La enseñanza de la Matemática

La Matemática, como cualquier otra disciplina, precisa de una Pedagogía especial en cada una de sus etapas y facetas. Incluso se oye con frecuencia decir que en Matemáticas no parecen eficaces los métodos de enseñanza que se utilizan, que deberían de renovarse porque los alumnos no aprenden bien esta asignatura, y otras manifestaciones por el estilo, lo cual prueba que es interesante que prestemos atención a la enseñanza de la Matemática.

Quiero advertir a mi escogido auditorio aquí presente que ni pretendo poder señalar la raiz del fracaso de la enseñanza de las Matemáticas (si es un hecho cierto tal fracaso) ni tampoco conocer la solución acertada para este problema. Solamente deseo señalar mi opinión acerca de algunos aspectos de la enseñanza de la Matemática, que unas veces coincide y otras difiere de otros modos de pensar de autorizadísimos y respetables expertos en la materia.

Creo que, a grandes rasgos, tres son los factores que han de dar como resultado un buen aprendizaje de las Matemáticas; estos factores son:

1.°, alumno disciplinado y preparado;
2.°, profesor culto y experto en su ciencia; y
3.°, método didáctico apropiado.

Sin grandes dificultades dialécticas se puede probar que si cae en defecto uno de estos tres factores la enseñanza será difícil o imposible.

Como es natural, para atender a la enseñanza de la Matemática hay que tomar en consideración el contenido y naturaleza de ésta y la finalidad que se persiga.

Comenzaremos aludiendo a la naturaleza de las Matemáticas.

Si bien el método experimental es básico en el conocimiento científico, podemos afirmar que la Matemática, como ciencia pura. no es una ciencia experimental. Ejemplos hábilmente preparados se pueden dar para convencernos de esto. Recordemos aquel en que se recorta sobre papel cuadriculado un cuadrado de ocho unidades de lado (y por tanto 64 cuadraditos de área). Después se dan a este cuadrado tres cortes rectilíneos que van de los puntos (0, 3) al (8, 0), del (0, 3) al (8, 3) y del (3, 3) al (5, 8) (tomando unos ejes de referencia en los lados del cuadrado), y los cuatro trozos resultantes se recomponen en un rectángulo de lados 5 y 13 y de área 65, o sea que hemos ganado (aparentemente) una unidad de área. Se explica esta y otras paradojas análogas por la limitación del poder perceptivo de nuestros sentidos, o por la irregularidad propia de la materia, etc.

La intuición, esa facultad que penetra en las cuestiones sin llevar a cabo un análisis detallado del asunto, es útil pero está igualmente expuesta a errores. Muy conocido es el siguiente ejemplo.

Considerense dos circunferencias, una de radio un centímetro y otra con radio el de la Tierra. Si se agrega un metro a la longitud de cada una de estas circunferencias ¿cuál habrá aumentado más su radio? La persona no aleccionada, para dar una respuesta inmediata, pensará que el metro agregado a la circunferencia mayor debe repartirse en una extensión mayor por lo que el aumento del radio será casi insensible, o sea que la menor aumentará más el radio. Sin embargo un cálculo elemental muestra que el aumento es el mismo en ambos casos.

El método inductivo utilizado en las Ciencias de la Naturaleza tampoco es un método de las Matemáticas. El método de inducción incompleta con el cual se obtienen las leyes de la Naturaleza es sustituído por el método de inducción completa peculiar de la Matemática, pues se pueden poner ejemplos sencillos que muestran que el primer método conduciría a errores.

Si el método intuitivo, el inductivo, y aun el método experimental dan lugar a resultados falsos o paradójicos, debemos elegir un camino más seguro, el método lógico-deductivo. Este método no está exento de dificultades técnicas pero una vez vencidas, por él se marcha sin ningún peligro.

Se comienza por sentar ciertas relaciones o propiedades de unos entes abstractos bautizados con ciertos nombres. Los enunciados de estas relaciones son los axiomas de la teoría matemática establecida. Cumpliendo estos axiomas la condición de compatibilidad necesaria se deducirá a partir de ellos, y sin nuevas suposiciones, una cadena de teoremas que constituye el edificio matemático correspondiente.

Este cuerpo de doctrina servirá para ejercicio y recreo de las facultades deductivas del hombre, por una parte, y en la medida que refleje algún aspecto del mundo físico, para las aplicaciones.

Pero, si bien una disciplina matemática debe poseer este carácter deductivo, estamos lejos de defender que en la enseñanza deban presentarse los conocimientos a los alumnos en esa forma.

Al igual que esta configuración es la última fase del desarrollo de la Matemática también debe ir dirigida para aquellas personas cuyos conocimientos matemáticos sean avanzados mientras que para otras fases del desarrollo de la enseñanza no es esta la presentación más adecuada.

La enseñanza debe adaptarse al sujeto a que va dirigida y tener en cuenta las exigencias psicológicas de éste. Por ello, a pesar de los defectos apuntados de la experiencia, la inducción, y el método intuitivo, éstos deben ser utilizados para la aprehensión de los conocimientos evolucionando hacia el método deductivo como único que ofrece garantía en las conclusiones.

El contenido y carácter de los cursos de Matemáticas variará según la finalidad que se persiga, debiendo desarrollarse la enseñanza de modo distinto en una Escuela de Comercio, en un Instituto de Enseñanza Media, en una Escuela de Pedagogía, en una Escuela Técnica, en las distintas secciones de una Facultad de Ciencias, etc.

Así, por ejemplo, el Instituto de Enseñanza Media, está encargado de dar una enseñanza de la Matemática un tanto enciclopédica y dirigida a jóvenes que, en general, seguirán estudios superiores en la Universidad o Escuelas Técnicas.

Hablando en términos generales podemos decir que en el aprendizaje de la Matemática el individuo debe recorrer la línea de conocimientos que ha seguido la humanidad en el transcurso del tiempo desarrollando y utilizando esta Ciencia.

Por ello me voy a permitir dar unas indicaciones históricas que de un modo pararelo nos marquen el desenvolvimiento de la enseñanza de la Matemática. Además creo que es de interés que el profesor de Matemáticas procure intercalar en sus explicaciones breves noticias históricas de la materia que explica, lo cual servirá muchas veces para atraer la atención y el interés del alumno.

El periodo preescolar podríamos decir que corresponde en la historia de la humanidad a la prehistoria.

La operación matemática de contar es bien simple pero es fundamental y debió tener su origen en los remotos tiempos en que el hombre inició su lenguaje. El niño al tiempo que aprende a hablar utiliza los números para contar y, las palabras, recto, curvo, plano, redondo, etc., formando así el substrato que utilizará al llegar a la escuela para dar forma más doctrinal a sus conocimientos.

Los documentos escritos que se creen más antiguos se atribuyen al cuarto milenio antes de J. C. y pertenecen a los sumerios, pueblo que habitó la Mesopotamia. Este pueblo ya empleó un sistema de numeración sexagesimal que utiliza el principio de agrupar sesenta unidades de un orden para formar una unidad de orden superior. También las fracciones se utilizaron en este sistema sexagesimal y perduran hoy en las unidades de ángulos y del tiempo.

Los egipcios y asirio-babilonios cultivaron los principios de la geometría que utilizaban para medir los campos. En el papiro golenischev se ve que los egipcios adoptaban la fracción 256/81 = 3'1604... como valor de π (error relativo 0,005).

Los conocimientos de estos pueblos protohistóricos, sumerios, asirio-babilónicos y egipcios vienen a corresponder a los que el niño debe de adquirir en la escuela primaria en que debe de aprender las operaciones elementales con números naturales y fraccionarios.

Por desgracia a la enseñanza en este período se le da, las más de las veces, una forma dogmática, haciéndole aprender al niño de memoria frases que no entiende, sin ningún provecho. Citemos como ejemplo ilustrativo la siguiente definición que se encuentra en algunos libros: «Línea recta es la que tiene todos sus puntos en la misma dirección».

No hay que hacer la guerra completa al memorismo, pues en algunas ocasiones es imprescindible, como por ejemplo para utilizar la tabla de multiplicar, pero requiere un uso meditado.

Debe de predominar en este período el método experimental, pese a sus defectos, en la enseñanza del escolar. Al niño deben de entrarle por los sentidos las ideas y conceptos. Así, es suficiente decir que un hilo tirante muestra una línea recta, que varios objetos en línea recta al verlos desde uno de ellos quedan ocultos por éste, o que una línea recta es la dibujada por una regla bien construída la cual se comprueba dibujando una recta con ella y dándole la vuelta, etc. Siempre será preferible esta noción de recta que la pseudo-definición citada que debiera desterrarse completamente.

Otra etapa histórica en el desenvolvimiento de la Matemática la marca el pueblo griego, el cual cultivó preferentemente la geometría no pudiendo olvidarnos los nombres de Euclides, Arquímedes y Apolonio. En los «Elementos» de Euclides se intenta exponer la Geometría en forma abstracta y racional, características que quedan definitivamente incorporadas a la Matemática.

Los primeros cursos de bachillerato los podríamos hacer corresponder con esta etapa histórica del desenvolvimiento de la Matemática y debería seguir dominando el método experimental en la enseñanza; en la edad del alumno del primer curso de bachillerato están pocos desarrolladas las facultades deductivas por lo que la enseñanza debe tener un carácter empírico, ingenuo, omitiendo toda alusión al rigor. Se debe prescindir de nociones abstractas. Los conceptos deben introducirse con relación al mundo real mediante ejemplos adecuados. Gradualmente irá evolucionando el método a lo largo del Bachillerato. En el segundo curso ya se desarrollarán algunas deducciones de teoremas sencillos como los de semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, etc., pero predominando en conjunto un método intuitivo.

En los cursos tercero y cuarto se marcará con más fuerza el método deductivo y la forma abstracta de las nociones. El concepto de variable (abstracción de abstracciones) y el cálculo algebraico (simbolismo) representan un grado avanzado de abstracción.

Estos cursos, tercero y cuarto, vienen a introducir materia de una etapa histórica nueva: la Edad Media. El pueblo hindú cultivó la Aritmética y Trigonometría introduciendo las funciones circulares y los números negativos; también los árabes fueron estudiosos matemáticos que impulsaron el Algebra, la Trigonometría y la Astronomía.

Pero la Trigonometría se desarrolla y cobra una agilidad extraordinaria con el empleo de los logaritmos que aparecen en el Renacimiento introducidos y estudiados por Stifel, Neper, Burgi, Briggs. El interés por el arte en esta época influye sobre la ciencia, como ocurre con el estudio de la Perspectiva. La solución de las ecuaciones de 3.º y 4.º grado va unida a los nombres de Dal Ferro, Tartaglia, Cardano y Ferrari.

Esta etapa evolutiva viene a corresponder al quinto curso de Bachillerato en el que deben darse los logaritmos y la Trigonometría. En este curso deben hacerse referencias a aplicaciones de las matemáticas a problemas reales y a otras ciencias, deben cuidarse algunas demostraciones para comenzar a educar en el alumno el sentido de rigor, aunque deben omitirse demostraciones largas y prolijas.

El siglo XVII es una etapa en que germinan fructíferas semillas en el terreno de la Matemática. Los comienzos de la Geometría Analítica se deben a Descartes. Fermat da vida a la Teoría de Números. Pascal y Fermat inician el Cálculo de Probabilidades. Desargues preocupado por cuestiones prácticas de la construcción de relojes de sol asienta los primeros pilares de la Geometría Proyectiva. Y tras algunos matemáticos que estudian problemas aislados de Cálculo Infinitesimal por procedimientos particulares como Kepler, Cavalieri, Huygens, Wallis, Barrow, etc., vienen las grandes figuras de Newton y Leibniz, que fijan las raices del

Cálculo Diferencial e Integral. A Leibniz se debe también la iniciación de la importante teoría de los Determinantes.

En nuestro simplificado paralelismo entre la enseñanza y la historia de la Matemática a este siglo XVIII podemos asignar el sexto curso de Bachillerato en el que se debe introducir fundamentalmente el Cálculo Diferencial y la Geometría Analítica, materias que dan lugar a verdaderas canteras de problemas en las cuales se ejercitará el alumno.

El alumno ya no puede en este curso dar nada por sabido sin una previa demostración. Aunque se procure dar interpretaciones intuitivas de nuevos conceptos, las definiciones abstractas y el método deductivo deberán ser inseparables a lo largo del curso.

No creo necesario insistir en la necesidad de no saltar ninguna de estas etapas de la enseñanza de la Matemática. No se debe de estudiar en un curso ninguna lección de Matemáticas sin conocer las precedentes. No se debe comenzar un curso careciendo de la base que proporcionan los anteriores, y este es el origen de muchos de los fracasos del estudiante.

El alumno que termina el sexto curso de Bachillerato con provecho comienza a vislumbrar un extenso panorama en el terreno de la Matemática y si aquel ha sabido captar los matices de esta estructura, encontrar los núcleos fundamentales de ese aparente laberinto, percibirá una belleza vedada para los profanos los cuales con frecuencia la califican de abstrusa y antiestética.

A este respecto nos dice A. CAYLEY (1): «Es difícil dar una idea de la vasta extensión de la Matemática moderna. Esta palabra «extensión» no expresa con suficiente claridad la idea; yo diría que se trata de una extensión rica en bellezas particulares, no una extensión monótona de una llanura vacía sino un bello paisaje en el que se solaza el espíritu, primero al contemplarlo de lejos, después al recorrer y estudiar sus particularidades, montañas y valles, ríos, rocas, árboles y flores».

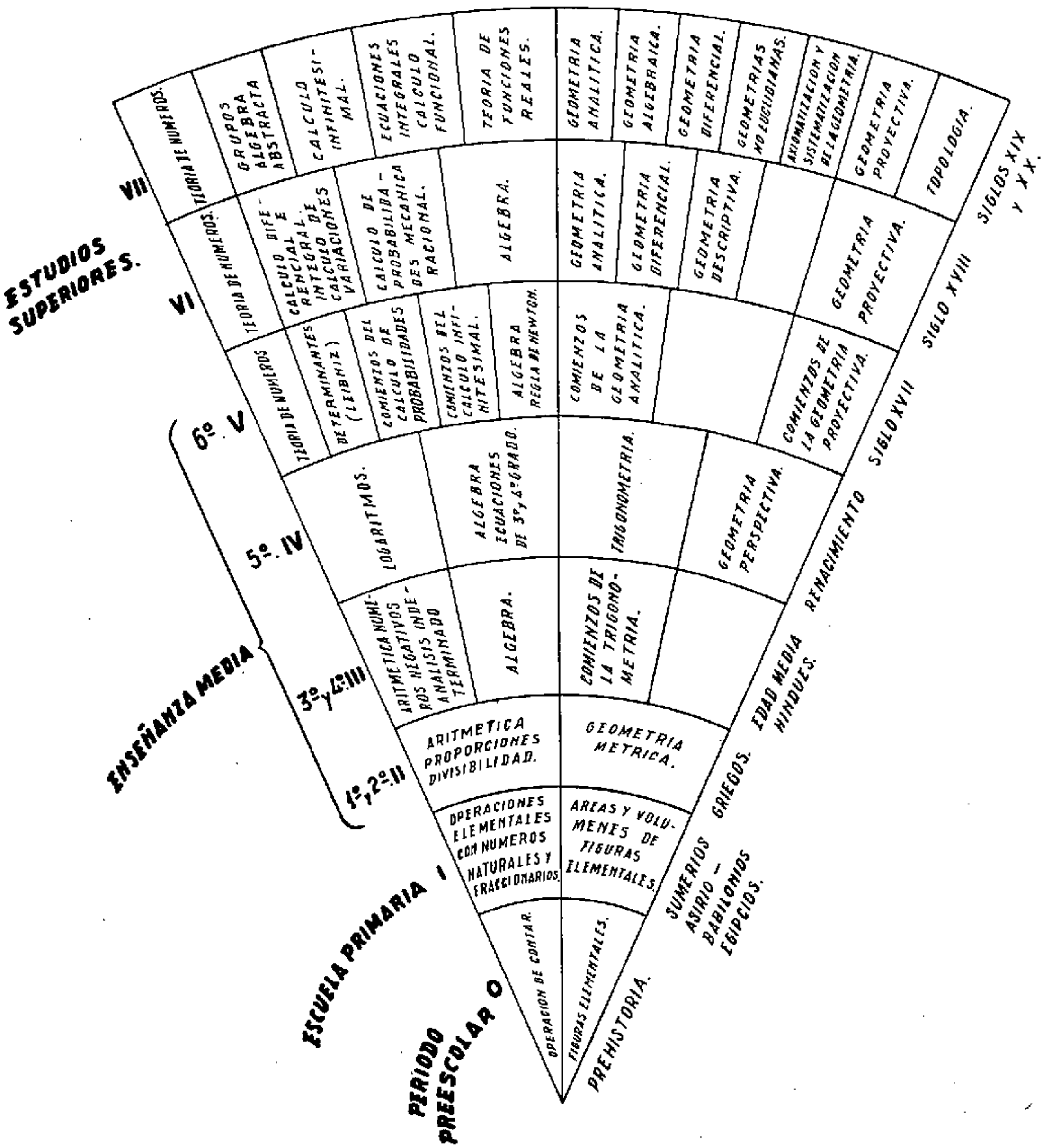
Esta amplitud de las Matemáticas que se le presenta al alumno que comienza estudios superiores está representada por un crecimiento en abanico, multirramificado, de la Matemática que se desarrolla en los siglos XVIII, XIX y XX.

Si el siglo XVII fue de germinación de ideas y teorías, en el XVIII cobra fuerza y se multiplica este vasto bosque de la Matemática.

Bastará citar algunos nombres para recordar importantes conquistas en este terreno. El Cálculo de Variaciones, el Cálculo de Probabilidades y otras cuestiones de Cálculo Infinitesimal son tratadas por Jacobo Bernoulli, y su hermano Juan Bernoulli, De Moivre, Taylor, Stirling, y el insigne Leonhard Euler. Lagrange y Laplace aplican la Matemática a la

(1) A. CAYLEY. *Math. Papers, II*, Cambridge, 1896.

ESQUEMA HISTORICO-PEDAGOGICO DE LA MATEMATICA.



Mecánica y Astronomía. La Geometría Descriptiva, la Geometría Diferencial y la Geometría Proyectiva tienen cultivadores como Monge, Meusnier, Dupin, Brianchon y Poncelet.

Pero este bosque debía ser expurgado de maleza y sufrir una cuidadosa poda. Es en el siglo XIX cuando se medita y revisa lo conseguido aunque siempre agregando nuevo material.

El estudio de las paralelas conduciría a la creación de las Geometrías no euclidianas, cuyo origen va unido a los nombres de Bolyai, Lobachefsky y el insigne Gaus.

En el estudio de las funciones analíticas destacan Cauchy, Abel, que inicia el capítulo de las Ecuaciones Integrales, y Jacobi. El Cálculo Funcional es iniciado sistemáticamente por Volterra, Fredholm y Hilbert.

Rieman desarrolla el estudio métrico-diferencial de las Geometrías no euclidianas, y establece los fundamentos de la Topología. Plücker es un aportador de la Geometría Algebraica. La Geometría Proyectiva cuenta con Chasles, Steiner y el importante Staud que la construye sin necesidad de utilizar conceptos métricos, dándole así autonomía.

En el Algebra Abstracta se realiza el estudio de la teoría de grupos por Galois. El concepto de grupo sería utilizado después por Klein y Sophus Lie. El primero sistematizó toda la Geometría en su famoso programa de Erlangen y el segundo creó la teoría de los grupos continuos de transformaciones para su aplicación a la sistematización de las ecuaciones Diferenciales.

Los estudios sobre Teoría de Conjuntos de Cantor son los precedentes del interés que en el siglo XX aparece acerca de los problemas de la teoría de Funciones Reales, los cuales son tratados por Borel, Lebesgue, Baire, y con relación a espacios abstractos, cada vez más generales, por Frechet, Banach y Hausdorff.

Esta rápida revisión histórica nos da una pálida idea del contenido de la Matemática del cual hay que entresacar lo más esencial para cada uno según sus necesidades. Esto da lugar a la formación de los programas, tema en el cual no nos vamos a detener.

La enseñanza de la Matemática en los estudios superiores debe tener un carácter muy distinto según que el alumno estudie la Matemática simplemente por conocer la Matemática en sí, para ser Licenciado en Ciencias Matemáticas, o bien que la enseñanza vaya dirigida a un futuro técnico o ingeniero, o sea que esta Matemática vaya a ser aplicada. Vamos a referirnos a este último caso que es el más frecuente.

La forma tradicional de llevar a cabo la enseñanza es la forma expositiva en que el profesor expone oralmente la lección previamente preparada, auxiliándose de la pizarra.

Un método diferente de desarrollar las clases es el llamado método eurístico de enseñanza. Este método ha sido defendido por P. Puig Adam y es una modificación del llamado método socrático; en este método se intenta que el alumno llegue por sí mismo a descubrir las proposiciones o resultados que se desea que aprenda orientado por algunas preguntas del profesor.

Los defensores de este método de enseñanza aducen que lo que uno ha descubierto por sí mismo lo aprende con más interés y resulta más fácil de retener en la memoria, lo cual es cierto, pero podemos objetar a la idea de seguir sistemáticamente este método que para desarrollar un programa normal de un curso se precisaría un tiempo muy superior a aquel del que se dispone, no pudiéndose aplicar además más que a grupos muy reducidos de alumnos. En los cursos de Enseñanza Media podría utilizarse en clases aisladas, pero no de un modo sistemático, y en cursos universitarios es aun menos indicado.

Es de fundamental importancia en la enseñanza para técnicos e ingenieros que junto a una formación teórica de la Matemática se capacite al alumno para que sepa aplicar la Matemática a la realidad; para conseguir esto toda teoría debe interpretarse en el mundo físico, citar ejemplos y aplicaciones, poner problemas concretos para que el alumno los lleve del lenguaje ordinario al simbolismo matemático, enseñar a interpretar en la realidad los resultados, desechando los que no tengan sentido físico. Para todo ello se utilizarán problemas clásicos de la Física y de la Técnica y problemas variados lo suficientemente claros para que sirvan de ejemplos de la aplicación de algunos puntos de la teoría. Esto no excluye también los ejercicios de un carácter puramente teórico, indispensables para aclarar conceptos y adquirir habilidad en el cálculo y manejo de fórmulas.

Asimismo no deben omitirse los ejercicios de aplicación numérica.

Pero no deberíamos caer en la rutina; salvo en casos excepcionales no se debe limitar la resolución de un problema al empleo de una receta, una fórmula, unas tablas, o unos ábacos mediante los cuales mecánicamente se obtiene el resultado sin saber por qué, sin conocer el fundamento y el alcance de dichos artificios.

Hay que saber buscar el justo término medio en que no se aspire a querer saber el último por qué de las cosas y tampoco darlo todo por bueno de un modo dogmático.

Es bien sabido que en las tres etapas de resolución de un problema, a saber,

1.° planteamiento
2.° resolución (matemática)
3.° interpretación,

realmente sólo en la 2.ª interviene de una manera activa la Matemática. En la 1.ª y 3. hay una mezcla de operaciones mentales diversas en que intervienen los conocimientos matemáticos, la práctica adquirida en otros casos más o menos análogos, la inventiva y sutileza de pensamiento y otros procesos; esta complejidad impide dar reglas generales para abordar un problema lo que da el carácter de arte a esta faceta de la Matemática aplicada.

Este carácter hace más difícil la enseñanza y sólo nos queda como medio para afrontarla el dar ejemplos numerosos, analizándolos y separando la fase de planteamiento del problema, la fase de resolución analítica o gráfica y la de interpretación.

El profesor debe pues de conseguir esta formación práctica uniendo de vez en cuando a las explicaciones de los diversos métodos teóricos de la Matemática algún problema adecuado que resolverá con detalle haciendo ver que el planteamiento del problema requiere a veces un arte delicado. Los ejemplos puestos para la enseñanza no deben ser excesivamente complejos, sobre todo al principio, pues como dice A. de Morgan (2) «la potencia de la mente no puede dirigirse a dos cosas a la vez; si la complejidad de los números utilizados requiere toda la atención del estudiante, éste no puede observar lo fundamental del método que está siguiendo».

Una vez que se ha dado una orientación en el modo de atacar algunos problemas se debe de dejar al alumno que resuelva por sus propios medios otros que se le propongan, pues creemos que la labor personal es un factor importante. A veces se tropezará el alumno con dificultades y contradicciones: el esfuerzo hecho para vencerlas es un medio excelente de agudizar el ingenio.

Además como es bien sabido al intentar resolver un problema, el éxito para hallar su solución depende generalmente en gran medida de la elección del método más apropiado para atacarle. Esto exige a veces hacer una serie de ensayos sucesivos de distintos métodos, lo cual es así mismo una gimnasia útil.

De estos esfuerzos se verá el alumno compensado si consigue la solución deseada. Según D. Hilbert (3) «un problema matemático debería ser difícil para excitarnos, pero no completamente inaccesible para no

(2) De Morgan, A. *Study and difficulties of Mathematics*. Chicago.

burlar nuestros esfuerzos, guiarnos entre el laberinto de verdades ocultas, ofreciéndonos al final el placer de conseguir la solución adecuada».

También debe conseguirse una formación teórica adecuada en el alumno.

Todos hemos oído comentarios del antagonismo de la teoría y la práctica.

El objeto de la teoría es doble:

a) formular hipótesis sencillas que sirvan de fundamento al fenómeno o grupo de fenómenos en estudio y que constituyan un esquema abstracto del desarrollo total o parcial de estos fenómenos.

b) deducción lógica de las conclusiones de interés contenidas implícitamente en las hipótesis, alcance e interpretación de estas conclusiones.

En un sentido más estricto se suele utilizar la palabra teoría para expresar el cuerpo de doctrina obtenido en b) sin atender a su interpretación en la realidad.

Por práctica suele entenderse el conocimiento empírico, el adquirido por la experiencia y la observación, y a veces la habilidad y destreza corporal o física (por ejemplo la práctica de conducir un automóvil), pero esta práctica corporal no nos incumbe en absoluto. Sin embargo la primera es imprescindible para llevar a cabo la parte a) citada anteriormente de la teoría.

Se comprende así que al investigador científico y técnico le interesa tanto la teoría como la práctica, pues son inseparables.

A veces se oye decir que una cosa es la teoría y otra la práctica, porque la teoría puede hacer afirmaciones que la práctica las contradice.

Si una teoría afirma algo contra lo que ocurre en la realidad tal teoría, aunque sea correcta en sí, no es correcta y adecuada para el estudio total o parcial del fenómeno que se está tratando debido a una discordancia apreciable entre el contenido de las hipótesis y lo esencial de dicho fenómeno. Puede ser necesario, en tal caso, complementar la teoría con nuevas hipótesis o reformarla totalmente.

Francis Bacón dice (4) que entre los científicos hay dos clases, o son hombres de experimentación, o son hombres de dogma. Los hombres de experimentación los compara a hormigas, que reúnen y utilizan, los hombres de dogma son como las arañas que hacen la red de su propia substancia. La abeja se sitúa en el punto medio, colecciona su material de las flores del campo y transforma y digiere este material por su propio poder. La tarea del verdadero filósofo —continúa Bacón— no es muy diferente de esta. El filósofo confía no solamente en el poder de su mente,

---

(3) Hilbert, D. *Mathematical Problems*, Bull. Am. Math. Soc., vol. 8, p. 438.
(4) Bacon, Francis. *Novum Organum sive indicia vera de interpretations naturae.* 1620.

sino también en la materia reunida mediante la historia natural en los experimentos mecánicos, que guarda, no en la memoria, tal como las halló, sino en el entendimiento, alterada y digerida.

Por consiguiente se debe esperar mucho de la asociación más pura e íntima de estas dos facultades, la experimental y la racional.

No hay que olvidar tampoco que la concordancia de la teoría con la realidad no pretende ser perfecta sino sólo poseer la suficiente aproximación para su validez en las aplicaciones. Al hablar del objeto de una teoría matemática H. CRAMER en su libro fundamental (5) nos dice que «la íntima concordancia que es razonable esperar entre la teoría y la realidad no es siempre la misma. Mientras que en algunos casos ni los instrumentos más sensibles han conseguido descubrir la más ligera discordancia, hay otros casos donde la ley científica solamente nos informa de los principales rasgos de los hechos observados, interpretándose las desviaciones como errores o perturbaciones».

Una observación de este tipo debe hacerse al efectuar cálculos numéricos, no manejando un número innecesario de cifras. Del número π podemos dar más de 500 cifras decimales, lo cual no representa más que una curiosidad matemática. Si tratamos, en un problema arquitectónico, de calcular la longitud de una circunferencia de radio 15 ms. el error por exceso que se puede cometer tomando $\pi = 3'1416$ en la fórmula usual no llega al medio milímetro, y por tanto sin influencia alguna en la práctica. Añadir más cifras en la expresión aproximada de π sería inútil y molesto.

Como es sabido existe un fluir recíproco: la teoría se inspira y progresa con las aplicaciones y éstas aumentan y se perfeccionan con la teoría. Por ello señala F. KLEIN (6): «los mayores matemáticos como Arquímedes, Newton y Gaus siempre unieron la teoría y las aplicaciones en igual proporción».

Del beneficio que recibe la Matemática pura al tratar problemas y cuestiones del mundo real nos dice elocuentemente J. FOURIER (7): «El estudio profundo de la Naturaleza es la fuente más fructífera de descubrimientos matemáticos. Ofreciendo al investigador una meta definida, este estudio tiene la ventaja de excluir cuestiones vagas y cálculos sin sentido».

Esta afirmación de Fourier no debe de interpretarse en el sentido de que la Matemática deba limitarse exclusivamente al estudio de lo que pueda tener aplicaciones y contra esta interpretación se levanta C. G. J.

---

(5) CRAMER, H. *Métodos Matemáticos de Estadística* (Ed. Aguilar)
(6) KLEIN, FÉLIX. *Matemática Elemental desde un punto de vista superior.*
(7) FOURIER, J. *Théorie Analytique de la Chaleur*, Discours Préliminaire.

Jacobi rudamente diciendo (8): «Es verdad que Fourier tiene la opinión de que el fin principal de las Matemáticas es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos de la Naturaleza; pero un filósofo como él debería de saber que el fin único de la Ciencia es el honor del espíritu humano y que, bajo este aspecto, una cuestión de Teoría de Números es tan valiosa como una cuestión del sistema del Universo».

A veces al intentar hacer un barrido lo más completo posible de una teoría, descubriendo el mayor número posible de verdades, se desarrollan numerosos teoremas que no siendo de aplicación inmediata interesan más al especialista en la teoría que al técnico. Pero cierta información de algunas de estas partes de la teoría no está de más a veces en el técnico. No se puede decir con precisión donde acaban las concepciones teóricas que pueden tener aplicación en la realidad, pues muchas teorías se formaron por satisfacer la curiosidad del investigador y permanecieron guardadas como trastos inútiles sin adivinar que un día serían de gran interés y potencia en las aplicaciones. Por ello dice A. R. Forsyth (9): «la materia científica no progresa necesariamente en dirección a la utilidad directa. Muchas aplicaciones de las teorías de la Matemática pura han aparecido años, e incluso siglos, después de los mismos descubrimientos. Las armas las tuvieron los hombres a mano, pero no las supieron utilizar».

Señalemos para citar un ejemplo interesante una materia de un gran valor puramente matemático, la Teoría de Funciones de Variable Compleja, la cual tiene una vitalidad propia, y se desarrolla por sus propias exigencias formando una teoría de gran belleza. De ella nos dice A. R. Forsyth (10) que «es una teoría de la matemática pura, germinada en dicha región y desarrollada en ella; se ha construído en una serie de trabajos y su plan no ha sido, ni es dominado o guiado por consideraciones de aplicabilidad a los fenómenos naturales. Pero ¿cuáles han sido sus resultados prácticos? Las investigaciones de Lagrange y otros referentes a la construcción de mapas aparecen como resultado de la propiedad general de la representación conforme; ésta es meramente el método geométrico de mirar las relaciones funcionales en esta teoría. También las interesantes e importantes investigaciones acerca del movimiento de un flúido en dos dimensiones pueden deducirse de consideraciones similares interpretando relaciones funcionales entre variables complejas. En la dinámica del giro de un cuerpo pesado ha sido útil la asociación de las propiedades generales de las funciones con la discusión de las ecuaciones del movimiento. Además bajo el título de funciones conjugadas, la teoría ha

(8) Referido por C. A. Bjerknes. *Mem. Soc. sc. phys et math.* Bordeaux (3), 1, p. 96.

(9) Forsyth, A. R. *Perry's Teaching of Mathematics*. London.

(10) Forsyth, A. R. *Presidential Address British Association for the Advancement of Science*. Nature, vol. 56, p. 377.

sido aplicada a varias cuestiones de electrostática, particularmente en relación con condensadores y electrómetros. Y finalmente, en el dominio de la Astronomía Física algunos de los avances más sobresalientes han sido conseguidos introduciendo en la discusión las ideas, principios, métodos y resultados de la Teoría de Funciones; la refinada y extremadamente difícil obra de Poincaré y otros en Astronomía Física se debe al uso de desarrollos altamente elaborados de algunas materias puramente matemáticas cuyo origen tuvo lugar sin pensar en las aplicaciones».

Debe llamarse la atención del alumno, aprovechando alguna ocasión propicia, acerca de algunas de las características de las Matemáticas, como el simbolismo, la abstracción, la deducción y el rigor.

Las notaciones que se utilicen deben de ser simples, lo más uniformes posible, fáciles de recordar, como por ejemplo utilizando la inicial del nombre de las variables, simétricas cuando sea del caso, por ejemplo utilizando subíndices, letras mayúsculas, griegas, etc. La pulcritud en la notación simplifica a veces el trabajo por permitir seguir mejor el curso de los cálculos.

Es preciso cultivar algo el sentido del rigor en el alumno. Hay que tener en cuenta que nosotros sólo podemos enseñar a los alumnos una cantidad limitada de teoría, pero debemos dar una formación adecuada que les capacite para extender sus conocimientos en cuanto lo necesiten. El incremento de la Matemática teórica y aplicada crece vertiginosamente; continuamente se desarrollan ciertas teorías, se modifican algunas, se crean otras para explicar y estudiar debidamente los fenómenos de la Naturaleza con arreglo a las exigencias de la vida moderna. El hombre cada vez despedaza más la materia queriendo profundizar en el conocimiento del microcosmos y un intento similar dirige al macrocosmos. El dominio de la Naturaleza por el hombre es cada vez mayor, y ello a costa de la Ciencia, siendo sin duda el instrumento básico la Matemática. No pudiendo enseñar más que una parte limitada de teoría, entre otras razones por falta de tiempo, se hace preciso hacerlo de forma que el alumno quede capacitado para extender sus conocimientos mediante el trabajo personal. Para ello debe subrayarse la importancia de tener los conceptos claros y efectuar los razonamientos rigurosos. No es que se desprecie la intuición sino que ésta debe servir de orientación al razonamiento. En relación con esto dice E. KASNER (11): los grandes matemáticos han actuado bajo el principio «Adivinad antes de demostrar» y ciertamente así ha ocurrido con casi todos los grandes descubrimientos.

Ahora bien, el rigor en nuestro caso (y casi en general) no debe ser

(11) KASNER, EDWARD. *The present Problems in Geometry*; Bull. Amer. Math. Society, vol. 11, p. 285.

una fiebre que domine la exposición de nuestra materia. Hay que saber dar el tono preciso a la enseñanza de la Matemática para la Técnica.

P. PUIG ADAM (12) nos dice: «en la enseñanza para el Ingeniero el rigor no debe ser despreciado como estorbo ni convertido en obsesión. No puede menospreciarlo el futuro Ingeniero porque necesita saber, tanto como pueda necesitarlo el científico puro, la firmeza del terreno que pisa, y la fineza del instrumento que maneja. No debe convertirlo tampoco en obsesión que pudiera robarle tiempo y energía necesaria para estudios de mayor utilidad...».

Además, Puig Adam nos dice como se puede proceder en la enseñanza para conseguir este objetivo: «a mi entender la solución consiste en omitir las demostraciones excesivamente prolijas confesando lealmente las omisiones y la defectuosidad de los razonamientos intuitivos con los que muchas veces se suplen y en ser, en todo momento, preciso en las premisas pero también generoso de ellas...».

Ha existido, y todavía existe entre los técnicos e ingenieros cierta reacción contra el rigor. Sin embargo otros, como indica la cita que acabamos de hacer, no quieren prescindir totalmente de él.

Hay situaciones, en efecto, en que el saber con todo rigor un teorema no conduce a una mejor utilización de él en la práctica, que si se ignora su demostración; por ejemplo, el teorema de Schwartz, u otros similares acerca de la igualdad de las derivadas mixtas

$$f_{xy} = f_{yx}$$

puede utilizarlo en la práctica con la misma eficiencia el que conoce una demostración rigurosa que el que no sabe la demostración, bien porque la olvidó o porque no la supo nunca; éste puede saber que en los libros de teoría de funciones figura dicha demostración y razona bien al decir «si otro lo demostró y figura en los libros ¿qué necesidad tengo de saber de memoria lo que no hay duda que está bien y lo puedo aplicar sin conocer dicha demostración?». Esto es lo que hace el hombre medio que maneja un aparato de radio o cualquier otro utensilio de hoy y no conoce su fundamento; no lo necesita para ponerlo en funcionamiento y disfrutarlo, pues hay otros que lo saben por él.

Además todos sabemos que incluso los mejores técnicos, profesores e investigadores hacen uso científico y práctico de verdades, teoremas y propiedades que no sabrían demostrar inmediatamente.

En el caso del teorema citado referente a la igualdad entre las derivadas cruzadas existen en realidad varios teoremas diferentes que exigen

(12) PUIG ADAM, P. *Curso teórico-práctico de ecuaciones diferenciales aplicado a la Física y a la Técnica*. Madrid. 1950.

condiciones distintas para las funciones a que se apliquen ¿deberán estudiarse todas rigurosamente?

Nosotros creemos, en efecto, que el rigor no debe ser despreciado en la enseñanza de la Matemática para la Técnica sino dosificado adecuadamente. Para el caso particular a que nos estamos refiriendo se puede elegir un teorema que no resulte excesivamente complicado, y por consiguiente que exija unas hipótesis suficientemente fuertes a las funciones a manejar. Por ejemplo es bastante simple la que corresponde al teorema de Bonnet.

A pesar de poner restricciones algo fuertes, en la práctica suele ser suficiente un enunciado que persiga la sencillez y no hay ninguna dificultad en informar al alumno de la existencia de otros enunciados más generales. Con eso basta. Si alguna vez precisa utilizar un enunciado diferente que acuda el alumno a los libros y que se documente; es probable que no tenga necesidad de ello nunca.

El rigor, en general, no debe menospreciarse en la enseñanza para los ingenieros y técnicos. Es un aspecto de la Ciencia en general, es formativo, educa y disciplina la mente, enseña a analizar y profundizar en los estudios, con él no se pierde el engranaje de la Matemática y su método; se estimula la precisión, sutileza y minuciosidad en el pensar.

En su defensa dice D. HILBERT (13): «es un error creer que el rigor en la demostraciones es un enemigo de la simplicidad. Por el contrario, encontramos confirmado por numerosos ejemplos que el método riguroso es a la vez el más simple y el más fácilmente comprensible. Los esfuerzos hechos en pro del rigor nos conducen a los métodos de demostración más sencillos».

Algunas demostraciones pueden sustituirse por una idea de la demostración en que se omitan los detalles, pero no queremos decir con esto que se rehuyan las partes difciles con demostraciones aparentes o sofismas, intentando engañar al alumno, sino que las supresiones sean puestas de manifiesto expresando que tienen por finalidad simplificar la demostración. A este respecto dice H. GRASSMANN (14): «pocos niegan que incluso en la primera instrucción científica en Matemáticas el método más riguroso debe ser preferido a cualquier otro. Todo profesor preferirá una demostración consistente a otra basada en sofismas o que se reduzca a un círculo vicioso, pues será moralmente imposible para él presentar una demostración de este último tipo conscientemente y con ella engañar a los alumnos... Quizás se responda que una demostración rigurosa resulta demasiado difícil para el poder de comprensión del alumno. Si se diese este

(13) HILBERT, D. *Mathematical Problems*. Bull. Am. Math. Soc., vol. 8, p. 441.
(14) GRASSMANN, HERMANN. *Stucke aus dem Lehrbuche der Arithmetik*, Werke, Bd. 2, p. 296.

caso —lo cual indicaría un defecto en el plan o en el tratamiento del conjunto— el único remedio sería simplemente establecer el teorema de un modo histórico y omitir la demostración con la franca confesión de que no se ha encontrado una demostración asequible para el alumno; remedio éste, que siempre es dudoso y debería aplicarse en caso de extrema necesidad. Pero este remedio debe preferirse a una demostración que no es demostración, y por consiguiente es o completamente ininteligible para el alumno, o le engaña con una apariencia de conocimiento que abre la puerta a toda la superficialidad y falta de método científico».

El rigor debe existir en los conceptos, en los enunciados y en los razonamientos.

Los conceptos deben tenerse bien sedimentados; es indispensable conocer una definición correcta de cada ente y manejar el concepto sin ambigüedad ni error en la teoría y en los problemas.

Sin haber sentado los conceptos fundamentales con rigor el esfuerzo hecho en los razonamientos es estéril ya que los conceptos sirven de base a toda la exposición. Sin embargo es preciso saber dar una interpretación intuitiva auxiliar. Los conceptos pertenecen a entes abstractos, precisos, esquematizados que condensan lo fundamental de hechos de la naturaleza, lo esencial para ser utilizados en los razonamientos teóricos. Pero las exigencias psicológicas del estudiante, y mayormente del que se forma para ser ingeniero, piden completarse con interpretaciones geométricas, físicas, del mundo real; esto es, a los conceptos deben acompañar imágenes vivas, ejemplos prácticos que nos muestren su significación e incluso su utilidad.

Citemos un ejemplo. El concepto de diferencial, debe inmediatamente interpretarse geométricamente, utilizando la idea de recta tangente, plano tangente. etc. pero la diferencial tienen una interpretación muy útil en los razonamientos eurísticos al plantear problemas físicos, etc.; en rigor no hay cantidades infinitamente pequeñas o infinitésimas como dice explícitamente E. W. HOBSON (15), sin embargo se emplea esta expresión para dar significación a las diferenciales y se razona con ellas eficazmente como todos sabemos.

También se debe poner el necesario rigor en los enunciados de los teoremas. El alumno debe estar advertido que en todo teorema hay unas hipótesis que si no se verifican, la conclusión puede dejar de satisfacerse. Contraejemplos adecuados lo convencerán. Sin embargo somos de la opinión de que no debe exigírsele al alumno que sepa de memoria una larga lista de condiciones como aparece en algunos teoremas. Estas pueden omi-

---

(15) HOBSON, E. W. *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series.*

tirse en el enunciado diciendo: «bajo las condiciones que impondremos más adelante» o «bajo ciertas condiciones de regularidad», etc. y luego se irán imponiendo a lo largo de la demostración o indicando la necesidad de condiciones adecuadas.

La lección que va a ser explicada por el profesor debe ser cuidadosamente preparada teniendo en cuenta los consejos expuestos o lo que la experiencia de cada cual le haya enseñado.

Ya no añadiré más normas ni procedimientos de enseñanza. Mas que seguir métodos didácticos concretos o caminos muy sistemáticos creemos que hay que estar dispuesto a todo lo contrario; tener el espíritu abierto para reformar nuestros hábitos, tendiendo a perfeccionarnos en la compleja labor de la enseñanza.

Y para insistir en este punto añadiré que una lección no puede considerarse dispuesta definitivamente para la enseñanza; no se puede confiar a un magnetófono su desarrollo lo mismo que un libro no puede excusar la existencia del profesor. El profesor debe saber captar el estado receptivo de la clase, su atención, cansancio, duda, disciplina, etc. y amoldarse a estas circunstancias que incluso pueden hacer variar la explicación de una misma lección de un curso a otro.

Mas que adquirir extensos conocimientos de Psicología, Oratoria, Lógica, etc., será eficaz para la enseñanza la práctica adquirida poco a poco y el entusiasmo puesto en esta labor.

Difícil y cargada de responsabilidad la tarea de formar hombres en la que tenemos puesto nuestro empeño todos los profesores de diversas clases; unamos nuestro entusiasmo y sacrificios por conseguir que la generación futura aprenda a conocer mejor la obra de la Creación y, aun más, a amarla para poder sentir los goces más elevados; digamoslo con las palabras de un conocido premio Nóbel (16): «Para quien lo sabe amar, el mundo se quita su careta de infinito. Se hace tan pequeño como una canción, como un beso de lo eterno».

(16) TAGORE, RABINDRANAZ. *Pájaros perdidos*, 3.