)) = \exp\left(\int_a^b f(x)dg(x)\right)$$

Demostración. Es fácil comprobar que si

$$|x| < \frac{1}{2}$$

se verifica

$$x - x^2 \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x \tag{IV.1.7}$$

relación que aplicaremos posteriormente.

Fijado $\varepsilon > 0$ por la continuidad de la función exponencial existe un $\eta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad I - \eta < x < I + \eta$$

se cumple

$$\exp I - \varepsilon < \exp x < \exp I + \varepsilon \tag{IV.1.8}$$

relación que también usaremos más adelante.

La existencia de la integral (1.6), que es conocida, nos asegura que al numero $\eta/2$ le corresponde un $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad N(\pi) < \delta, \quad \text{se tiene} \quad \left|\sum_{r=0}^{k-1} f(x_r')\Delta g(x_r) - I\right| < \frac{\eta}{2}$$

o bien, llamando para abreviar

$$A_r = f(x_r')\Delta g(x_r)$$

que con $N(\pi) < \delta_1$ se tiene

$$I - \eta/2 \leqslant \sum_{r=0}^{k-1} A_r \leqslant I + \eta/2 \tag{IV.1.9}$$

Llamando

$$K = \max f(x)$$

$$\eta' = \min\left(\frac{1}{2K}, \frac{\eta}{2K^2(g(b) - g(a))}\right) \tag{IV.1.10}$$

por la continuidad uniforme de $g(x)$, al número $\eta' > 0$ le corresponde un $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < x'' - x' < \delta_2 \quad \text{implica} \quad g(x'') - g(x') < \eta'$$

luego si $N(\pi) < \delta_2$, $\max(\Delta g(x_r)) < \eta'$
de donde

$$A_r = f(x_r')\Delta g(x_r) \leqslant K\eta' \leqslant K \cdot \frac{1}{2K} = \frac{1}{2} \qquad \text{(IV.1.11)}$$

lo que permitirá aplicar (1.7) con $x = A_r$ y también con

$$N(\pi) < \delta_2$$

$$\sum_{r=0}^{k-1} A_r^2 = \sum_{r=0}^{k-1} (f(x_r')\Delta g(x_r))^2 \leqslant K^2(g(b) - g(a))\eta' \leqslant$$

$$\leqslant K^2(g(b) - g(a)) \frac{\eta}{2K^2(g(b) - g(a))} = \frac{\eta}{2} \qquad \text{(IV.1.12)}$$

Aplicando pues (1.7) con $x = A_r$, válida por (1.11) se obtiene

$$A_r - A_r^2 \leqslant \ln(1 + f(x_r')\Delta g(x_r)) \leqslant A_r$$

y sumando

$$\sum_{r=0}^{k-1} A_r - \sum_{r=0}^{k-1} A_r^2 \leqslant \ln \prod_{r=0}^{k-1} (1 + f(x_r')\Delta g(x_r)) \leqslant \sum_{r=0}^{k-1} A_r$$

y con $N(\pi) < \min(\delta_1, \delta_2)$ se pueden aplicar (1.9) y (1.12) y resulta

$$I - \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2} \leqslant \ln \prod_{r=0}^{k-1} (1 + f(x_r')\Delta g(x_r)) \leqslant I + \frac{\eta}{2}$$

y esta última permite aplicar (1.8) con

$$x = \ln \prod_{r=0}^{k-1} (1 + f(x_r')\Delta g(x_r))$$

y resulta

$$\exp I - \varepsilon \leqslant \prod_{r=0}^{k-1} (1 + f(x_r')\Delta g(x_r)) \leqslant \exp I + \varepsilon$$

que prueba la existencia del producto integral

$$\mathscr{P}_a^b (1 + f(x)dg(x))$$

y la igualdad de la Proposición, quedando ésta demostrada.

Una propiedad sencilla del producto integral es la siguiente

$$\mathscr{P}_a^b (1 + f(x)dg(x)) \mathscr{P}_b^c (1 + f(x)dg(x)) = \mathscr{P}_a^c (1 + f(x)dg(x)) \qquad \text{(IV.1.13)}$$

la cual se obtiene inmediatamente de la Proposición anterior.

IV.2. *Relación entre los casos discreto y continuo*

Las fórmulas de ω^{-1} obtenidas para los casos discretos (III.1.15) y continuo (II.4.13) están relacionadas, pudiendo obtenerse la del caso continuo por un proceso de límite del caso discreto, bajo ciertas condiciones.

Supongamos que *m* es una función de medias que cumple las siguientes condiciones

a) $m \varepsilon \mathscr{M}_c$, o sea, es continua
b) el dominio $\mathscr{D}$ de m es (α,∞)
c) m es constante en $[\beta,\infty)$, pero

$$m(x) < m(\beta) \text{ para } x < \beta$$

En estas condiciones $F = \omega^{-1}(m) \varepsilon \mathfrak{F}_c$ y vale $F(\alpha) = 0$ $F(\beta) = 1$.

A partir de *m* se pueden definir distribuciones de tipo discreto del siguiente modo. Sea π una partición del intervalo $[\alpha,\beta]$

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = \beta \qquad \text{(IV.2.1)}$$

con norma

$$N(\pi) = \max(x_{r+1} - x_r) \qquad \text{(IV.2.2)}$$

A partir del par m,π se puede obtener una función de medias

$$m_\pi \varepsilon \mathcal{M}_a$$

definida de la siguiente forma

$$\begin{array}{lll} \text{dominio de } m_\pi = [\alpha,\infty) & & \\ m_\pi(x) = x_0 & \text{si} & x \in [x_0, x_1) \\ m_\pi(x) = m(x_r) & \text{si} & x \varepsilon [x_r, x_{r+1}) \\ m_\pi(x) = \beta & \text{si} & x \varepsilon [\beta, \infty) \end{array} \qquad \text{(IV.2.3)}$$

La función $m_\pi(x)$ es constante en los intervalos $[x_r, x_{r+1})$ y $[\beta,\infty)$ pero los puntos x_r no son forzosamente de discontinuidad de m_π, pudiendo asegurarse solamente que

$$m_\pi(x_r) \leqslant m_\pi(x_{r+1}) \qquad \text{(IV.2.4)}$$

El conjunto C de puntos de discontinuidad de m_π es un subconjunto de (2.1).

El comprobar que m_π es una función de medias es trivial y omitimos su demostración.

Sea ahora

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n, \ldots \qquad \text{(IV.2.5)}$$

una sucesión de particiones del intervalo $[\alpha,\beta]$ que cumple la condición

$$\lim_n N(\pi_n) = 0 \qquad \text{(IV.2.6)}$$

Los puntos de π_n se deben denotar así

$$\alpha = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_{k(n)}^{(n)} = \beta$$

valiendo

$$N(\pi_n) = \max_r (x_{r+1}^{(n)} - x_r^{(n)})$$

$$\lim_n N(\pi_n) = 0$$

Llamaremos para abreviar $m_n(x)$ a $m_{\pi_n}(x)$.

Teorema IV.2.1. Sea $m \varepsilon \mathcal{M}_c$ con las condiciones a), b), c) señaladas al comienzo del párrafo. (π_n) una sucesión de particiones (2.5) con la condición (2.6) y (m_n) la sucesión de funciones definidas anteriormente a partir de m y π_n. Entonces

1.° $m_n \varepsilon \mathcal{M}_d$
2.° $\lim\limits_n m_n(x) = m(x)$ uniformemente en $\mathcal{D}$
3.° si es $F = \omega^{-1}(m)$, $F_n = \omega^{-1}(m_n)$ vale

$$\lim_n F_n(x) = F(x)$$

Demostración. La consecuencia 1.ª ya ha sido señalada anteriormente. La 2.ª se obtiene fácilmente, como sigue.

Sea

$$\alpha < x < \beta$$

$$x_r^{(n)} \leqslant x < x_{r+1}^{(n)}$$

$$m(x_r^{(n)}) \leqslant m(x) \leqslant m(x_{r+1}^{(n)})$$

y por la forma de definir m_n vale

$$m(x_r^{(n)}) = m_n(x) \leqslant m(x_{r+1}^{(n)})$$

luego

$$0 \leqq m(x) - m_n(x) = m(x) - m(x_r^{(n)})$$

ahora por la continuidad uniforme de m en $\mathcal{D}$, fijado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < x'' - x' < \delta \qquad \text{se sigue } 0 \leqslant m(x'') - m(x') < \varepsilon$$

y como llega a ser $N(\pi) < \delta$, se cumplirá, por tanto

$$0 \leqslant m(x) - m_n(x) = m(x) - m(x_r^{(n)}) < \varepsilon$$

por ser

$$0 \leqslant x - x_r^{(n)} < x_{r+1}^{(n)} - x_r^{(n)} \leqslant N(\pi_n) < \delta$$

lo que prueba que

$$\lim_n m_n(x) = m(x) \quad \text{uniformemente en } \mathcal{D} \tag{IV.2.7}$$

Para $x \geqslant \beta$ es trivial (2.7) por lo que resulta la segunda propiedad del Teorema.

Para demostrar la 3.ª parte de la tesis empezaremos notando que la fórmula (III.1.15) para distribuciones discretas, que puede escribirse así

$$\frac{F(x_{k'+1})}{F(x_k)} = \prod_{r=k}^{k'} \frac{x_{r+1} - m(x_r)}{x_{r+1} - m(x_{r+1})} \tag{IV.2.8}$$

es válida aunque se intercalen entre los puntos de discontinuidad puntos que no lo sean; en efecto sea $x_r < x' < x_{r+1}$ con $m(x_r) = m(x') < m(x_{r+1})$; entonces resulta evidente que:

$$\frac{F(x_{r+1})}{F(x_r)} = \frac{x_{r+1} - m(x_r)}{x_{r+1} - m(x_{r+1})} =$$

$$= \frac{x_{r+1} - m(x')}{x_{r+1} - m(x_{r+1})} \cdot \frac{x' - m(x_r)}{x' - m(x')} \tag{IV.2.9}$$

Por ello puede aplicarse dicha fórmula (2.8) aunque no sean todos los puntos x_r de discontinuidad.

Si suponemos ahora que

$$x \varepsilon [x_p^{(n)}, x_{p+1}^{(n)})$$

con $\alpha < x < \beta$ vale

$$m_n(x) = m(x_p^{(n)})$$

y valdrá por (2.8) teniendo en cuenta que F_n es constante en $[x_p^{(n)}, x_{p+1}^{(n)})$

$$\frac{1}{F_n(x)} = \frac{F_n(\beta)}{F_n(x)} = \frac{F_n(\beta)}{F_n(x_p^{(n)})} = \frac{F_n(x_{k(n)}^{(n)})}{F_n(x_p^{(n)})} = \prod_{r=p}^{k(n)-1} \frac{x_{r+1}^{(n)} - m_n(x_r^{(n)})}{x_{r+1}^{(n)} - m_n(x_{r+1}^{(n)})} =$$

$$= \prod_{r=p}^{k(n)-1} \frac{x_{r+1}^{(n)} - m(x_r^{(n)})}{x_{r+1}^{(n)} - m(x_{r+1}^{(n)})} = \prod_{r=p}^{k(n)-1} \left(1 + \frac{m(x_{r+1}^{(n)}) - m(x_r^{(n)})}{x_{r+1}^{(n)} - m(x_{r+1}^{(n)})}\right) \tag{IV.2.10}$$

El primer factor de (2.10)

$$A_n = 1 + \frac{m(x_{p+1}^{(n)}) - m(x_p^{(n)})}{x_{p+1}^{(n)} - m(x_{p+1}^{(n)})}$$

es evidente que tiene de límite la unidad si n tiende a infinito.

También tiene de límite la unidad la expresión:

$$B_n = 1 + \frac{m(x_{p+1}^{(n)}) - m(x)}{x_{p+1}^{(n)} - m(x_{p+1}^{(n)})}$$

con lo cual (2.10) la podemos escribir así

$$\frac{1}{F_n(x)} = \frac{A_n}{B_n} \cdot J(\sigma_n) \tag{IV.2.11}$$

con

$$J(\sigma_n) = \left(1 + \frac{m(x_{p+1}^{(n)}) - m(x)}{x_{p+1}^{(n)} - m(x_{p+1}^{(n)})}\right) \prod_{r=p+1}^{k(n)-1} \left(1 + \frac{\Delta m(x_r^{(n)})}{x_{r+1}^{(n)} - m(x_{r+1}^{(n)})}\right)$$

$$\Delta m(x_r^{(n)}) = m(x_{r+1}^{(n)}) - m(x_r^{(n)})$$

pero $J(\sigma_n)$ corresponde a la expresión (1.5) que se utiliza para definir el producto integral con las funciones

$$f(t) = \frac{1}{t - m(t)}$$

$$g(t) = m(t)$$

y la partición σ_n de $[x,\beta]$

$$x < x^{(n)}_{p+1} < x^{(n)}_{p+2} < \ldots < x^{(n)}_{k(n)} = \beta$$

por lo cual al tomar límites en (2.11) resulta

$$\lim_n \frac{1}{F_n(x)} = \mathscr{P}_x^\beta \left(1 + \frac{dm(t)}{t - m(t)} \right)$$

y por la Proposición 1.1

$$\frac{1}{\lim_n F_n(x)} = \exp\left(\int_x^\beta \frac{dm(t)}{t - m(t)} \right) = \exp\left(\int_x^\infty \frac{dm(t)}{t - m(t)} \right)$$

y por (II.4.14) del Teorema II.4.1

$$\lim_n F_n(x) = F(x)$$

Para $x \geqslant \beta$ o $x \leqslant \alpha$ la relación anterior es trivial, con lo cual queda demostrada la 3.ª parte del Teorema y éste en su totalidad.

IV.3. *Ejemplo*

Ejemplo IV.3.1. Sea la función $m \varepsilon \mathscr{M}_c$ definida por

$$m(x) = \frac{a}{a+1} x \qquad \text{si} \quad 0 < x \leqslant b$$

$$m(x) = \frac{ab}{a+1} \qquad \text{si} \quad x \geqslant b$$

o sea, $\mathcal{D} = (0, \infty)$.

Consideramos una partición π del intervalo [0,b]

$$\pi = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

con

$$x_r = r\frac{b}{n} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

La función de medias discreta correspondiente a la partición π es

$$m_n(x_r) = \frac{a \cdot b \cdot \dfrac{r}{n}}{a+1} = \frac{b}{n}\,\frac{ar}{a+1} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

$$m_n(x_r) = \frac{ba}{a+1} \qquad (r \geqslant n) \qquad \textbf{(IV.3.1)}$$

que es fácil comprobar que verifica las propiedades de una función de medias discreta.

La función de distribución discreta correspondiente a la función de medias (3.1) es por (III.2.1)

$$F_n(x_r) = 0 \qquad \text{si } r < 0$$

$$F_n(x_r) = \frac{n!\Gamma(r+a+1)}{r!\Gamma(n+a+1)} \qquad \text{si } 0 \leqslant r \leqslant n-1 \qquad \textbf{(IV.3.2)}$$

$$F_n(x_r) = 1 \qquad \text{si } r \geqslant n$$

La función de distribución (3.2) coincide con la función de distribución (III.4.2) del Ejemplo III.4.1 que corresponde a la función de medias (III.4.1).

Si hacemos tender n a infinito con $\dfrac{r}{n} \rightarrow \dfrac{x}{b}$

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x_r) = \lim_{n\to\infty} \frac{ab\dfrac{r}{n}}{a+1} = \frac{ax}{a+1} = m(x) \qquad \textbf{(IV.3.3)}$$

$$\frac{r}{n} \to \frac{x}{b}$$

con $x \varepsilon (o,b]$

$$\left(\text{si } x \geqslant b \text{ , } \lim m_n(x_r) = \frac{ab}{a+1} \right)$$

donde m(x) es una función continua que verifica las propiedades de una función de medias como es muy fácil comprobar.

En las mismas condiciones de los límites anteriores, la función de distribución discreta $F_n(x_r)$ tendería a

$$\lim F_n(x_r) = \frac{n!\Gamma(r+a+1)}{r!\Gamma(n+a+1)} =$$

$$= \left(\frac{x}{b} \right)^a = F(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant b) \qquad \text{(IV.3.4)}$$

(si $x \geqslant b$, $\lim F_n(x_r) = 1$)
con $F \varepsilon \mathfrak{F}_c$.

La función de distribución (3.4) es continua en $\mathcal{D}$ y resulta inmediato comprobar que verifica las propiedades de función de distribución.

Veamos por último que la función de distribución (3.4) es la imagen mediante ω^{-1} de la función de medias $m \varepsilon \mathcal{M}_c$ obtenida en (3.3). En efecto, utilizando (II.3.8)

$$F(x) = \exp \left[- \int_x^b \frac{dt}{t} \right] = \left(\frac{x}{b} \right)^a \qquad x \varepsilon (0,b]$$

$$F(x) = 1 \qquad x \geqslant b$$

que coincide con (3.4).

V. DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES TRUNCADAS. GENERALIDADES

V.1. *Distribuciones bidimensionales truncadas*

La generalización más natural a dos dimensiones del concepto de truncamiento por la derecha en una dimensión es, sin duda, la que exponemos a continuación.

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de distribución conocida

$$F(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) \tag{V.1.1}$$

y sea (x,y) un punto fijo (por el momento) del plano R^2, tal que $F(x,y) > 0$.

La variable aleatoria (X,Y) truncada por la derecha en el punto (x,y) es la variable aleatoria (X,Y) sometida a la condición expresada por las relaciones simultáneas

$$X \leqslant x \quad , \quad Y \leqslant y \tag{V.1.2}$$

Es decir, la variable aleatoria (X,Y) truncada por la derecha en el punto (x,y) es la que tiene por función de distribución la siguiente:

$$F(u,v/x,y) = \frac{P(X \leqslant u, Y \leqslant v;\ X \leqslant x, Y \leqslant y)}{P(X \leqslant x, Y \leqslant y)} =$$

$$= \frac{P(X \leqslant \min(u,x)\ ,\ Y \leqslant \min(v,y)}{P(X \leqslant x, Y \leqslant y)} = \frac{F(\min(u,x)\ ,\ \min(v,y))}{F(x,y)} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{F(u,v)}{F(x,y)} & \text{si } u \leqslant x, v \leqslant y \\[2ex] \dfrac{F(u,y)}{F(x,y)} & \text{si } u \leqslant x, v \geqslant y \\[2ex] \dfrac{F(x,v)}{F(x,y)} & \text{si } u \geqslant x, v \leqslant y \\[2ex] 1 & \text{si } u \geqslant x, v \geqslant y \end{cases} \tag{V.1.3}$$

Diremos también que $F(u,v/x,y)$ es la función de distribución que resulta de la función de distribución $F(x,y)$ por truncamiento por la derecha en el punto (x,y).

Se observa que existe una distribución truncada para cada (x,y) tal que $F(x,y) > 0$, o sea, que dada F existe una familia de distribuciones truncadas correspondiendo una a cada punto del conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \varepsilon R^2 : F(x,y) > 0\} \tag{V.1.4}$$

(denotamos por la misma letra $\mathcal{D}$ este conjunto, lo mismo que con la misma letra F la función de distribución para el caso bidimensional y unidimensional, pero el contexto evita cualquier confusión).

Acerca de la estructura del conjunto $\mathcal{D}$ da información la siguiente Proposición.

Proposición V.1.1. Sea F una función de distribución bidimensional dada y $\mathcal{D}$ el dominio (1.4) donde están definidas las distribuciones truncadas de F. Si un punto $(x',y') \in \mathcal{D}$, entonces el ángulo recto

$$A = \{(x,y) : x \geqslant x', y \geqslant y'\}$$

está contenido en $\mathcal{D}$.

Demostración. Es trivial, pues si $x \geqslant x', y \geqslant y'$, vale

$$F(x,y) \geqslant F(x',y') > 0$$

Fijado un número real *y* sea

$$\mathcal{D}_{1y} = \{x : (x,y) \varepsilon \mathcal{D}\} \tag{V.1.5}$$

De modo simétrico si se fija un número real x definimos

$$\mathcal{D}_{2x} = \{y : (x,y) \varepsilon \mathcal{D}\} \tag{V.1.6}$$

Estas son las *secciones* por *x* y por *y* del conjunto $\mathcal{D}$.

Las *proyecciones* primera y segunda de $\mathcal{D}$ vienen dadas por las expresiones:

$$pr_1 \mathcal{D} = \{x : (x,y) \varepsilon \mathcal{D} \text{ para algún } y\} \tag{V.1.7}$$
$$pr_2 \mathcal{D} = \{y : (x,y) \varepsilon \mathcal{D} \text{ para algún } x\} \tag{V.1.8}$$

respectivamente.

Proposición V.1.2. Para cualquier y real, el conjunto $\mathcal{D}_{1y}$ de (1.5) tiene precisamente una de las formas

$$(-\infty,\infty) \quad , \quad (\alpha,\infty) \quad , \quad [\alpha,\infty) \quad , \quad \phi \qquad \text{(V.1.9)}$$

pero si $y \varepsilon pr_2 \mathcal{D}$, (1.9) es una de las tres formas

$$(-\infty,\infty) \quad , \quad (\alpha,\infty) \quad , \quad [\alpha,\infty)$$

Del mismo modo, para cada $x \varepsilon R$, el conjunto $\mathcal{D}_{2x}$ (1.6) tiene una de las formas

$$(-\infty,\infty) \quad , \quad (\beta,\infty) \quad , \quad [\beta,\infty) \quad , \quad \phi \qquad \text{(V.1.10)}$$

pero si además $x \in pr_1 \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{2x}$ es una de las formas (1.10) excluido el conjunto vacío.

Demostración. Es trivial teniendo en cuenta que F(x,y) es monótona en cada variable.

El número α de (1.9) es función de y, y el β de (1.10) es función de x y pueden definirse así:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(y) = \inf \mathcal{D}_{1y} = \inf\{x : F(x,y) > 0\} \\ \beta &= \beta(x) = \inf \mathcal{D}_{2x} = \inf\{y : F(x,y) > 0\} \end{aligned} \qquad \text{(V.1.11)}$$

La función $x = \alpha(y)$ puede dejar de existir, por ejemplo si $\mathcal{D} = R^2$, o si toda la masa de probabilidad definida por F estuviese repartida a lo largo de una recta horizontal.

Pero si existe la función

$$x = \alpha(y)$$

su dominio es un punto o un intervalo finito o infinito, de cualquier tipo.

Caso de que exista esta función $x = \alpha(y)$ para $y \varepsilon I$, donde I es un intervalo finito o infinito de la recta, dicha función determina la frontera de $\mathcal{D}$, salvo los extremos de I. Esta frontera también podría definirse mediante una curva en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = x(a) \\ y = a + x(a) \end{cases}$$

donde x(a) fuese una función monótona decreciente y a + x(a) fuese una función monótona creciente. Las mismas consideraciones valen para $y = \beta(x)$.

V.2. *Funciones de medias*

A partir de la función de distribución F(u,v/x,y) (1.3) de la variable aleatoria truncada (U,V) podemos obtener las medias de U y V

$$\begin{aligned} m_1(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u\,d_{u,v}F(u,v/x,y) \\ m_2(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v\,d_{u,v}F(u,v/x,y) \end{aligned} \tag{V.2.1}$$

suponiendo que existan las integrales anteriores. Para la primera se tiene

$$m_1(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} u\,d_uF(u,\infty/x,y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u\, d_u \frac{F(\min(u,x)\,,\min(\infty,y))}{F(x,y)} =$$

$$= \frac{1}{F(x,y)}\left(\int_{(-\infty,x]} u\,d_uF(u,y) + \int_{(x,+\infty)} u\,d_uF(x,y)\right) \tag{V.2.2}$$

y como la última integral es nula por ser F(x,y) constante (independiente de la variable de integración u), queda

$$m_1(x,y) = \frac{\int_{(-\infty,x]} u\,dF(u,y)}{F(x,y)} \tag{V.2.3}$$

Cálculos completamente análogos nos dan a partir de la segunda de (2.1)

$$m_2(x,y) = \frac{\int_{(-\infty,y]} v\,dF(x,v)}{F(x,y)} \tag{V.2.4}$$

Este par de funciones (2.3), (2.4) constituyen las funciones de medias de la función de distribución F(x,y). Podemos formalizar esto en la siguiente definición.

Definición V.2.1. Dada una función de distribución bidimensional F(x,y) llamaremos *función* (vectorial) *de medias* al par $m = (m_1,m_2)$ donde m_1 y m_2 están definidas por (2.3) y (2.4), siempre que las integrales de Lebesgue-Stieltjes que intervienen en esta fórmula existan. La función $m_1(m_2)$ *será la función de medias de F respecto de x* (respecto de y).

Para la existencia de la función de medias *m* de *F* tenemos la siguiente Proposición.

Proposición V.2.1. Para que existan para todo *x* y todo *y* las integrales que intervienen en (2.3) y (2.4) es necesario y suficiente que existan las dos integrales

$$\int_{(-\infty,0]} u\, dF(u,y) \tag{V.2.5}$$

para todo *y*

$$\int_{(-\infty,0)} v\, dF(x,v) \tag{V.2.6}$$

para todo *x*.

Demostración. Para (2.5) esto se debe a que la existencia de las integrales

$$\int_{(x,0]} u\, dF(u,y) \qquad \text{si } x < 0$$

$$\int_{(0,x]} u\, dF(u,y) \qquad \text{si } x > 0$$

siempre está asegurada; lo mismo se deduce para (2.6).

Definiremos los elementos fundamentales que intervienen en nuestro problema.

Llamaremos $\mathscr{H}$ al conjunto de las funciones de distribución bidimensionales para las que existen (con valor finito) *las integrales (2.5) y (2.6)* para todo *y* y todo *x*.

Llamaremos K al conjunto de las funciones de medias

$$m = (m_1,m_2)$$

obtenidas de la definición 2.1 para cada $F \varepsilon \mathscr{H}$.

Las relaciones (2.3) y (2.4) determinan un elemento de K para cada elemento de $\mathscr{H}$, o sea, definen *una aplicación de* $\mathscr{H}$ *en* K *que denotaremos por*

$$\Psi : \mathscr{H} \to \mathrm{K} \tag{V.2.7}$$

donde

$$m = (m_1, m_2) = \Psi(F)$$

Del mismo modo que en las Partes anteriores se estudió la aplicación $\omega : \mathfrak{F} \to \mathscr{M}$ *será ahora objeto de estudio la aplicación* Ψ *de* $\mathscr{H}$ *en* K (2.7).

Dado un $y \varepsilon pr_2 \mathcal{D}$, que consideraremos fijo por el momento, $m_1(x,y)$ es una función de x

$$m_1(x,y) = m_{1y}(x) \tag{V.2.8}$$

definida para $x \varepsilon \mathcal{D}_{1y}$, $y \varepsilon pr_2 \mathcal{D}$
que llamaremos *sección* por *y* de $m_1(x,y)$.

Lo mismo, fijado x, con $x \varepsilon pr_1 \mathcal{D}$, la función

$$m_2(x,y) = m_{2x}(y) \tag{V.2.9}$$

definida para $y \varepsilon \mathcal{D}_{2x}$, con x fijo, $x \varepsilon pr_1 \mathcal{D}$
se llamará *sección* por *x* de $m_2(x,y)$.

Proposición V.2.2. Sea $F \in \mathscr{H}$ y

$$m = (m_1, m_2) = \Psi(F) \in \mathrm{K}$$

la función de medias de F.

Entonces existen dos funciones de distribución unidimensionales

$$F_{1y} \varepsilon \mathfrak{F} \quad , \quad F_{2x} \varepsilon \mathfrak{F}$$

con la propiedad

$$m_{1y} = \omega(F_{1y}) \tag{V.2.10}$$
$$m_{2x} = \omega(F_{2x}) \tag{V.2.11}$$

Demostración. Refiriéndonos al caso (2.10) tomemos la fórmula (2.3)

$$m_1(x,y) = m_{1y}(x) = \frac{\displaystyle\int_{(-\infty,x]} u \, dF(u,y)}{F(x,y)} \tag{V.2.12}$$

Definamos la función

$$F_{1y}(x) = \frac{F(x,y)}{F(+\infty,y)} \tag{V.2.13}$$

Como $y \varepsilon pr_2 \mathcal{D}$, $F(+\infty,y) > 0$; (2.13) tiene sentido. Además $F_{1y}(x)$ definida por (2.13) resulta fácilmente que es una función de distribución, por ejemplo, $F_{1y}(-\infty) = 0$, $F_{1y}(+\infty) = 1$, etc.

La función de medias $\hat{m} = \omega(F_{1y})$ de esta función de distribución unidimensional viene dada según (I.2.2) por

$$\hat{m}(x) = \frac{\displaystyle\int_{(-\infty,x]} u \, dF_{1y}(u)}{F_{1y}(x)} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{(-\infty,x]} u \, d\frac{F(u,y)}{F(+\infty,y)}}{\dfrac{F(x,y)}{F(+\infty,y)}} = \frac{\displaystyle\int_{(-\infty,x]} u \, dF(u,y)}{F(x,y)}$$

que coincide con (2.3), o sea

$$\hat{m} = \omega(F_{1y}) = m_{1y} \quad , \quad y \varepsilon pr_2 \mathcal{D} \tag{V.2.14}$$

y queda probada (2.10). La igualdad (2.11) se prueba del mismo modo, llegando a

$$m_{2x} = \omega(F_{2x}) \quad , \quad x \varepsilon pr_1 \mathcal{D} \tag{V.2.15}$$

Esta Proposición puede enunciarse brevemente diciendo que la función de medias respecto de *x*, $m_1(x,y)$, es para cada *y* una función de medias de una distribución unidimensional, y enunciado simétrico para $m_2(x,y)$.

V.3. *Propiedades de la función de medias* $m = (m_1,m_2)$

Según hemos visto en el párrafo 2, la función m_{1y}, fijado el parámetro *y* es una función de *x*. Esta función por (2.14) es una función de medias de una distribución unidimensional, por lo que posee todas las propiedades señaladas para esta función de medias en el Capítulo I. Lo mismo ocurre por (2.15) con la función m_{2x}, fijado el parámetro x.

Podemos dejar establecido este hecho de un modo formal en la Proposición siguiente.

Proposición V.3.1. Dada $m = (m_1,m_2) = \Psi(F)$ con $F \varepsilon \mathcal{H}$, la función de x(y), $m_{1y}(x) = m_1(x,y)$ ($m_{2x}(y) = m_2(x,y)$) tiene las propiedades señaladas en las Proposiciones I.3.1, I.3.2, I.3.3, I.3.4, I.4.1, I.4.2, I.6.1, I.7.1, I.7.2 y en los Teoremas I.5.1, I.5.2 y I.5.3.

Por ejemplo, la Proposición correspondiente a I.3.2 sería

a) Para todo $x \varepsilon \mathcal{D}_{1y}$, $y \varepsilon pr_2 \mathcal{D}$ se verifica

$$m_1(x,y) < x$$

con la única excepción del caso $\mathcal{D}_{1y} = [\alpha,\infty)$ en el cual vale

$$\begin{array}{ll} m_1(x,y) < x & \text{para } x > \alpha(y) \\ m_1(x,y) = \alpha & \text{para } x = \alpha(y) \end{array}$$

b) Para todo $y \varepsilon \mathcal{D}_{2x}$, $x \varepsilon pr_1 \mathcal{D}$ se verifica

$$m_2(x,y) < y$$

con la única excepción del caso $\mathcal{D}_{2x} = [\beta,\infty)$ en el cual vale

$$\begin{array}{ll} m_2(x,y) < y & \text{para } y > \beta(x) \\ m_2(x,y) = y & \text{para } y = \beta(x) \end{array}$$

Demostración. Se deduce de la Proposición 2.2 y de las Proposiciones enunciadas en la 3.1.

V.4. *Obtención de* F(x,y) *conocida* ω^{-1}

Proposición V.4.1. Dada $m = (m_1,m_2) \varepsilon K$, si podemos calcular $\omega^{-1}(m_{1y})$ y $\omega^{-1}(m_{2x})$ se verifica que $F = \Psi^{-1}(m_1,m_2)$ viene dada por

$$F(x,y) = \omega^{-1}(m_{2x})(y) \lim_{y \to +\infty} \omega^{-1}(m_{1y})(x) \qquad \text{(V.4.1)}$$

Demostración. Si las funciones m_{1y} , m_{2x}, pertenecen a un conjunto donde podemos calcular $\omega^{-1}(m_{1y})(x)$ y $\omega^{-1}(m_{2x})(y)$, tendremos por (2.14) y (2.15) que

$$F_{1y}(x) = \omega^{-1}(m_{1y})(x)$$
$$F_{2x}(y) = \omega^{-1}(m_{2x})(y)$$

y por tanto de (2.13) y de su análoga para F_{2x}

$$\frac{F(x,y)}{F(+\infty,y)} = \omega^{-1}(m_{1y})(x) \qquad (V.4.2)$$

$$\frac{F(x,y)}{F(x,+\infty)} = \omega^{-1}(m_{2x})(y) \qquad (V.4.3)$$

Haciendo en (4.3) tender *x* a infinito y teniendo en cuenta que $F(+\infty,+\infty) = 1$, resulta

$$F(+\infty,y) = \lim_{x\to+\infty} \omega^{-1}(m_{2x})(y) \qquad (V.4.4)$$

y llevando este resultado a (4.2) se obtiene

$$F(x,y) = \omega^{-1}(m_{1y})(x) \lim_{x\to+\infty} \omega^{-1}(m_{2x})(y) \qquad (V.4.5)$$

Siguiendo un camino correlativo se obtendría

$$F(x,y) = \omega^{-1}(m_{2x})(y) \lim_{y\to+\infty} \omega^{-1}(m_{1y})(x) \qquad (V.4.6)$$

V.5. *Funciones de distribución continuas. Obtención de Ψ^{-1} en este caso*

Un subconjunto notable del conjunto $\mathscr{H}$ (dominio de Ψ) es el conjunto $\mathscr{H}_c$ de las funciones de distribución continuas pertenecientes a $\mathscr{H}$. Llamaremos $K_c = \Psi(\mathscr{H}_c)$ al conjunto de las funciones de medias $m = (m_1,m_2)$ que son imágenes por Ψ de estas funciones de distribución continuas. Si $m = (m_1,m_2)\varepsilon K_c$ entonces, $m_{1y}(x)\varepsilon\mathscr{M}_c$ y $m_{2x}(y)\varepsilon\mathscr{M}_c$, valiendo lo dicho en la Parte II para m_{1y} y m_{2x}, por ejemplo, las secciones del dominio $\mathcal{D} = \{(x,y)\varepsilon R^2 : F(x,y) > 0\}$ son de la forma

$$\mathcal{D}_{1y} = (-\infty,\infty) \text{ o } (\alpha,\infty) \text{ y } \mathcal{D}_{2x} = (-\infty,\infty) \text{ o } (\beta,\infty)$$

quedando excluidos los casos

$$\mathcal{D}_{1y} = [\alpha,\infty) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{D}_{2x} = [\beta,\infty)$$

que forzosamente implican una discontinuidad de la función F_{1y} en α y F_{2x} en β.

Como $m_{1y}\varepsilon\mathcal{M}_c$ y $m_{2x}\varepsilon\mathcal{M}_c$, existen

$$\omega^{-1}(m_{1y})(x) = \exp\left(-\int_x^\infty \frac{d_1m_1(u,y)}{u - m_1(u,y)}\right) \tag{V.5.1}$$

$$\omega^{-1}(m_{2x})(y) = \exp\left(-\int_y^\infty \frac{d_2m_2(x,v)}{v - m_2(x,v)}\right) \tag{V.5.2}$$

por (II.4.14), pudiendo determinarse en este caso la función de distribución $F(x,y)\varepsilon\mathcal{H}_c$, como indicamos en la siguiente Proposición.

Proposición V.5.1. Sea $F\varepsilon\mathcal{H}_c$, $m = (m_1,m_2) = \Psi(F)\varepsilon K_c$. Entonces F queda determinada por $m = (m_1,m_2)$ mediante una integral de Riemann-Stieltjes

$$F(x,y) = \exp\left[-\left\{\int_x^\infty \frac{d_1m_1(u,y)}{u - m_1(u,y)} + \lim_{x\to+\infty}\int_y^\infty \frac{d_2m_2(x,v)}{v - m_2(x,v)}\right\}\right] \quad \text{si } (x,y)\varepsilon\mathcal{D} \tag{V.5.3}$$

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{si } (x,y)\notin\mathcal{D}$$

Demostración. Se obtiene (5.3) sustituyendo (5.1) y (5.2) en (4.5).

Si sustituimos en (4.6) se obtiene como expresión de F(x,y)

$$F(x,y) = \exp\left[-\int_y^{+\infty} \frac{d_2m_2(x,v)}{v - m_2(x,v)} + \lim_{y\to+\infty}\int_x^{+\infty} \frac{d_1m_1(u,y)}{u - m_1(u,y)}\right] \quad \text{si } (x,y)\varepsilon\mathcal{D} \tag{V.5.4}$$

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{si } (x,y)\notin\mathcal{D}$$

V.6. *Funciones de distribución derivables. Obtención de Ψ^{-1} en este caso*

Estudiaremos en este párrafo el subconjunto

$$\mathcal{H}_D \subset \mathcal{H}_c$$

de las funciones de distribución con derivadas parciales primeras y derivada segunda mixta continuas.

Como indicábamos en el párrafo 3 de esta Parte V, la Proposición II.3.1 será válida para $m = (m_1, m_2)$, así como los Corolarios II.3.1 y II.3.2 valiendo las condiciones necesarias para que $m = (m_1, m_2) \varepsilon K_D$ con $K_D = \Psi(\mathscr{H}_D)$.

La Proposición II.3.1 daría lugar ahora a la siguiente

Proposición V.6.1. Sea $F \varepsilon \mathscr{H}$, $m = (m_1, m_2) = \Psi(F)$ y $x(y)$ un punto interior de $\mathcal{D}_{1y}(\mathcal{D}_{2x})$. Entonces $m_1(m_2)$ es derivable en $x(y)$ si, y sólo si, F admite derivadas parciales primeras en $x(y)$. Además cuando existen estas derivadas parciales $D_1F(x,y)$ $(D_2F(x,y))$ valen las igualdades

$$\frac{D_1F(x,y)}{F(x,y)} = \frac{m_1'(x,y)}{x - m_1(x,y)} \tag{V.6.1}$$

$$\frac{D_2F(x,y)}{F(x,y)} = \frac{m_2'(x,y)}{y - m_2(x,y)} \tag{V.6.2}$$

con $D_1F(x,y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $D_2F(x,y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$

$$m_1'(x,y) = \frac{\partial m_1(x,y)}{\partial x} \quad , \quad m_2'(x,y) = \frac{\partial m_2(x,y)}{\partial y}$$

Demostración. Resulta de las Proposiciones 2.2 y II.3.1.

Proposición V.6.2. Sea $F \varepsilon \mathscr{H}_D$ y $m = (m_1, m_2) = \Psi(F)$. Entonces para todo $(x,y) \varepsilon \mathcal{D}$ se verifica

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m_1(x,y)}{x - m_1(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m_2'(x,y)}{y - m_2(x,y)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant - \frac{m_1'(x,y)}{x - m_1(x,y)} \cdot \frac{m_2'(x,y)}{y - m_2(x,y)} \tag{V.6.3}$$

Demostración. Derivando la igualdad (6.1) respecto de la variable *y* y la igualdad (6.2) respecto de la variable *x* obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m_1'(x,y)}{x - m_1(x,y)}\right) = \frac{F(x,y)\, D_{12}F(x,y)}{[F(x,y)]^2} - \frac{D_1F(x,y)\, D_2F(x,y)}{[F(x,y)]^2} \qquad (V.6.4)$$

con $D_{12}F(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m_2(x,y)}{y - m_2(x,y)}\right) = \frac{F(x,y)\, D_{21}F(x,y)}{[F(x,y)]^2} - \frac{D_1F(x,y)\, D_2F(x,y)}{[F(x,y)]^2} \qquad (V.6.5)$$

con $D_{21}F(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$

De (6.4) y (6.5) resulta la igualdad de la Proposición, ya que para la función F(x,y) vale la igualdad de sus derivadas mixtas.

La desigualdad de la Proposición resulta de (6.4), (6.1), (6.2) y de ser $F(x,y) > 0$, $D_{12}F(x,y) \geqslant 0$.

Proposición V.6.3. Si $F \varepsilon \mathscr{H}_D$ y $m = (m_1,m_2) = \Psi(F)$ se verifica para todo $(x,y) \varepsilon \mathcal{D}$

a) Existe $\lim\limits_{x \to \infty} \int_y^\infty \frac{m_2'(x,v)}{x - m_2(x,v)} dv$, y es una función $\phi(y)$ monótona decreciente y acotada inferiormente.

b) Existe $\lim\limits_{y \to +\infty} \int_x^\infty \frac{m_1'(u,y)}{u - m_1(u,y)} du$, y es una función $\theta(x)$ monótona decreciente y acotada inferiormente.

Demostración. a) La convergencia de la integral está asegurada por el Teorema I.5.1. Integrando (6.2) respecto de la variable *y* en $(y, +\infty)$ resulta

$$\int_y^{+\infty} \frac{m_2(x,v)}{v - m_2(x,v)} dv = L \frac{F(x,\infty)}{F(x,y)} \qquad (V.6.6)$$

El límite de (6.6) si x tiende a $+\infty$, nos da

$$\lim_{x\to+\infty} \int_y^{+\infty} \frac{m_2(x,v)}{v - m_2(x,v)} dv = L \frac{1}{F(+\infty,y)} = \phi(y)$$

función acotada inferiormente por cero y decreciente.

El apartado b) es análogo utilizando la igualdad (6.1).

En el siguiente Teorema determinaremos la inversa de la aplicación Ψ.

Teorema V.6.1. Sea $F \varepsilon \mathscr{H}_D$, $m = (m_1,m_2) = \Psi(F)$. Entonces F queda determinada por $m = (m_1,m_2)$ mediante una integral de Riemann

$$L \frac{F(c,d)}{F(a,b)} = \int_a^c \frac{m_1(u,d)}{u - m_1(u,d)} du + \int_b^d \frac{m_2'(a,v)}{v - m_2(a,v)} dv \qquad (V.6.7)$$

donde la quebrada que une los puntos (a,b), (a,d) y (c,d) está contenida en $\mathcal{D}$ y además

$$F(x,y) = \exp\left[- \left\{ \int_x^{+\infty} \frac{m_1'(u,y)}{u - m_1(u,y)} du + \lim_{a\to\infty} \int_y^{+\infty} \frac{m_2'(a,v)}{v - m_2(a,v)} dv \right\} \right] \qquad (V.6.8)$$

si $(x,y)\varepsilon\mathcal{D}$

$F(x,y) = 0$ si $(x,y)\notin\mathcal{D}$

por tanto la restricción de Ψ a $\mathscr{H}_D$ es inyectiva, o sea, la restricción

$$\Psi : \mathscr{H}_D \to K_D = \Psi(\mathscr{H}_D)$$

es una biyección.

Demostración. Las igualdades (6.1) y (6.2) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden que podemos escribir en la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial LF(x,y)}{\partial x} &= \frac{m_1'(x,y)}{x - m_1(x,y)} \\ \frac{\partial LF(x,y)}{\partial y} &= \frac{m_2(x,y)}{y - m_2(x,y)} \end{aligned}\right\} \qquad (V.6.9)$$

La Proposición 6.2 nos asegura que el sistema anterior es integrable, pudiendo escribirse como una ecuación diferencial total exacta

$$dF(x,y) = \frac{m_1(x,y)}{x - m_1(x,y)}\,dx + \frac{m_2'(x,y)}{y - m_2(x,y)}\,dy \qquad (V.6.10)$$

integrando la ecuación (6.10) por el camino rectilíneo PP'Q$\varepsilon\mathcal{D}$ con P(a,b), P'(a,d) y Q(c,d) obtenemos

$$\int_{PQ} dLF(x,y) = \int_{PQ} \left(\frac{m_1'(x,y)}{x - m_1(x,y)}\,dx + \frac{m_2(x,y)}{y - m_2(x,y)}\,dy \right) \qquad (V.6.11)$$

que se transforma en

$$LF(c,d) - LF(a,b) = \int_b^d \frac{m_2(a,v)}{v - m_2(a,v)}\,dv + \int_a^c \frac{m_1(u,d)}{u - m_1(u,d)}\,du \qquad (V.6.12)$$

De la igualdad (6.12) resulta la igualdad (6.7).
Para obtener (6.8) tomamos límites en (6.12) cuando *b* tiende a infinito, válido por el Teorema I.5.1, obteniendo

$$LF(c,d) - LF(a,+\infty) = -\int_d^{+\infty} \frac{m_2'(a,v)}{v - m_2(a,v)}\,dv + \int_a^c \frac{m_1'(u,d)}{u - m_1(u,d)}\,du \quad (V.6.13)$$

en (6.13) podemos tomar límites cuando *a* tiende a infinito por la Proposición 6.3 y el Teorema I.5.1, quedando

$$LF(c,d) = -\lim_{a\to\infty} \int_d^{+\infty} \frac{m_2'(a,v)}{v - m_2(a,v)}\,dv - \int_c^{+\infty} \frac{m_1'(u,d)}{u - m_1(u,d)}\,du \qquad (V.6.14)$$

y haciendo en (6.14) c = x , d = y obtenemos (6.8), lo que completa la demostración.

Tengamos en cuenta que si la ecuación (6.10) la integramos por el camino rectilíneo PP'Q$\in\mathcal{D}$ con P(a,b), P'(c,b) y Q(c,d) los razonamientos anteriores son análogos y obtendríamos como función de distribución

$$F(x,y) = \exp\ -\left[\int_y^{+\infty} \frac{m_2'(x,v)}{v - m_2(x,v)}\,dv + \lim_{b\to\infty} \int_x^{+\infty} \frac{m_1'(u,b)}{u - m_1(u,b)}\,du \right]$$

Vamos a transformar la expresión (6.8), para ello sea

$$B(x,y) = -\left[\int_x^{+\infty} \frac{m_1'(u,y)}{u - m_1(u,y)} du + \lim_{a \to +\infty} \int_y^{+\infty} \frac{m_2'(a,v)}{v - m_2(a,v)} dv \right]$$

y

$$A(x,y;a,b) = -\left[\int_x^{a} \frac{m_1'(u,y)}{u - m_1(u,y)} du + \int_y^{b} \frac{m_2'(a,v)}{v - m_2(a,v)} dv \right]$$

con $(x,a)\varepsilon\mathcal{D}$, $(y,b)\varepsilon\mathcal{D}$

se verifica que

$$A(x,y;a,b) = B(x,y) + K(a,b) \qquad \text{con } K(a,b) = \text{cte} \qquad \text{(V.6.15)}$$

En efecto

$$A(x,y;a,b) = A(x,y;+\infty,+\infty) + A(+\infty,+\infty;a,b)$$

igualdad equivalente a (6.15).

Sustituyendo el valor de B(x,y) de (6.15) en (6.8) resulta

$$F(x,y) = \exp\ (A(x,y;a,b) - K(a,b)) \qquad \text{(V.6.16)}$$

expresión que utilizaremos en lo sucesivo para F(x,y).

Teorema V.6.2. Sea $m = (m_1,m_2)$ una función (vectorial) real en su dominio. Las condiciones (simultáneas) siguientes son necesarias y suficientes para que $m = (m_1,m_2)$ sea una función de medias de una función de distribución de $\mathscr{H}_D$.

1.ª Las secciones del dominio $\mathcal{D}$ de $m = (m_1,m_2)$ son de la forma $\mathcal{D}_{1y} = (-\infty,\infty)$ o (α,∞) y $\mathcal{D}_{2x} = (-\infty,\infty)$ o (β,∞).

2.ª Debe valer para todo $(x,y)\varepsilon\mathcal{D}$

$$m_1(x,y) < x \qquad y \qquad m_2(x,y) < y$$

y además si $\mathcal{D}_{1y} = (\alpha,\infty)$ ($\mathcal{D}_{2x} = (\beta,\infty)$) entonces

$$m_1(x,y) > \alpha \qquad (m_2(x,y) > \beta)$$

3.ª m_1 (m_2) es creciente en sentido amplio con la variable *x* (y).

4.ª m_1 (m_2) es continua en el dominio $\mathcal{D}$.

5.ª Para todo $(x,y)\varepsilon\mathcal{D}$ la integral de Riemann

$$\int_x^{+\infty} \frac{m_1'(u,y)}{u - m_1(u,y)}\, du \qquad \left(\int_y^{+\infty} \frac{m_2'(x,v)}{v - m_2(x,v)}\, dv\right)$$

es finita.

6.ª La integral de Riemann

$$\int_{\mathcal{D}_{1y}} \frac{m_1'(x,y)}{x - m_1(x,y)}\, dx \qquad \left(\int_{\mathcal{D}_{2x}} \frac{m_2'(x,y)}{y - m_2(x,y)}\, dy\right)$$

es infinita.

7.ª Para todo $(x,y)\varepsilon\mathcal{D}$ existe

$$\lim_{x\to+\infty} \int_y^{+\infty} \frac{m_2'(x,v)}{v - m_2(x,v)}\, dv \qquad \left(\lim_{y\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{m_1'(u,y)}{u - m_1(u,y)}\, du\right)$$

y es una función $\phi(y)$ ($\theta(x)$) monótona decreciente y acotada inferiormente.

8.ª Para todo $(x,y)\varepsilon\mathcal{D}$ vale

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m_1'(x,y)}{x - m_1(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m_2'(x,y)}{y - m_2(x,y)}\right) \geqslant$$

$$- \frac{m_1'(x,y)}{x - m_1(x,y)}\,\frac{m_2'(x,y)}{y - m_2(x,y)}$$

9.ª En el caso $\mathcal{D} = (-\infty,\infty)x(-\infty,\infty)$, se verifica

$$\lim_{x\to-\infty} m_1(x,y) \cdot \exp\left(A(x,y;a,b) - K(a,b)\right) = 0$$

$$\lim_{y\to-\infty} m_2(x,y) \cdot \exp\left(A(x,y;a,b) - K(a,b)\right) = 0$$

con $(a,b)\varepsilon\mathcal{D}$.

Demostración. La necesidad de las condiciones 1.ª a 6.ª se sigue de la Proposición 3.1. La necesidad de la condición 7.ª se sigue de la Proposición 6.3, la necesidad de la condición 8.ª de la Proposición 6.2 y la necesidad de la condición 9.ª del Lema II.5.2.

Para demostrar que estas condiciones 1.ª a 9.ª son suficientes, supongamos que una función que llamamos $\overline{m} = (\overline{m}_1,\overline{m}_2)$, es una función continua en su dominio $\mathcal{D}$ y que satisface las condiciones 1.ª a 9.ª del Teorema.

Definamos la función

$$\overline{F}(x,y) = \exp(A(x,y;a,b)) - K(a,b) \qquad \text{para } (x,y)\in\mathcal{D}$$

$$\overline{F}(x,y) = 0 \qquad \text{para } (x,y)\notin\mathcal{D}$$

con $(a,b)\in\mathcal{D}$.

Demostraremos primero que la función $\overline{F}$ es una función de distribución.

En primer lugar la definición de $\overline{F}$ tiene sentido por las condiciones 5.ª y 7.ª La continuidad y monotonía son triviales, pues se trata de la exponencial de funciones continuas. También para todo $(x,y)\in\mathcal{D}$ (dominio de $\overline{m} = (\overline{m}_1,\overline{m}_2)$) resulta $\overline{F}(x,y) > 0$ con lo cual

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : \overline{F}(x,y) > 0\}$$

Se demuestra sin dificultad que

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} A(x,y;a,b) = \lim_{x\to\infty} \lim_{y\to\infty} A(x,y;a,b) \tag{V.6.17}$$

y utilizando (6.17) resulta que

$$\begin{aligned}\overline{F}(+\infty,+\infty) &= \exp(A(+\infty,+\infty,a,b) - K(a,b) = \\ &= \exp(K(a,b) - K(a,b)) = 1\end{aligned}$$

La condición $\overline{F}(-\infty,y) = 0$, resulta de que

$$\overline{F}(-\infty,y) = \exp(A(-\infty,y;a,b) - K(a,b)) \quad \text{y}$$

$$A(-\infty,y;a,b) = -\infty \quad \text{, lo que lleva a } \overline{F}(-\infty,y) = \exp(-\infty) = 0$$

Lo mismo con $\overline{F}(x,-\infty) = 0$.

Calculando la derivada mixta de $\bar{F}$ obtenemos sin dificultad que

$$\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x \partial y} > 0$$

que demuestra que $\bar{F}(x,y)$ es una función de distribución.

Aplicando el Lema II.5.2 a $\bar{m}_1$ y $\bar{m}_2$, con $E(x,y) = \bar{F}(x,y)$ resulta

$$\bar{F}(b,y)\bar{m}_1(b,y) - \bar{F}(a,y)\bar{m}_1(a,y) = \int_a^b uD_1\bar{F}(u,y)du \qquad \text{(V.6.18)}$$

$$\bar{F}(x,d)\bar{m}_2(x,d) - \bar{F}(x,c)\bar{m}_2(x,c) = \int_c^d vD_2\bar{F}(x,v)dv \qquad \text{(V.6.19)}$$

con $a < b$, $c < d$ $(a,c)\varepsilon\mathcal{D}$.

En el caso $\mathcal{D} = (-\infty,\infty)x(-\infty,\infty)$ resulta de la condición 9.ª

$$\lim_{a\to-\infty} \bar{F}(a,y)\bar{m}_1(a,y) = 0 \qquad \text{(V.6.20)}$$

$$\lim_{c\to-\infty} \bar{F}(x,c)\bar{m}_2(x,c) = 0 \qquad \text{(V.6.21)}$$

Sustituyendo (6.20) en la expresión que resulta de tomar límites con $a\to-\infty$ en (6.18) resulta

$$\bar{m}_1(b,y) = \frac{\int_{-\infty}^{b} uD_1\bar{F}(u,y)du}{\bar{F}(b,y)}$$

Razonando de forma análoga

$$\bar{m}_2(x,d) = \frac{\int_{-\infty}^{d} vD_2\bar{F}(x,v)dv}{\bar{F}(x,d)}$$

que prueban que $\bar{F}\varepsilon\mathscr{H}_D$ y que $\bar{m} = (\bar{m}_1,\bar{m}_2) = \Psi(\bar{F})$.

7. EJEMPLOS

Ejemplo V.7.1. Sea el dominio

$$\mathcal{D} = \{(x,y)\varepsilon R^2 : x \geqslant 0 \quad , \quad y \geqslant 0 \quad , \quad x + y \geqslant b\}$$

y consideramos

$$\mathcal{D}_0 = \{(x,y)\varepsilon\mathcal{D} : 0 \leqslant x \leqslant b \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant b \quad , \quad x + y \geqslant b\}$$

definimos las funciones reales

$$m_1(x,y) = \frac{b + ax - y}{a + 1} \qquad\qquad (a > 1)$$

$$m_2(x,y) = \frac{b + ay - x}{a + 1}$$

si $(x,y)\varepsilon\mathcal{D}_0$ y

$$\begin{array}{ll} m_1(x,y) = m_1(b,y) & \text{si } x > b \\ m_2(x,y) = m_2(b,y) & \text{si } x > b \\ m_1(x,y) = m_1(x,b) & \text{si } y > b \\ m_2(x,y) = m_2(x,b) & \text{si } y > b \end{array}$$

Resulta inmediato comprobar que las funciones m_1 y m_2 verifican las propiedades de funciones de medias continuas, es decir, que $m = (m_1,m_2)\varepsilon K_c$.

Por la Proposición 5.1 existe una distribución continua $F\in\mathcal{H}_c$, tal que $F = \Psi^{-1}(m_1,m_2)$ y cuyo valor es por (5.3)

$$F(x,y) = \exp\left\{ -\left[\int_x^b \frac{a}{t + y - b}\, dt + \lim_{a\to b} \int_y^b \frac{a}{x + v - b}\, dv \right] \right\} \qquad (V.7.1)$$

La ecuación (7.1) se transforma en

$$F(x,y) = \exp\left\{ -a\, L \frac{b}{x + y - b} \right\}$$

de donde

$$F(x,y) = \frac{(x + y - b)^a}{b^a} \qquad \text{si } (x,y)\varepsilon\mathcal{D}$$

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{si } (x,y)\notin\mathcal{D}$$

Resulta inmediato comprobar que $F(x,y)$ verifica las propiedades de función de distribución.

Ejemplo V.7.2. Sea $c > 0$, $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $x_1y_1 = 1 + c$ y definamos los conjuntos

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_0 &= \{(x,y) : c/y_1 \leqslant x \leqslant y_1 \quad ; \quad c/x_1 \leqslant y \leqslant y_1 \quad ; \quad xy \geqslant c\} \\
\mathcal{D}_1 &= \{(x,y) : x \geqslant x_1 \quad , \quad y \geqslant c/x_1\} \\
\mathcal{D}_2 &= \{(x,y) : x \geqslant c/y_1 \quad , \quad y \geqslant y_1\} \\
\mathcal{D}_3 &= \{(x,y) : x \geqslant x_1 \quad , \quad y \geqslant y_1\} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \\
\mathcal{D} &= \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2
\end{aligned}$$

y en el dominio $\mathcal{D}$ las funciones

$$\begin{array}{lll}
m_1(x,y) = \dfrac{xy + c}{2y} & \text{si} & (x,y)\varepsilon\mathcal{D}_0 \\
m_1(x,y) = m_1(x_1,y) & \text{si} & (x,y)\varepsilon\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_3 \\
m_1(x,y) = m_1(x,y_1) & \text{si} & (x,y)\varepsilon\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_3 \\
m_1(x,y) = m_1(x_1,y_1) & \text{si} & (x,y)\varepsilon\mathcal{D}_3 \\
m_2(x,y) = \dfrac{xy + c}{2x} & \text{si} & (x,y)\varepsilon\mathcal{D}_0 \\
m_2(x,y) = m_2(x_1,y) & \text{si} & (x,y)\varepsilon\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_3 \\
m_2(x,y) = m_2(x,y_1) & \text{si} & (x,y)\varepsilon\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_3 \\
m_2(x,y) = m_2(x_1,y_1) & \text{si} & (x,y)\varepsilon\mathcal{D}_3
\end{array}$$

Resulta inmediato comprobar que las funciones $m_1(x,y)$, $m_2(x,y)$ verifican las propiedades de las funciones de medias.

La función de distribución $F(x,y) = \Psi^{-1}(m_1,m_2)$ viene dada, aplicando la fórmula (6.8) por

$$\begin{array}{lll}
F(x,y) = xy - c & \text{en} & \mathcal{D}_0 \\
F(x,y) = F(x_1,y) & \text{en} & \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_3 \\
F(x,y) = F(x,y_1) & \text{en} & \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_3 \\
F(x,y) = 1 & \text{en} & \mathcal{D}_3 \\
F(x,y) = 0 & \text{en el resto} &
\end{array}$$

V.8. *Distribuciones bidimensionales discretas. Inversa de ψ en este caso*

Nos limitaremos en este párrafo a considerar el caso de distribuciones de probabilidad discretas para las cuales existe un conjunto

$C = C_1 x C_2 \subset R^2$, donde $C_1(C_2)$ está formado por un número finito o numerable de puntos, sin ningún punto de acumulación a distancia finita y que tiene la propiedad

$$P(C) = 1$$

Respecto del conjunto C_1 puede ocurrir:

a) El número de puntos en que está concentrada toda la probabilidad es finito y los puntos son

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

b) El conjunto C_1 es numerable pero está acotado inferiormente. Los puntos de C_1 pueden denotarse por

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$$

$$\text{con } \lim_{n \to \infty} x_n = \infty$$

c) El conjunto C_1 es numerable pero está acotado superiormente y sus puntos pueden denotarse por

$$x_0 > x_{-1} > x_{-2} > \ldots > x_{-n} > \ldots$$

$$\text{con } \lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$$

d) El conjunto C_1 numerable no está acotado superior ni inferiormente. Sus puntos pueden representarse por

$$\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

$$\text{con } \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$$

$$\lim_{n \to -\infty} x_n = -\infty$$

Con el conjunto C_2, cuyos puntos representaremos por y_n con n finito o no, ocurren las mismas cuatro posibilidades, por lo que para el conjunto C tendríamos dieciséis posibilidades.

Representaremos por $\mathscr{H}_d \subset \mathscr{H}$ al subconjunto de funciones de distribución discretas y $K_d = \psi(\mathscr{H}_d)$; $\mathscr{H}_{1)} \ldots \mathscr{H}_{16)}$ son los subconjuntos de $\mathscr{H}_d$ correspondientes a las 16 posibilidades anteriores y (forman una partición de $\mathscr{H}_d$); $K_{1)} = \psi(\mathscr{H}_{(1)})$, ..., $K_{16)} = \psi(\mathscr{H}_{16)})$ sus imágenes mediante ψ.

Debido a la similitud existente entre los 16 casos anteriores, nosotros estudiaremos dos de estos casos.

1) Cuando el número de puntos en que está concentrada toda la probabilidad es finito y los puntos son (x_i,y_j) con

$$\begin{aligned} &x_i < x_{i+1} \\ &y_j < y_{j+1} \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \ldots, n; \ j = 0, 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{V.8.1}$$

2) Cuando los conjuntos C_1 y C_2 son numerables y están acotados inferiormente. Los puntos de $C = C_1 x C_2$, (x_i,y_j) pueden denotarse por

$$\begin{aligned} &x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots \\ &y_0 < y_1 < \ldots < y_n < \ldots \end{aligned} \tag{V.8.2}$$

con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

En ambos casos el domonio $\mathcal{D} = [\alpha,\infty)$ x $[\beta,\infty)$ con $\alpha = x_0$, $\beta = y_0$. Ahora queda excluido el caso $\mathcal{D} = (\alpha,\infty)$ x (β,∞).

Proposición V.8.1. Sea $F \varepsilon \mathscr{H}_d$ y $m = (m_1,m_2) = \psi(F)$. Entonces se verifica que

$$\text{a)} \quad \frac{F(x_{r+1}, y_s)}{F(x_r, y_s)} = \frac{x_{r+1} - m_1(x_r, y_s)}{x_{r+1} - m_1(x_{r+1}, y_s)} \tag{V.8.3}$$

$$\text{b)} \quad \frac{F(x_r, y_{s+1})}{F(x_r, y_s)} = \frac{y_{s+1} - m_2(x_r, y_s)}{y_{s+1} - m_2(x_r, y_{s+1})} \tag{V.8.4}$$

Demostración. Resulta de las Proposiciones 2.2 y III.1.2.

Una consecuencia inmediata de (8.3) y (8.4) son las dos fórmulas siguientes, para todo $k \leqslant k'$, $l \leqslant l'$ estando k,k', l y l' dentro de sus valores posibles

$$F(x_k, y_l) = \prod_{s=l}^{l'} \frac{y_{s+1} - m_s(x_k, y_{s+1})}{y_{s+1} - m_2(x_k, y_s)} \prod_{r=k}^{k'} \frac{x_{r+1} - m_1(x_{r+1}, y_{l'+1})}{x_{r+1} - m_1(x_r, y_{l'+1})} \cdot F(x_{k'+1}, y_{l'+1}) \tag{V.8.5}$$

$$F(x_k, y_l) = \prod_{r=k}^{k'} \frac{x_{r+1} - m_1(x_{r+1}, y_l)}{x_{r+1} - m_1(x_r, y_l)} \prod_{s=l}^{l'} \frac{y_{s+1} - m_2(x_{k'+1}, y_{s+1})}{y_{s+1} - m_2(x_{k'+1}, y_s)} \cdot F(x_{k'+1}, y_{l'+1}) \tag{V.8.6}$$

En el caso discreto que estamos considerando, puesto que en cada intervalo $[x_r,x_{r+1})([y_s,y_{s+1}))$ tanto $F(x,y)$ como $m_1(m_2)$ son constantes, basta conocer los valores de $F(x_k,y_s)$ y $m_1(x_r,y_s)$ $(m_2(x_r,y_s))$ en los puntos (x_r,y_s) para determina F y $m = (m_1,m_2)$ completamente.

En los cálculos se suelen utilizar las probabilidades que corresponden a los puntos (x_r,y_s).

$$p_{rs} = F(x_r,y_s) - F(x_{r-1},y_s) - F(x_r,y_{s-1}) + F(x_{r-1},y_{s-1}) \tag{V.8.7}$$

con lo cual se tiene, por ejemplo, las expresiones siguientes para las funciones de medias m_1 y m_2:

$$m_1(x,y) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{x_i \leqslant x \\ y_j \leqslant y}} p_{ij}\, x_i}{\displaystyle\sum_{\substack{x_i \leqslant x \\ y_j \leqslant y}} p_{ij}}$$

$$m_2(x,y) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{x_i \leqslant x \\ y_j \leqslant y}} p_{ij}\, y_j}{\displaystyle\sum_{\substack{x_i \leqslant x \\ y_j \leqslant y}} p_{ij}}$$

y de acuerdo con la observación anterior, es suficiente conocer para todo (r,s) posible

$$m_1(x_r,y_s) = \frac{\sum\limits_{\substack{i\leqslant r\\ j\leqslant s}} p_{ij}\, x_i}{\sum\limits_{\substack{i\leqslant r\\ j\leqslant s}} p_{ij}} \tag{V.8.8}$$

$$m_2(x_r,y_s) = \frac{\sum\limits_{\substack{i\leqslant r\\ j\leqslant s}} p_{ij}\, y_j}{\sum\limits_{\substack{i\leqslant r\\ j\leqslant s}} p_{ij}} \tag{V.8.9}$$

Definamos las expresiones

$$H_{rs} = \frac{x_{r+1} - m_1(x_{r+1}, y_s)}{x_{r+1} - m_1(x_r, y_s)} \quad \text{y} \quad V_{rs} = \frac{y_{s+1} - m_2(x_r, y_{s+1})}{y_{s+1} - m_2(x_r, y_s)} \tag{V.8.10}$$

Se puede enunciar la siguiente Proposición.

Proposición V.8.2. Si $F \varepsilon \mathscr{H}_d$ y $m = (m_1,m_2) = \psi(F)$ se verifica que

$$H_{rs}\, V_{r+1,s} = V_{rs}\, H_{r,s+1} \tag{V.8.11}$$

$$1 - V_{r+1,s} - H_{r,s+1} + H_{rs}\, V_{r+1,s} \geqslant 0 \tag{V.8.12}$$

con H_{rs} y V_{rs} definidos en (8.10).

Demostración. Es inmediata de (8.3), (8.4) y de las propiedades de F.

Veremos a continuación la

OBTENCION DE Ψ^{-1} EN EL CASO DISCRETO

Las fórmulas (8.5) y (8.6) permiten obtener F a partir de $m = (m_1, m_2)$ en el caso discreto.

Proposición V.8.3. Si $F \epsilon \mathscr{H}_d$ y $m = (m_1, m_2) = \psi(F)$, se puede obtener F a partir de $m = (m_1, m_2)$ por las fórmulas siguientes:

Para el caso (8.1)

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{si } x < x_0 \quad \text{o} \quad y < y_0$$

$$F(x_k, y_l) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{r=k}^{n-1} \frac{x_{r+1} - m_1(x_{r+1}, y_l)}{x_{r+1} - m_1(x_r, y_l)} \prod_{s=l}^{m-1} \frac{y_{s+1} - m_2(x_n, y_{s+1})}{y_{s+1} - m_2(x_n, y_s)} \cdot \\ \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1 \; ; \; l = 0, 1, \ldots, m-1) \\ \displaystyle\prod_{r=k}^{n-1} \frac{x_{r+1} - m_1(x_{r+1}, y_m)}{x_{r+1} - m_1(x_r, y_m)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \\ \displaystyle\prod_{s=l}^{m-1} \frac{y_{s+1} - m_2(x_n, y_{s+1})}{y_{s+1} - m_2(x_n, y_s)} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, m-1) \end{cases} \tag{V.8.13}$$

$$F(x,y) = 1 \qquad \text{si } x \geqslant x_n \quad , \quad y \geqslant y_n.$$

Si $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; $l = 0, 1, 2, \ldots, m-1$; la función de distribución se puede expresar

$$F(x_k, y_l) = \prod_{s=l}^{m-1} \frac{y_{s+1} - m_2(x_k, y_{s+1})}{y_{s+1} - m_2(x_k, y_s)} \prod_{r=k}^{n-1} \frac{x_{r+1} - m_1(x_{r+1}, y_m)}{x_{r+1} - m_1(x_r, y_m)} \tag{V.8.14}$$

por (8.5) (8.6).

Para el caso (8.2)

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{para } x < x_0 \quad \text{o} \quad y < y_0$$

$$F(x_k,y_l) = \prod_{r=k}^{\infty} \frac{x_{r+1} - m_1(x_{r+1},y_l)}{x_{r+1} - m_1(x_r,y_l)} \lim_{n} \prod_{s=l}^{\infty} \frac{y_{s+1} - m_2(x_n,y_{s+1})}{y_{s+1} - m_2(x_n,y_s)} \quad (V.8.15)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots \quad ; \quad l = 0, 1, 2, \dots)$$

Demostración. Se obtienen de (8.3) y (8.4).

Veremos a continuación condiciones necesarias y suficientes para que $m = (m_1,m_2) \in K_d$.

Proposición V.8.4. Sea $m = (m_1,m_2)$ una función (vectorial) real. Condición necesaria y suficiente para que $m = (m_1,m_2) \varepsilon K_d = \psi(\mathscr{H}_d)$ son las siguientes.

1.ª El dominio $\mathcal{D}$ de $m = (m_1,m_2)$ ha de ser de una de las formas $[\alpha,\infty) \times [\beta,\infty)$ o $(-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty)$.

2.ª Si $\mathcal{D} = (-\alpha,\infty) \times (-\infty,\infty)$ para todo $(x,y) \varepsilon \mathcal{D}$

$$m_1(x,y) < x$$
$$m_2(x,y) < y$$

Si $\mathcal{D} = [\alpha,\infty) \times [\beta,\infty)$

$$\alpha \leqslant m_1(x,y) < x \qquad \text{para } x > \alpha$$
$$m_1(\alpha,y) = \alpha$$

3.ª $m_1(m_2)$ es creciente en sentido amplio con la variable $x(y)$.

4.ª El conjunto $C_1(C_2)$ de los puntos de discontinuidad de $m_1(m_2)$ debe ser finito o numerable, sin ningún punto de acumulación a distancia finita. Para cada dos puntos de discontinuidad consecutivos x_r,x_{r+1} (y_s,y_{s+1}) $m_1(m_2)$ debe ser constante en $[x_r,x_{r+1})$ $([y_s,y_{s+1}))$.

Si existe un punto de discontinuidad máximo $M(N)$, $m_1(m_2)$ será constante en $[M,\infty)([N,\infty))$.

En el caso $\mathcal{D} = [\alpha,\infty) \times [\beta,\infty)$ si $x_1(y_1)$ es el primer punto de discontinuidad debe ser $x_1 > \alpha$ $(y_1 > \beta)$ y $m_1(m_2)$ constante en $[\alpha,x_1)([\beta,y_1))$.

5.ª
$$H_{rs} V_{r+1,s} = V_{rs} H_{r,s+1}$$
$$1 - V_{r+1,s} - H_{r,s+1} + H_{rs} V_{r+1,s} \geqslant 0$$

con H_{rs}, V_{rs} definidos en (8.10).

6.ª Cuando no existe máximo en $C_1(C_2)$, la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{m_1(x_{r+1},y) - m_1(x_r,y)}{x_{r+1} - m_1(x_{r+1},y)} \qquad (x_r,y)\varepsilon\mathcal{D} \tag{V.8.16}$$

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{m_2(x,y_{s+1}) - m_2(x,y_s)}{y_{s+1} - m_2(x,y_s)} \quad , \quad (x,y_s)\varepsilon\mathcal{D} \right) \tag{V.8.17}$$

es convergente. Caso 8.2.

7.ª Cuando sea $\mathcal{D} = (-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty)$, las series (aparecería cuando los conjuntos C_1 y C_2 son numerables, y no acotados superior ni inferiormente)

$$\sum_{-\infty<r\leqslant-1} \frac{m_1(x_{r+1},y) - m_1(x_r,y)}{x_{r+1} - m_1(x_{r+1},y)} \qquad (x_r,y)\varepsilon\mathcal{D} \tag{V.8.18}$$

$$\sum_{-\infty<s\leqslant-1} \frac{m_2(x,y_{s+1}) - m_2(x,y_s)}{y_{s+1} - m_2(x,y_{s+1})} \qquad (x,y_s)\varepsilon\mathcal{D} \tag{V.8.19}$$

son divergentes.

8.ª Cuando $\mathcal{D} = (-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty)$

$$\lim_{k\to-\infty} m_1(x_k,y) \prod_{r\geqslant k} \frac{x_{r+1} - m_1(x_{r+1},y)}{x_{r+1} - m_1(x_r,y)} \prod_{s\geqslant l} \frac{y_{s+1} - m_2(\infty,y_{s+1})}{y_{s+1} - m_2(\infty,y_s)} = 0 \tag{V.8.20}$$

$$\lim_{l\to-\infty} \prod_{r\geqslant k} \frac{x_{r+1} - m_1(x_{r+1},y)}{x_{r+1} - m_1(x_r,y)} \prod_{s\geqslant l} \frac{y_{s+1} - m_2(\infty,y_{s+1})}{y_{s+1} - m_2(\infty,y_s)} \cdot m_2(x,y_l) = 0 \tag{V.8.21}$$

Demostración. La necesidad de las condiciones anteriores resultan inmediatas de las Proposiciones 2.2 y III.3.1.

Para demostrar la suficiencia de dichas condiciones, supongamos que $\overline{m} = (\overline{m}_1, \overline{m}_2)$ es una función real que las satisface y $\overline{F}$ la función construida pór la fórmula (8.13). (El caso de la fórmula (8.14) es análogo distinguiendo su particularidad.)

$\overline{F}$ está definida por la expresión

$$\overline{F}(x_k, y_l) = \prod_{r=k}^{n-1} \frac{x_{r+1} - \overline{m}_1(x_{r+1}, y_l)}{x_{r+1} - \overline{m}_1(x_r, y_l)} \prod_{s=l}^{m-1} \frac{y_{s+1} - \overline{m}_2(x_n, y_{s+1})}{y_{s+1} - \overline{m}_2(x_n, y_s)} \qquad \text{(V.8.22)}$$

con $k = 0, 1, \ldots, n - 1$; $l = 0, 1, \ldots, m - 1$.

Vamos a demostrar en primer lugar que $\overline{F}$ así construida es una función de distribución.

Por las condiciones 2.ª y 3.ª de la Proposición

$$0 < \frac{x_{r+1} - \overline{m}_1(x_{r+1}, y_l)}{x_{r+1} - \overline{m}_1(x_r, y_l)} < 1 \qquad \text{(V.8.23)}$$

$$0 < \frac{y_{s+1} - \overline{m}_2(x_n, y_{s+1})}{y_{s+1} - \overline{m}_2(x_n, y_s)} < 1 \qquad \text{(V.8.24)}$$

luego de (8.22).

$$0 < \overline{F}(x_r, y_s) < 1$$

De (8.3) y (8.4) se sigue

$$\overline{F}(x_r, y_s) = \frac{x_{r+1} - \overline{m}_1(x_{r+1}, y_s)}{x_{r+1} - \overline{m}_1(x_r, y_s)} \overline{F}(x_{r+1}, y_s) \qquad \text{(V.8.25)}$$

$$\overline{F}(x_r, y_s) = \frac{y_{s+1} - \overline{m}_2(x_r, y_{s+1})}{y_{s+1} - \overline{m}_2(x_r, y_s)} \overline{F}(x_r, y_{s+1}) \qquad \text{(V.8.26)}$$

La desigualdad (8.23) junto con (8.25) nos da

$$\overline{F}(x_r,y_s) < \overline{F}(x_{r+1},y_s)$$

La desigualdad (8.24) junto con (8.26) nos da

$$\overline{F}(x_r,y_s) < \overline{F}(x_r,y_{s+1})$$

luego $\overline{F}$ es monótona respecto de cada variable.

Veamos por último que

$$\overline{p}_{rs} = \overline{F}(x_r,y_s) - \overline{F}(x_{r-1},y_s) - \overline{F}(x_r,y_{s-1}) + \overline{F}(x_{r-1},y_{s-1}) > 0 \tag{V.8.27}$$

De (8.3) y (8.4) se sigue que

$$\overline{F}(x_{r-1},y_{s-1}) = H_{r-1,s-1}\, V_{r,s-1}\, \overline{F}(x_r,y_s)$$
$$\overline{F}(x_{r-1},y_s) = H_{r-1,s}\, \overline{F}(x_r,y_s)$$
$$\overline{F}(x_r,y_{s-1}) = V_{r,s-1}\, \overline{F}(x_r,y_s)$$

sustituyendo en (8.27).

$$\overline{p}_{rs} = (1 - H_{r-1,s} - V_{r,s-1} + H_{r-1,s-1}\, V_{r,s-1})\, \overline{F}(x_r,y_s)$$

expresión no negativa por la Proposición 8.2.

Por lo que $\overline{F}$ es una función de distribución.

Si $l = m$ y $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, la función $\overline{F}$ definida por (8.13) también es una función de distribución (caso unidimensional) y lo mismo si $k = n$ y $l = 0, 1, \ldots, m - 1$.

Sólo falta comprobar que $\psi(\overline{F}) = \overline{m} = (\overline{m}_1,\overline{m}_2)$, lo cual es inmediato razonando de forma similar a como se hizo en la Proposición III.3.1 para cada una de las funciones $\overline{m}_1$ y $\overline{m}_2$.

V.9. *Ejemplo caso discreto*

Ejemplo V.9.1. Sea el dominio $\mathcal{D} = \{(r,s) \in \mathbb{Z}^2 / r \geqslant 0, s \geqslant 0, r + s \geqslant n\}$

y nos limitaremos al dominio $\mathcal{D}_0 = \{(r,s)\varepsilon Z^2 : 0 \leqslant r \leqslant n, \ 0 \leqslant s \leqslant n, \ r + s \geqslant n\}$, pues supondremos

$$m_1(r,s) = m_1(n,s) \qquad \text{para } r > n$$
$$m_1(r,s) = m_1(r,n) \qquad \text{para } s > n$$

e igual para la función $m_2(r,s)$, siendo en el dominio $\mathcal{D}_0$

$$m_1(r,s) = \frac{n + ar - s}{a + 1} \tag{V.9.1}$$

$$(a \geqslant 1)$$

$$m_2(r,s) = \frac{a + as - r}{a + 1} \tag{V.9.2}$$

Se puede comprobar sin ninguna dificultad que m_1 y m_2 son funciones de medias, por ejemplo verifican

$$1 - V_{r+1,s} - H_{r,s+1} + H_{rs} V_{r+1,s} \geqslant 0 \qquad \text{ya que}$$

$$1 - V_{r+1,s} - H_{r,s+1} + H_{rs} V_{r+1,s} = \frac{a(a-1)}{(r+s+2+a-n)(r+s+1+a+n)} \geqslant 0$$

ya que $a \geqslant 1$ y $r + s \geqslant n$.

y lo mismo el resto de propiedades.

Podemos entonces asegurar que existe una función de distribución $F = \psi(m_1,m_2)$ con $F\varepsilon\mathscr{H}_d$ y cuyo valor es

$$F(r,s) = \prod_{k=r}^{n-1} \frac{k+1-n+s}{k+1+a-n+s} \prod_{l=s}^{n-1} \frac{l+1}{l+a+1} =$$

$$= \frac{n!}{(s+r-n)!} \frac{\Gamma(r+s+a+1-n)}{\Gamma(n+a+1)} \quad \text{si } 0 \leqslant r \leqslant n-1, \ 0 \leqslant s \leqslant n-1 \tag{V.9.3}$$

Si $0 \leqslant r \leqslant n - 1$ y $s = n$, obtenemos

$$F(r,n) = \prod_{k=r}^{n-1} \frac{k+1}{k+a+1} = \frac{n!}{r!} \frac{\Gamma(r+a+1)}{\Gamma(n+a+1)} \tag{V.9.4}$$

Si $0 \leqslant s \leqslant n-1$ y $r = n$, obtenemos

$$F(n,s) = \prod_{l=s}^{n-1} \frac{l+1}{l+a+1} = \frac{n!}{s!} \frac{\Gamma(s+a+1)}{\Gamma(n+a+1)} \qquad (V.9.5)$$

La función F definida por (9.3), (9.4) y (9.5) verifica las propiedades de una función de distribución como resulta muy fácil de comprobar.

La función de probabilidad p_{rs} en el punto $(r,s)\varepsilon\mathcal{D}_0$ viene dada por:

$$p_{rs} = F(r,s) - 2F(r-1,s) + F(r-1,s-1)$$

que se transforma en

$$p_{rs} = \frac{n!\ \Gamma(r+s+a-1-n)}{(s+r-n)!\ \Gamma(n+a+1)} a(a-1)$$

V.10. *Relación entre el caso discreto y continuo*

En el caso de distribuciones unidimensionales demostramos en la Parte IV que existe una relación de convergencia entre las distribuciones discretas $F_d \in \mathfrak{F}_d$ y las distribuciones continuas $F_c \in \mathfrak{F}_c$ bajo algunas condiciones. Vamos a volver sobre aquellas ideas en este párrafo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo V.10.1. Sea $\mathcal{D} = \{(x,y)\varepsilon R^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \geqslant b\}$ y $\mathcal{D}_0 = \{(x,y)\varepsilon\mathcal{D} : 0 \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ x+y \geqslant b\}$. La función de medias discreta del Ejemplo 9.1 sugiere utilizar la siguiente función de medias continuas $m = (m_1,m_2)\varepsilon K_c$

$$m_1(x,y) = \frac{b+ax-y}{a+1}$$
$$\qquad (a > 1) \qquad (V.10.1)$$
$$m_2(x,y) = \frac{b+ay-x}{a+1}$$

si $(x,y)\varepsilon\mathcal{D}_0$ y

$$m_1(x,y) = m_1(b,y) \quad \text{si} \quad x > b$$
$$m_1(x,y) = m_1(x,b) \quad \text{si} \quad y > b$$
$$(V.10.2)$$
$$m_2(x,y) = m_2(b,y) \quad \text{si} \quad x > b$$
$$m_2(x,y) = m_2(x,b) \quad \text{si} \quad y > b$$

Las funciones m_1 y m_2 definidas por (10.1) y (10.2) verifican las condiciones de función de medias continua como resulta muy fácil comprobar.

Consideramos una partición π del intervalo [0,b] con

$$x_r = \frac{b}{n} r \, (r = 0, 1, \ldots, n)$$

y otra partición π' de [0,b] con

$$y_s = \frac{b}{n} s \, (s = 0, 1, \ldots, n).$$

La función de medias discreta correspondiente a las particiones π y π' es

$$m_{1n}(x_r, y_s) = \frac{b + a\frac{b}{n}r - \frac{b}{n}s}{a+1} = \frac{\frac{b}{n}(n + ar - s)}{a+1} \qquad \text{(V.10.3)}$$

$$m_{2n}(x_r, y_s) = \frac{b + a\frac{b}{n}s - \frac{b}{n}r}{a+1} = \frac{\frac{b}{n}(n + as - r)}{a+1} \qquad \text{(V.10.4)}$$

que verifican las propiedades de una función de medias como es fácil comprobar.

La función de distribución discreta $F_d \varepsilon \mathscr{H}_d$ correspondiente a la función de medias $m_{1n}(x_r, y_s)$, $m_{2n}(x_r, y_s)$ por (8.13) será

$$F_n(x_r, y_s) = \prod_{k=r}^{n-1} \frac{(k+1-n+s)}{(k+1+a-n+s)} \prod_{l=s}^{n-1} \frac{l+1}{l+a+1} =$$

$$= \frac{n!}{(s+r-n)!} \frac{\Gamma(r+s-n+a+1)}{\Gamma(n+a+1)} \quad 0 \leqslant r \leqslant n-1, \; 0 \leqslant s \leqslant n-1 \qquad \text{(V.10.5)}$$

$$F_n(x_r, y_n) = \frac{n!}{r!} \frac{\Gamma(r+a+1)}{\Gamma(n+a+1)} \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant r \leqslant n-1, \quad s = n \qquad \text{(V.10.6)}$$

$$F_n(x_n, y_s) = \frac{n!}{s!} \frac{\Gamma(s+a+1)}{\Gamma(n+a+1)} \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant n-1, \quad r = n \qquad \text{(V.10.7)}$$

que coincide con la función de distribución definida en (9.3), (9.4), (9.5) correspondiente a la familia de medias $m_1(r,s)$; $m_2(r,s)$.

Si hacemos tender n a infinito con $\frac{r}{n} \to \frac{x}{b}$; $\frac{s}{n} \to \frac{y}{b}$ en (10.3) y (10.4) obtenemos

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{r}{n}\to\frac{x}{b} \\ \frac{s}{n}\to\frac{y}{b}}} m_{1n} = \frac{b + ay - x}{a+1} = m_1(x,y) \qquad \text{(V.10.8)}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{r}{n}\to\frac{x}{b} \\ \frac{s}{n}\to\frac{y}{b}}} m_{2n} = \frac{b + ax - y}{a+1} = m_2(x,y) \qquad \text{(V.10.9)}$$

que es una familia de medias continuas $(m_1,m_2)\varepsilon K_c$ definidas en $\mathcal{D}$.

En las mismas condiciones de los límites anteriores, la función de distribución discreta $F_n(x_r,y_s)$ tendería a

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{r}{n}\to\frac{x}{b} \\ \frac{s}{n}\to\frac{y}{b}}} F_n(x_r,y_s) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{r}{n}\to\frac{x}{b} \\ \frac{s}{n}\to\frac{y}{b}}} \frac{n!\Gamma(r+s+a+1-n)}{(s+r-n)!\Gamma(n+a+1)} =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \frac{r}{n}\to\frac{x}{b} \\ \frac{s}{n}\to\frac{y}{b}}} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}(r+s+a+1-n)^{r+s+a+\frac{1}{2}-n}}{(s+r-n)^{s+r-n+\frac{1}{2}}(n+a+1)^{n+a+\frac{1}{2}}} = \frac{(x+y-b)^a}{b^a} = F(x,y) \; \text{(V.10.10)}$$

con $F\varepsilon\mathcal{H}_c$.

La función F obtenida es continua en $\mathcal{D}$ y es inmediato comprobar que verifica las propiedades de una función de distribución.

Veamos por último que la función de distribución $F \in \mathcal{H}_c$ obtenida en (10.10) es la imagen mediante ψ^{-1} de la función de medias continuas $m = (m_1, m_2) \in \mathcal{K}_c$ obtenidas en (10.8), (10.9), o sea, $F = \psi^{-1}(m_1, m_2)$.

En efecto, basta ver el Ejemplo V.7.1.

V.11. *Distribuciones n dimensionales truncadas*

Todo lo dicho en los párrafos anteriores de esta Parte, puede generalizarse para distribuciones n-dimensionales. Exponemos a continuación las definiciones necesarias para esta generalización.

Sea una variable aleatoria $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ con función de distribución conocida

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1,\ X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_n \leqslant x_n) \qquad \text{(V.11.1)}$$

y sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punto fijo de R^n tal que $F(x) > 0$.

La variable aleatoria X truncada por la derecha en el punto $x \in R^n$ es la variable aleatoria X sometida a la condición expresada por las relaciones simultáneas

$$X_1 \leqslant x_1,\ X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_n \leqslant x_n \qquad \text{(V.11.2)}$$

Su función de distribución será:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n / x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{F(\min(u_1,x_1), \min(u_2,x_2), \ldots, \min(u_n,x_n))}{F(x)} \qquad \text{(V.11.3)}$$

Se observa que para cada $x \varepsilon R^n$ tal que $F(x) > 0$, existe una distribución truncada, o sea, que dada F existe una familia de distribuciones truncadas correspondientes una a cada punto del conjunto

$$\mathcal{D} = \{x \varepsilon R^n : F(x) > 0\} \qquad \text{(V.11.4)}$$

Para cada (n—1)—upla fija $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ se puede definir un conjunto

$$\mathcal{D}ix_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n = \{u_i : (x_1, \ldots, x_{i-1}, u_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathcal{D};$$

$$i = 1, 2, \ldots, n\}$$

y que llamaremos *sección* por x_i del conjunto $\mathcal{D}$.

Igualmente existirán n *proyecciones* de $\mathcal{D}$, donde la i-esima vendría dada por:

$$pr_i\, \mathcal{D} = \{x_i : (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \varepsilon \mathcal{D} \quad \text{para algún}$$

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \varepsilon R^{n-1},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Las funciones de medias serían:

$$m_1(x) = \frac{\displaystyle\int_{(-\infty, x_1]} u_1 d_1 F(u_1, x_2, \ldots, x_n)}{F(x)}$$

$$m_2(x) = \frac{\displaystyle\int_{(-\infty, x_2]} u_2 d_2 F(x_1, u_2, \ldots, x_n)}{F(x)} \qquad \text{(V.11.5)}$$

$$\vdots$$

$$m_n(x) = \frac{\displaystyle\int_{(-\infty, x_n]} u_n d_n F(x_1, x_2, \ldots, u_n)}{F(x)}$$

siempre que las integrales de Lebesgue-Stieltjes que intervienen en (11.5) existan.

Llamaremos $\mathcal{H}_n$ al conjunto de las funciones de distribución n-dimensionales para las que existen (con valor finito) las integrales (11.5) para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Llamaremos K_n al conjunto de las funciones de medias

$$m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$$

obtenidas de (11.5) para cada $F \in \mathcal{H}_n$.

Las relaciones (11.5) determinan un elemento de K_n para cada elemento de $\mathscr{H}_n$, o sea, definen una aplicación de $\mathscr{H}_n$ en K_n que denotaremos por

$$\psi_n : \mathscr{H}_n \to K_n \tag{V.11.6}$$

donde $\quad m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) = \psi_n(F)$

La aplicación ψ_n puede estudiarse de manera análoga a la función Ψ definida en (2.7).

Proposición V.11.1. Sea $F \varepsilon \mathscr{H}_n$ y $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) = \psi_n(F) \varepsilon K_n$, la función de medias de F. Entonces existen n funciones de distribución unidimensionales

$$F_{1x_2x_3 \ldots x_n} \varepsilon \mathfrak{F} \quad , \quad F_{2x_1x_3 \ldots x_n} \varepsilon \mathfrak{F} \quad , \quad F_{nx_1 \ldots x_{n-1}} \varepsilon \mathfrak{F}$$

con la propiedad

$$\begin{aligned} m_{1x_2 \ldots x_n}(x_1) &= \omega(F_{1x_2 \ldots x_n}) \\ m_{2x_1 \ldots x_n}(x_2) &= \omega(F_{2x_1 \ldots x_n}) \\ &\vdots \\ m_{nx_1 \ldots x_{n-1}}(x_n) &= \omega(F_{nx_1x_2 \ldots x_{n-1}}) \end{aligned}$$

Demostración. Sea

$$m_1(x_1 \ldots x_n) = \frac{\displaystyle\int_{(-\infty, x_1]} u_1 dF(u_1 x_2 \ldots x_n)}{F(x)} \tag{V.11.7}$$

Dividiendo la igualdad (11.7) por

$$F(+\infty, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

y llamando

$$F_{1x_2 \ldots x_n}(x_1) = \frac{F(x_1, x_2, \ldots x_n)}{F(+\infty, x_2, \ldots x_n)} \tag{V.11.8}$$

que se comprueba fácilmente que es una función de distribución unidimensional, y además

$$m_{1x_2x_3\ldots x_n}(x_1) = m_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

la igualdad (11.7) se convierte en:

$$m_{1x_2\ldots x_n}(x_1) = \frac{\int_{(-\infty,x_1]} u_1 dF_{1x_2\ldots x_n}(u_1)}{F_{1x_2\ldots x_n}(x_1)} \qquad \text{(V.11.9)}$$

lo cual prueba que $m_{1x_2\ldots x_n}$ es una función de medias de una distribución unidimensional

$$m_{1x_2\ldots x_n} = \omega(F_{1x_2\ldots x_n}) \qquad \text{(V.11.10)}$$

El mismo razonamiento vale para $m_2, \ldots, m_n$, por tanto

$$m = \psi_n(F) = (\omega(F_{1x_2\ldots x_n}) \;,\; \omega(F_{2x_1x_3x\ldots x_n}) \ldots \omega(F_{nx_1\ldots x_{n-1}}))$$

con $m = (m_1, m_2 \ldots m_n)$.

En la siguiente Proposición determinamos la inversa de la aplicación ψ_n.

Proposición V.11.2. Dada $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in K_n$ si podemos calcular $\omega^{-1}(m_1)$, $\omega^{-1}(m_2)$, ..., $\omega^{-1}(m_n)$ se verifica que $F = \psi_n^{-1}(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ viene dada por:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega^{-1}(m_1) \lim_{x_1 \to +\infty} \omega^{-1}(m_2) \lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} \omega^{-1}(m_2) \ldots \lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \to \infty}} \omega^{-1}(m_n)$$

Demostración. Si las funciones $m_{1x_2\ldots x_n}$, $m_{2x_1x_3\ldots x_n}$, ... $m_{nx_1\ldots x_{n-1}}$ pertenecen a un conjunto donde podamos calcular

$$\omega^{-1}(m_{1x_2\ldots x_n}) \;,\; \omega^{-1}(m_{2x_1x_3\ldots x_n}) \;,\; \ldots \;,\; \omega^{-1}(m_{nx_1\ldots x_{n-1}})$$

tendremos por (11.10) y sus análogas

$$F_{1x_2 \ldots x_n} = \omega^{-1}(m_{1x_2 \ldots x_n})$$
$$\vdots$$
$$F_{nx_1 \ldots x_{n-1}} = \omega^{-1}(m_{nx_1 \ldots x_{n-1}})$$

o bien

$$\frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{F(+\infty, x_2, \ldots, x_n)} = \omega^{-1}(m_{1x_2 \ldots x_n}) \qquad \text{(V.11.11)}$$

$$\frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{F(x_1, +\infty, x_3, \ldots, x_n)} = \omega^{-1}(m_{2x_1x_3 \ldots x_n}) \qquad \text{(V.11.12)}$$
$$\vdots$$
$$\frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{F(x_1, x_2, +\infty, x_4, \ldots x_n)} = \omega^{-1}(m_{3x_1x_2x_4 \ldots x_n}) \qquad \text{(V.11.13)}$$
$$\vdots$$
$$\frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{F(x_1, \ldots, x_{n-1}, +\infty)} = \omega^{-1}(m_{nx_1 \ldots x_{n-1}}) \qquad \text{(V.11.14)}$$

Si en (11.12) se hace tender x_1 a más infinito, en (11.13) se hace tender x_1 y x_2 a más infinito y así hasta la (11.14), donde se hace tender $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ a más infinito y multiplicamos por (11.11) resulta

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega^{-1}(m_{1x_2 \ldots x_n})(x_1) \lim_{x_1 \to +\infty} \omega^{-1}(m_{2x_1x_3 \ldots x_n})(x_2)$$
$$\ldots\ldots \lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty \\ \vdots \\ x_{n-1} \to +\infty}} \omega^{-1}(m_{nx_1 \ldots x_{n-1}})(x_n)$$

y la Proposición queda demostrada.

Resultan inmediatas las generalizaciones de las fórmulas (6.8), (8.13) y (8.15).

AGRADECIMIENTO

Deseo expresar mi agradecimiento al profesor don Procopio Zoroa por su dirección inestimable y constante dedicación.

BIBLIOGRAFIA

1. ARLEY, NIELS, *Stochastic processes and cosmic radiation*, John Wiley, New York, 1943.
2. BERZOLARI, L., *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi*, volume terzo, parte terza, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1953.
3. BRUNK, H. D., «Conditional expectations given a σ - Lattice and Applications», *Ann. Math. Statist.*, 36, 1965.
4. BRUNK, H. D., and JOHANSEN, S. A., «Generalized Radon-Nikodyn derivative», *Pacific J. Math.*, 34, 1970.
5. CRAMER, HARALD, *Métodos matemáticos de estadística*, Ed. Aguilar, Madrid, 1963.
6. CSASZAR, A., «Sur la estructure des espaces de probabilité conditionelle», *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 6, 1955.
7. DESCOMBES, R., *Integration*, Hermann, París, 1973.
8. DUBINS, LESTER, «Finitely additive conditional probabilities, Conglomerability and Desintegrations», *The Annals of Probability*, vol. 3, núm. 1, 1975.
9. FORSYTH, A. R., *Theory of differential equations*, vols. I, II, III, IV, Dover Publications, Inc., 1959.
10. GAUSSLLER, P., and PFANZAGL, J., «Convergence of conditional expectation», *Ann. Math. Statist.*, 42, 1, 1971.
11. JOHN, F., *Partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1975.
12. KINGMAN, J. F. C., and TAYLOR, S. J., *Introductions to measure and probability*, Cambridge University Press, 1973.
13. KOLMOGOROV, A. N., *Foundations of probability*, Chelsea Publishing Company, New York, 1956.
14. KROLIKOWSKA, K., «On the characterization of some families of distributions», *Comment Math. Prace Math.*, 17, 1973.
15. LOEVE, MICHEL, *Teoría de la probabilidad*, Ed. Tecnos, Madrid, 1976.
16. METIVIER, M., *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod, París, 1968.
17. NELSON, E., «Regular probability measures on function spaces», *Annals of Mathematics*, vol. 69, 1959.
18. NEVEU, J., *Bases mathematiques du calcul des probabilités*, Masson et Cie., París, 1964.
19. PEANO, GIUSEPPE, *Math. Ann.*, 32, 450, 1888.
20. PONTRIAGUIN, L. S., *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Ed. Aguilar, Madrid, 1973.
21. RENRY, A., *Cálculo de probabilidades*, Ed. Reverté, S. A., Barcelona, 1976.
22. RÍOS, SIXTO, *Métodos estadísticos*, Ediciones Del Castillo, Madrid, 1977.
23. RUIZ GÓMEZ, JOSÉ MARÍA, *Los momentos en las distribuciones truncadas*, Tesina, Universidad de Granada, 1973.
24. SCHLESINGER, *Vorlesungen über lineare differentialgleichunger*, Leipzig-Berlín, 1908.
25. SCHWARTZ, L., *Cours d'analyse*, Hermann, París, 1967.
26. SHAN, B., «A note on characterisations of probability distributions based on conditional expeted values», *Sankhiser A.*, 37, núm. 2, 1975.
27. SMIRNOV, V. I., *A course of higher mathematics*, vol. IV, Pergamon Press, Oxford, 1964.
28. TOMKINS, R. J., «On conditional medians», *The Annals of Probability*, vol. 3, número 2, 1975.
29. TUE TJUR, *On the mathematical foundations of probability*, Institute of Mathematical Statistics, University of Copenhagen, Lectures Notes, núm. 1, 1972.
30. TUE TJUR, *Conditional probability distributions*, Institute of Mathematical Statistics, University of Copenhagen, Lectures Notes, núm. 2, 1974.
31. VAUQUOIS, B. *Probabilites*, Hermann, París, 1969.
32. VOLTERRA, VITO, *Mem. Soc. Ital. Sci.* (3), núm. 8, 1887.
33. WEINBERGER, H. F., *Curso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*, Ed. Reverté, S. A., Barcelona, 1970.
34. ZOROA, PROCOPIO, *La mediana en las distribuciones truncadas. Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, vol. XXIV, 1973.