El análisis dimensional aplicado al flujo de un fluido viscoso sobre una placa plana

POR
A. ARENAS y A. HERRANZ
Escuela Universitaria
Politécnica de Cartagena

RESUMEN

Se estudia el movimiento de un fluido viscoso sobre una placa plana indefinida, calculando las componentes de la velocidad en la capa límite laminar, el espesor de dicha capa y la tensión tangencial en la placa, mediante la teoría del Análisis Dimensional de Palacios, observando que las soluciones obtenidas son más precisas que las del Análisis Dimensional clásico.

SUMMARY

Motion of a viscous fluid past an infinitely plate is studied. The components of the fluid velocity in the laminar boundary layer, the thickness of this boundary layer and the friction stress at the plate, are obtained using Palacios Dimensional Analysis theory, showing that the solutions are more precise than those of Classical Dimensional Analysis.

INTRODUCCION

La imposibilidad de resolver de forma exacta las ecuaciones de Navier-Stokes en los movimientos de los fluidos, hace de gran interés la aplicación del Análisis Dimensional a este tipo de problemas, siendo sus soluciones guías para los estudios experimentales que se realizan.

Leonidas I. Sedov (1) dedica, desde el punto de vista dimensional, gran parte de su obra *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* a estos problemas. Entre ellos figura el de *el flujo de un fluido viscoso sobre una placa plana,* que, pese a ser de planteamiento sencillo, no ha podido ser resuelto analíticamente de un modo exacto.

Consideremos el flujo de un fluido viscoso e incompresible sobre una placa plana. Supongamos que la placa comienza en el punto $x = 0$ y que se prolonga indefinidamente en el sentido positivo del eje X y a lo largo del eje Z. La velocidad de la corriente general, a suficiente distancia de la placa, U, es paralela al eje X y constante. Pretendemos calcular las componentes de la velocidad del fluido $u(x,y)$, $v(x,y)$, según los ejes X e Y respectivamente, admitiendo que la capa límite es laminar.

Utilizando la teoría de la capa límite, y mediante el Análisis Dimensional clásico, Sedov llega a:

$$u = U\, f_1\left(\frac{y}{x}\,,\ \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{\nu U}{x}}\, f_2\left(\frac{y}{x}\,,\ \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}}\right) \qquad [1]$$

donde ν es la viscosidad cinemática.

Efectivamente, basta establecer las variables que intervienen: U, ρ (densidad), x, y, μ (viscosidad dinámica), u, v; y aplicar el teorema de «pi» para obtenerlas.

Posteriormente mediante el estudio de las ecuaciones diferenciales de Prandtl para la capa límite:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

obtenidas de las de Navier-Stokes mediante ciertas aproximaciones, obtiene:

$$u = U\, f_1 \left(\frac{y}{\sqrt{\dfrac{\nu x}{U}}} \right)$$

$$v = \sqrt{\frac{\nu U}{x}}\, f_2 \left(\frac{y}{\sqrt{\dfrac{\nu x}{U}}} \right) \qquad [2]$$

Con el estudio analítico de las ecuaciones de Prandtl, por métodos de aproximaciones, obtiene para la tensión tangencial τ_0 en la placa:

$$\tau_0 = K \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{x}} \qquad [3]$$

y el cálculo numérico asigna a K el valor 0,332, lo que constituye la fórmula de Blasius.

Para el espesor de la capa límite laminar, da Prandtl (2) la expresión teórica:

$$\delta = k \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}} \qquad [4]$$

Nosotros vamos a demostrar que es posible obtener directamente, con el Análisis Dimensional de Palacios (3), soluciones más precisas que las del Análisis Dimensional clásico, que coinciden exactamente con la [2], con la expresión [3] de la tensión tangencial en la placa, y con el espesor de la capa límite laminar [4], sin que para ello sea necesario utilizar las ecuaciones de Prandtl con las aproximaciones que precisa realizar Sedov. Veremos también una aplicación sobre el desarrollo de la capa límite en un tubo.

COMPONENTES DE LA VELOCIDAD DEL FLUIDO EN LA CAPA LIMITE

Tomamos el eje Y perpendicular a la placa, y discriminamos las dimensiones del espacio respecto de la base: L_x, L_y, L_z, M, T; las fórmulas dimensionales de las variables expuestas resultan:

$$[u] = [U] = L_x\ T^{-1};\ [v] = L_y\ T^{-1};\ [\rho] = L_x^{-1}\ L_y^{-1}\ L_z^{-1}\ M;$$

$$[x] = L_x;\ [y] = L_y;\ [\mu] = \left[\frac{F/s}{u/y}\right] = \frac{L_x\ M\ T^{-2}\ L_x^{-1}\ L_z^{-1}}{L_x\ T^{-1}\ L_y^{-1}} =$$

$$= M\ L_x^{-1}\ L_y\ L_z^{-1}\ T^{-1}.$$

Para el cálculo de u, teniendo en cuenta que u/U es adimensional, el problema se plantea del siguiente modo:

	U	μ	x	y	ρ
L_x	1	—1	1	0	—1
L_y	0	1	0	1	—1
L_z	0	—1	0	0	—1
M	0	1	0	0	1
T	—1	—1	0	0	0
π	1	—1	—1	2	1

La característica de la matriz es h = 4, y el número de monomios i = 1, esto es:

$$\pi = \frac{U\,\rho\,y^2}{x\,\mu},$$

al que hay que añadir el factor de forma $\beta = u/U$. El monomio obtenido es el producto del Número de Reynolds (tomando como longitud característica la dimensión lineal y), por el cociente y/x:

$$\frac{U\,\rho\,y^2}{x\,\mu} = N_{Re,y}\cdot\frac{y}{x}$$

lo que indica que el Número de Reynolds *no es adimensional* en la base considerada, sino que tiene por fórmula dimensional:

$$[N_{Re,y}] = L_x\ L_y^{-1}$$

La expresión que se obtiene para la u es, por tanto:

$$u = U\ f\left(\frac{\rho\,U\,y^2}{\mu\,x}\right),$$

que coincide con la primera de [2], puesto que $\nu = \mu/\rho$.

Esta solución de u se ha obtenido admitiendo la existencia de la capa límite laminar. También puede encontrarse, mediante el Análisis Dimensional, la solución correspondiente al caso de régimen turbulento, como han demostrado Palacios (4) y Sánchez Rodríguez (5).

El cálculo de v se plantea de modo similar:

	v	U	x	y	μ	ρ
L_x	0	1	1	0	—1	—1
L_y	1	0	0	1	1	—1
L_z	0	0	0	0	—1	—1
M	0	0	0	0	1	1
T	—1	—1	0	0	—1	0
π_1	1	0	0	1	—1	1
π_2	0	1	—1	2	—1	1

$$\pi_1 = \frac{v\,y\,\rho}{\mu} \quad ; \quad \pi_2 = \frac{U\,\rho\,y^2}{x\,\mu}$$

resultando para v:

$$v = \frac{\mu}{\rho\,y}\, f'\left(\frac{U\,\rho\,y^2}{x\,\mu}\right)$$

que es la segunda expresión de [2].

TENSION TANGENCIAL EN LA PLACA

Para el cálculo de la tensión tangencial τ_0 en la placa, teniendo en cuenta que las variables que intervienen son: τ_0, μ, ρ, U, x, el Análisis Dimensional clásico proporciona la siguiente información:

	τ_0	μ	ρ	U	x
L	—1	—1	—3	1	1
M	1	1	1	0	0
T	—2	—1	0	—1	0
π_1	1	0	—1	—2	0
π_2	0	1	—1	—1	—1

$h = 3$
$i = 2$

Son, pues:

$$\pi_1 = \frac{\tau_o}{\rho\, U^2} \quad ; \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho\, U\, x} \quad ,$$

quedando para τ_o la expresión:

$$\tau_o = \rho\, U^2\, F\left(\frac{\mu}{\rho\, U\, x}\right) \qquad [5]$$

Veamos como es posible mejorar esta solución. La fórmula dimensional de τ_o en la base L_x, L_y, L_z, M, T es:

$$[\tau_o] = \left[\frac{F}{s}\right] = \frac{L_x\ M\ T^{-2}}{L_x\ L_z} = L_z^{-1}\ M\ T^{-2}$$

que, con las fórmulas dimensionales encontradas anteriormente, permite plantear el problema del modo siguiente:

	τ_o	μ	ρ	U	x
L_x	0	—1	—1	1	1
L_y	0	1	—1	0	0
L_z	—1	—1	—1	0	0
M	1	1	1	0	0
T	—2	—1	0	—1	0
π	1	—½	—½	—3/2	½

$h = 4$
$i = 1$

de modo que el único monomio que aparece es $\pi = \dfrac{\tau_o\ x^{\frac{1}{2}}}{(\rho\, \mu\, U^3)^{\frac{1}{2}}}$

y la solución es $\tau_o = C\left(\dfrac{\mu\, \rho\, U^3}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$,

más precisa que la [5] y que coincide con la fórmula de Blasius para $C = 0{,}332$.

ESPESOR DE LA CAPA LIMITE LAMINAR

Las variables que determinarán el espesor de la capa límite laminar δ, son: μ, x, ρ, U. La fórmula dimensional de δ en la base L_x, L_y, L_z, M, T, es $[\delta] = L_y$. El problema se plantea, pues, como sigue:

	δ	μ	x	ρ	U
L_x	0	—1	1	—1	1
L_y	1	1	0	—1	0
L_z	0	—1	0	—1	0
M	0	1	0	1	0
T	0	—1	0	0	—1
π	2	—1	—1	1	1

h = 4
i = 1

hay un solo monomio:

$$\pi = \frac{\delta^2 \rho U}{\mu x}$$

por lo que se obtiene la máxima información:

$$\delta = k \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}} \qquad [6]$$

expresión que concuerda con la que resulta de la teoría de Prandtl (2).

La información que proporciona el Análisis Dimensional clásico es incompleta, debido a que hay dos monomios, uno de ellos el factor de forma δ/x. La solución a que se llega, planteando el problema con las variables μ, x, ρ, U, es:

$$\pi = \frac{\mu}{\rho U x}, \text{ siendo, pues: } \delta = x\, f\left(\frac{\mu}{\rho U x}\right),$$

más imprecisa que la [6], al figurar en ella la función indeterminada f.

DESARROLLO DE LA CAPA LIMITE LAMINAR EN UN TUBO

La teoría de la capa límite se puede aplicar a la circulación de un fluido por un tubo. La distancia desde la zona de entrada hasta que la capa límite alcance el eje del tubo, se puede calcular con el Análisis

Dimensional. Dicha distancia L′ dependerá de: μ, ρ, U_m (velocidad media), D (diámetro del tubo). Con el planteamiento clásico del Análisis Dimensional se obtienen dos monomios adimensionales: L′/D, y el Número de Reynolds con el diámetro como longitud característica $N_{Re} = \rho \cdot U_m \cdot D/\mu$, y la solución es:

$$L' = D \cdot F_1 (N_{Re}) \qquad [7]$$

Usando la teoría de Palacios, L′/D no es adimensional, por lo que se mejora la solución. Las fórmulas dimensionales son ahora las siguientes: tomamos el eje X según el eje del tubo, y por la simetría del problema, las direcciones Y y Z son indistinguibles, por lo que tomamos una dimensión común para ambas L_{yz}.

$$[L'] = L_x \,;\; [D] = L_{yz} \,;\; [\rho] = L_x^{-1}\, L_{yz}^{-2}\, M; \; [U_m] = L_x\; T^{-1}$$

$$[\mu] = \left[\frac{F}{S \cdot \dfrac{du}{dn}}\right] = \frac{L_x\; M\; T^{-2}}{1_x\; L_{yz} \cdot L_x\; T^{-1}\, L_{yz}^{-1}} = L_x^{-1}\; M\; T^{-1}$$

el problema se plantea del siguiente modo:

	L′	D	μ	ρ	U_m
L_x	1	0	—1	—1	1
L_{yz}	0	1	0	—2	0
M	0	0	1	1	0
T	0	0	—1	0	—1
π	—1	2	—1	1	1

h = 4
i = 1

$\pi = \dfrac{U_m\, \rho\, D^2}{\mu\, L'}$, de donde: $L' = k \cdot D \cdot N_{Re}$, (k es una constante adimensional), solución más precisa que la [7], y que está conforme con los resultados experimentales y con la fórmula teórica de Langhaar (6), (7), (8).

En trabajos anteriores (9), (10), (11), hemos realizado el estudio de algunos casos de transmisión de calor a través de la capa límite, mostrando asimismo el modo de enfocar la resolución de estos tipos de problemas.

BIBLIOGRAFIA

1. SEDOV, L. I., *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Infosearch Ltd., London, 1959.
2. PRANDTL, L., and TIETJENS, O. G., *Applied Hydro-and Aeromechanics*, Dover, New York, 1957, pág. 67.
3. PALACIOS, J., *Análisis Dimensional*, Espasa-Calpe, Madrid, 1956.
4. PALACIOS, J., *Análisis Dimensional*, 2.ª edic., Espasa-Calpe, Madrid, 1964, pág. 127.
5. SÁNCHEZ RODRÍGUEZ, J., *Anales de Física*, vol. 56, 1965, pág. 99.
6. KAY, J. M., *Mecánica de Fluidos y Transferencia de Calor*, Marcombo, 1964, pág. 74.
7. PRANDTL, L., and TIETJENS, O. G., *Applied Hydro-and Aeromechanics*, Dover, New York, 1957, pág. 22.
8. LANGHAAR, H. L., *Trans. ASME*, vol. 68, A-55, 1942.
9. ARENAS, A., y HERRANZ, A., *Anales de Física*, vol. 70, 1974, pág. 98.
10. ARENAS, A., y HERRANZ, A., *Anales de Física*, vol. 69, 1973, pág. 215.
11. ARENAS, A., y HERRANZ, A., *Anales de Física*, vol. 73, 1977, pág. 112.