

TEMA MONOGRÁFICO: Psicología de las matemáticas

Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Un estudio intracontenido

Rosa María Pons*, María Elena González-Herrero y José Manuel Serrano

Universidad de Murcia

Resumen: El presente trabajo estudia los efectos de una metodología cooperativa en el aula de matemáticas centrándose en las interacciones entre tratamiento y contenido. Los autores parten de los resultados que obtienen otros investigadores que defienden la idea de que los métodos de aprendizaje cooperativo son más efectivos en tareas complejas y, centrándose en un aula de 4º de ESO, desarrollan las actividades a partir de una metodología mixta (cooperativo-individualista), dividiendo el contenido del curso académico en tres grandes bloques. El primer bloque hace referencia a la operatividad numérica, el segundo bloque es el de álgebra y, el tercero, es el de los contenidos que hacen referencia explícita a esquemas operacionales formales (combinatoria, probabilidad, etc.). Los resultados confirman que las diferencias en rendimiento, aunque son siempre a favor de la cooperación, son más acusadas en los contenidos más novedosos y complejos, incluso aunque estos contenidos estén directamente vinculados a los instrumentos cognitivos (esquemas) del sujeto.

Palabras clave: Aprendizaje de las matemáticas; aprendizaje cooperativo; rendimiento académico.

Title: Cooperative learning in mathematics: A intra-contents study.

Abstract: The present work studies the effects of a cooperative methodology in mathematics classes focusing on the interactions between processing and content. The authors start from the results obtained by other researchers that support the idea of cooperative learning methods been more effective in complex tasks, and focusing on a class of the 4th course of Compulsory Secondary Education (ESO), they develop the activities starting from a mix methodology (cooperative-individualistic), they divide academic content into three large-scale sections. The first block refers to the numerical operativity, the second segment is the one that belongs to algebra, and the third one corresponds to the contents that refer closely to the operational scheme (combinatory, probability, etc.). The results confirm that the dissimilarities in performance, however they are always in favour of cooperation, they are more noticeable in more innovative and complex contents, even though this contents are straight away linked to the cognitive tool (scheme) of the individual.

Key words: Mathematics learning; cooperative learning; academic achievement.

Introducción

La mejora de la calidad de la enseñanza de las matemáticas supone la consideración simultánea de dos características fundamentales para el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

La primera de ellas se refiere a la naturaleza de las matemáticas, ya que es muy frecuente su consideración de materia cuyo estudio sólo puede ser afrontado en solitario, sin más posibilidad de relación interpersonal de los alumnos que la derivada de su proximidad espacial en el aula o, en el mejor de los casos, de la valoración social que sus compañeros y el mismo profesor le ofrecen como consecuencia de los resultados obtenidos. Frente al carácter elitista que de este tratamiento se deriva, con la consiguiente pérdida de capacidades para el propio individuo y para la sociedad, creemos que es necesario urgir a los docentes a que tengan en cuenta los resultados de las numerosas investigaciones realizadas en este campo, en las que se muestran diferentes maneras de atender a las exigencias impuestas por la naturaleza de las matemáticas (jerarquización de los contenidos) durante el proceso de construcción del conocimiento (exploración de la realidad e intervención sobre ella, conceptualización personalizada, diversificación de los procedimientos seguidos, etc.).

La segunda se refiere al papel desempeñado por el principal agente del proceso de aprendizaje, el alumno, generalmente limitado a la recepción de información y al cumplimiento de las instrucciones que el profesor tenga a bien transmitirle y sin que, en la mayoría de los casos, exista posibilidad para el menor de los cuestionamientos. En los albores del siglo XXI sabemos que resulta prioritario reconocerle como autor de su propio proceso de construcción del conocimiento y, como ponen de manifiesto los numerosos estudios realizados al efecto (Ginsburg, Marika, Rhorbeck y Fantuzzo, 2006; Ke y Grabowski, 2007; Mastin, 2007; Rubel, 2006; Springer, Stanne y Donovan, 1999) es imprescindible poner a su alcance todos los medios necesarios para el pleno desarrollo de sus capacidades: situaciones educativas integrales, tareas de aprendizaje abiertas y multifacéticas, recursos materiales y personales suficientes y variados, etc. Dos de estos recursos personales, cuya intervención se aglutina con la del propio alumno en una acción conjunta, son el profesor y el grupo.

El papel desempeñado por el grupo en el proceso de aprendizaje, puesto de manifiesto con profusión de evidencias en distintas investigaciones (Dubinsky, Mathews y Reynolds, 1997; Pijls, Dekker y Van Hout, 2007; Souvignier y Kronenberg, 2007; Staples, 2007; Wolters, 2007), resulta incontestable, ya que, al proporcionar un foro en el que se puede preguntar, discutir, rectificar, recibir nuevas ideas y resumir descubrimientos, el grupo constituye un medio idóneo para que todos los alumnos alcancen el éxito y el progreso, espolcados por la diversidad de las aportaciones que tienen lugar en el seno de la cooperación, y un mecanismo de apoyo social fundamental para el aprendizaje de las ma-

* **Dirección para correspondencia** [Correspondence address]: Rosa María Pons. Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación. Facultad de Educación. Universidad de Murcia. Campus de Espinardo. 30100 Murcia (España). E-mail: rmpons@um.es

temáticas (Robertson, Davidson y Dees, 1994). No es de extrañar, por tanto, que la organización cooperativa del aula, donde los alumnos trabajan en pequeños grupos con una interdependencia positiva de objetivos, se haya constituido en un tópico de trabajo y de investigación (Rabaille y Travers, 1992; Bishop, 1992).

El papel desempeñado por el profesor constituye el instrumento fundamental del proceso interactivo que sirve de soporte a la construcción del conocimiento (Ding, Li, Piccolo y Kulm, 2007; Grassl y Mingus, 2007). Si el profesor asume su responsabilidad de coordinador y gestor de la vida que tiene lugar en el aula, facilitando y orientando la actividad del grupo, la actividad constructiva del alumno está asegurada por desarrollarse en el medio más favorable, el constituido por la proximidad cognitiva de sus "iguales". Pero, para que pueda alcanzar la máxima eficacia en el ejercicio de dichas funciones, es necesario que confluyan sus intereses profesionales y su capacidad de compromiso social pues, como apuntan los resultados de recientes investigaciones, los efectos del aprendizaje cooperativo sobre el desarrollo de las habilidades matemáticas están condicionados por la experiencia previa que tenga el profesor con pequeños grupos y por la forma en que promueve la interdependencia, es decir, por su pericia en la aplicación del método (Davidson, 1990a).

Si tuviéramos que destacar algunas de las funciones que el profesor debe llevar a cabo en el desempeño de su rol, en el aula cooperativa, nos inclinaríamos por aquellas que hacen referencia a la construcción del sistema social del aula (determinación de la direccionalidad de las relaciones interpersonales, con la consiguiente definición de los patrones comunicativo y de instrucción que regirán la intervención de los agentes implicados), a la planificación de la actividad de aprendizaje (selección de cuestiones específicas, aplicables e interesantes, determinando los conceptos matemáticos implicados, la amplitud de perspectivas y soluciones que posibilitan y la diversidad de las estrategias seguidas en su ejecución) y a la asignación de responsabilidades (estructuración de la tarea en función de las características del grupo y del momento educativo, determinación del sistema de evaluación en consonancia con la naturaleza del aprendizaje y con las relaciones individuo/grupo). Quedan otras muchas funciones a desempeñar por el profesor, cuyo desarrollo haría excesivamente amplia esta Introducción (para una mayor concreción cf. Serrano y González-Herrero, 1996). No las relegamos a un segundo término pero, como ya dijimos anteriormente, nuestra selección responde únicamente a un intento de facilitar la aplicación de las conclusiones a que hemos llegado en este trabajo.

Como resumen de estas consideraciones, debemos realizar una última reflexión de carácter general: puesto que las matemáticas nos ofrecen un campo lleno de ideas estimulantes que, utilizadas convenientemente, muy bien pueden constituir un desafío para el pensamiento en desarrollo de nuestros alumnos (Robertson, Davidson y Dees, 1994), es necesario aprovechar los efectos positivos que las estrategias

cooperativas aportan a profesores y alumnos (Davidson, 1990b) al instrumentar el apoyo y la motivación necesarias para el éxito.

Sin embargo, el aprendizaje cooperativo como tópico de investigación, tiene poco más de tres décadas de historia y existen muchas cuestiones aún por resolver. Una de estas cuestiones es la de los efectos del aprendizaje cooperativo en relación con el tipo de tarea (Davidson, 1990a; Webb y Mastergeorge, 2003). Nuestra investigación trata de analizar si existen diferencias en los efectos del aprendizaje cooperativo sobre la instrucción tradicional en función de la familiaridad y/o complejidad de la tarea.

Método

Sujetos

La muestra estaba formada por el total de sujetos ($n = 102$) de 4º de ESO (Opciones A y B) de un Centro de Secundaria de la Región de Murcia. Los alumnos se adscribían a tres grupos que, según decidió el propio Seminario de Matemáticas, dos estaban formados por los alumnos que accedían por primera vez al curso (grupos "opción A" y "opción B") y uno estaba constituido por repetidores y alumnos que se consideraban conflictivos (grupo C). El grupo A estaba formado por 38 alumnos, el grupo B por 37 y el grupo C por 27.

Procedimiento

Los sujetos adscritos al grupo B (grupo control) se les aplicó la metodología que el Seminario utilizaba normalmente y que consistía en:

- Exposición del tema por parte del profesor.
- Aclaración de dudas.
- Resolución de problemas-ejemplo.
- Aclaración de dudas sobre los ejercicios.
- Resolución de problemas estándar (tomados del libro de texto).

Los alumnos adscritos a los grupos A y C (grupos experimentales) fueron sometidos a un proceso de enseñanza y aprendizaje (tratamiento) basado en una metodología mixta (cooperativo-individualista) que había sido probada con anterioridad (Serrano, González-Herrero y Martínez-Artero, 1997) y adaptada a todos los niveles educativos (Serrano, González-Herrero y Pons, 2008). Como ejemplo del proceso instruccional al que fueron sometidos se desarrolla la primera de las lecciones impartidas.

IDENTIFICACIÓN DE LA ACTIVIDAD

Nivel: 4º de E.S.O.

Área: Matemáticas.

Tema: Los números enteros.

Tiempo designado para su aplicación: 2 sesiones de 50 minutos

Finalidad: La lección tiene por objeto atender a las necesidades específicas, sociales y académicas, que presentan los alumnos que van a concluir la Educación Secundaria Obligatoria. Sin embargo, y aprovechando que los alumnos poseen un conocimiento de base muy importante sobre el número y las operaciones en Z, en el proceso de aprendizaje se prestará especial atención a los procesos sociales desarrollados en el seno del grupo durante la realización de diferentes actividades matemáticas, de manera que más que una actividad vinculada al contenido, se pretende que sea una actividad vinculada al “aprender a cooperar”.

OBJETIVOS ACADÉMICOS

Conocimientos y habilidades previas

- Concepto de número natural.
- Operaciones con números naturales.
- Relaciones numéricas.

Objetivos académicos

- Diferenciar las entidades numéricas que integran el conjunto de los números enteros.
- Operar con números enteros.
- Resolver situaciones matemáticas aplicando las operaciones con enteros.

Conducta de los alumnos para demostrar el logro de los objetivos

- Realizar operaciones.
- Detectar errores en procedimientos.
- Aplicar las operaciones básicas con enteros a la resolución de problemas.

Criterios para valorar su consecución

- Resolver correctamente las distintas cuestiones que integran la prueba individual.

OBJETIVOS SOCIALES

Conocimientos y habilidades previas

- Respeto al trabajo de los compañeros.
- Cumplimiento de las indicaciones para la realización de una actividad de grupo.

Objetivos sociales

- Participar en la gestión del grupo.
- Asumir la responsabilidad inherente a la condición de miembro del grupo.

Forma de comunicación de la destreza social

- Responder a las demandas de ayuda formuladas por otros miembros del grupo, aclarando sus dudas mediante explicaciones conducentes a la comprensión del proceso implicado en la resolución de la cuestión.
- Respetar el nivel de logro de los compañeros de equipo, valorando su contribución al producto del grupo.

Conducta de los alumnos para demostrar el logro de los objetivos

- Participar en la discusión y aclaración de los conceptos implicados en la tarea, comprobando que todos los miembros del grupo han superado sus dificultades.
- Pedir ayuda siempre que sea necesario.
- Responder siempre a las demandas de ayuda.

Criterios para valorar su consecución

- Los alumnos alcanzan los objetivos si durante el proceso de grupo:

- . participan en la discusión de las cuestiones planteadas,
- . se aseguran de que los compañeros de equipo comprendan el material y
- . se implican, al máximo de sus capacidades, en las reelaboraciones grupales.

Asignación de las destrezas sociales

- El profesor asigna las destrezas sociales: todos los miembros del grupo son responsables de la correcta comprensión del material por sus compañeros, de la elaboración de la hoja de resultados de grupo y de su participación individual en la puntuación de grupo.

INTERACCIÓN DIRECTA

Tamaño del grupo: 4 ó 5 miembros.

Criterios de formación de los grupos: heterogéneos en cuanto a habilidad (variabilidad moderada, respetando al máximo el concepto de heterogeneidad media), actitud hacia las matemáticas y sexo.

Organización del espacio físico: flexible, de manera que puedan agruparse las mesas en la disposición más favorable para la exposición del profesor a la totalidad de la clase, para el trabajo en grupo y para la evaluación individual.

INTERDEPENDENCIA POSITIVA

Estructura de la tarea de aprendizaje

- Número de metas a alcanzar: aunque la interacción se produce en relación de tutoría (entre el alumno que pide ayuda y el que la da), cada alumno es responsable, como miembro del grupo, del desarrollo del proceso de aprendizaje (académico y social) y cada grupo es responsable de la correcta resolución de las cuestiones planteadas.

- Producto a conseguir: una hoja de resultados finales por grupo.

- Secuencia de actividades que integran la tarea:

- . En un primer momento el profesor presenta el tema y expone el proceso académico y social a seguir.
- . Finalizada la presentación de la tarea, los grupos se reúnen para la realización del trabajo, siguiendo las normas de intervención previstas por el profesor: comprensión de los materiales a nivel de grupo, resolución de las cuestiones a nivel individual, autoevaluación formativa grupal.
- . Posteriormente, el profesor confirma la autoevaluación procediendo a retroalimentar a los alumnos sobre su trabajo; esta evaluación deberá ser objeto de reflexión en el seno del grupo, con la consiguiente confirmación de las soluciones o reconsideración de las cuestiones en el caso de ser necesaria su rectificación.

- Medios: libros de texto, hojas de cuestiones y hojas de autoevaluación.

Estructura de la recompensa

Con objeto de facilitar la cooperación entre todos los miembros del grupo y, al mismo tiempo, animar a los alumnos a que establezcan relaciones de tutoría, la evalua-

ción final de cada alumno procede de dos fuentes: en primer lugar, de los resultados obtenidos en las pruebas individuales (70%) y, en segundo lugar, de la puntuación obtenida por el grupo como fruto de las puntuaciones de sus miembros (30%).

Roles de los alumnos

Durante la realización del proceso de aprendizaje sólo existen dos roles, tutor y tutorado, derivados de la diferencia de habilidades que presentan los integrantes del grupo y del tipo de relación (facilitación positiva) que caracteriza las relaciones intragrupalas. En la gestión del grupo, no existe ninguna diferenciación: todos colaboran por igual en su realización.

División del trabajo

No se establece, debido a la naturaleza de la tarea y de las relaciones entre los miembros del grupo.

Criterios de utilización de los materiales

Los alumnos disponen, desde el comienzo, de todo el material necesario para el desarrollo de la unidad: textos, fichas de cuestiones y problemas y fichas de soluciones. Su utilización, en el seno del grupo, responde a un criterio de efectividad marcado por la secuencia de los contenidos que integran el tema: comprensión conceptual y procedimental, consolidación de conocimientos y aplicación de los conocimientos a la resolución de situaciones.

PROCESO DE GRUPO

Intervención y control del profesor

- Control de los grupos:
 - . Observación del proceso, interviniendo en caso de conflicto (académico o social) para orientar su solución; retroalimentación en caso de errores y como consolidación de aciertos.
 - . La observación abarcará todo el desarrollo del tema y se centrará en los procesos de grupo puestos en marcha para la realización de las actividades de aprendizaje. La intervención y retroalimentación se producirán en términos positivos y en el momento de detectarse su necesidad.
- Previsión de problemas de colaboración:
 - . Aunque la estructura de recompensa implícita en la evaluación permite suponer que no se producirán problemas de colaboración entre los miembros del grupo, de producirse, es presumible que se deban a la urgencia que los tutores pueden infringir a sus tutorados sobre la comprensión de sus aclaraciones, o a que éstas se centren en la forma de obtener el resultado exigido por las cuestiones y no en la comprensión del proceso que debe seguirse para su resolución.
- Intervenciones para evitar o solucionar dichos problemas:
 - . En prevención, al comienzo de la actividad se recuerda a la clase el sistema de recompensa basado en la complementación de las puntuaciones individuales y de grupo. Durante el desarrollo del proceso de aprendizaje, la continuada observación del profesor y la retroalimentación

puntual deben ayudar a evitarlos o, al menos, colaborar en su solución.

Intervención y control del grupo

- Una vez concluida la tarea, el grupo revisa el proceso social seguido y analiza las observaciones realizadas por el profesor procediendo a la realización de las modificaciones necesarias para el desarrollo futuro de la actividad.

RESPONSABILIDAD INDIVIDUAL

Sistema de control

Realización de una prueba con cuestiones similares a las realizadas en el seno del grupo.

ASIGNACIÓN DE LA TAREA

Presentación de la tarea

- En un primer momento el profesor explica a la clase que van a trabajar el tema de los números enteros y que, para lograr la máxima eficacia en su estudio, es necesario que cada alumno cuente con la colaboración de su equipo. Les recuerda que todos poseen la suficiente preparación sobre los distintos aspectos que integran la actividad desarrollada en el aula (explicaciones del profesor en gran grupo, trabajo en pequeños grupos y el sistema de evaluación: - evaluación del trabajo del grupo, evaluación individual, criterios de puntuación) y sobre las normas generales de interacción por lo que no le cabe la menor duda de que tendrán éxito en su trabajo.

Proceso de realización de la tarea

- Primera fase. El profesor inicia la exposición del tema referente a los números enteros, aclarando los aspectos fundamentales para su comprensión y para la actualización de los conocimientos que sustentan la realización de la actividad. Debido a la importancia que tiene la aplicación de estos aprendizajes a la vida real, insiste en que el proceso de interacción que se desarrolle en el seno de los grupos tiene por objeto el que todos los miembros dominen el proceso seguido en la resolución de las distintas cuestiones, nunca en el aprendizaje mecánico de su solución. Para ayudarles a recordarlo, les reitera el hecho de que es responsabilidad de cada uno pedir la ayuda que necesiten en el momento que les surja la menor duda, que es responsabilidad del compañero que pueda aclarársela hacerlo lo mejor posible y que este esfuerzo se verá recompensado, tanto por el valor que en el sistema de evaluación se le asigna a la puntuación del grupo, como por el hecho de que en esta puntuación intervienen, indistintamente, los resultados obtenidos por cada uno de sus miembros en la prueba individual que deberán realizar al finalizar el trabajo de grupo.
- Segunda fase. Una vez que se ha aclarado convenientemente el proceso académico y social, y el profesor ha comprobado su comprensión, el grupo se reúne para trabajar, procediendo a discutir sobre lo explicado, resolviendo todas las dudas conceptuales que puedan surgir sobre la interpretación de la información ofrecida y realizando los ejercicios incluidos en el texto, teniendo muy claro el beneficio que sus aportaciones (dudas, sugerencias sobre estrategias, etc.) representan para cada uno y para el grupo.

representan para cada uno y para el grupo. Finalizado este trabajo, cada alumno deberá resolver individualmente las cuestiones y problemas planteados en las fichas correspondientes.

- Tercera fase. Cuando todos los miembros del grupo hayan resuelto las cuestiones planteadas, el profesor les entrega una hoja con las soluciones para que puedan, intercambiándose las actividades que han realizado individualmente, evaluarse unos a otros. Conocidos los resultados de dicha evaluación, deberán ser analizados: si algún miembro ha tenido dificultades deberá, con la ayuda del profesor y de los compañeros que las hayan superado, rectificar sus errores y demostrar, en una nueva hoja de cuestiones, que domina los contenidos; finalmente, superadas las distintas actividades por todos los miembros, el grupo deberá proceder, de manera conjunta, a la elaboración de los resultados en la hoja de grupo.

PRESENTACIÓN DEL PRODUCTO

Proceso de cierre

- El profesor revisa la evaluación realizada en el seno del grupo proporcionando la retroalimentación necesaria sobre los dos aspectos de su actividad (de aprendizaje y de evaluación), de manera que el grupo pueda consolidar procesos y resultados o para que, en el caso de no haber sido superados los objetivos previstos, pueda proceder a su revisión.

Proceso de recuperación

- Se produce en el seno del grupo, sobre los resultados de la evaluación grupal y con la orientación del profesor: si no se han superado los objetivos previstos, resolver individualmente al menos ocho de las diez cuestiones y tres de los cuatro problemas de cada ficha, el grupo debe revisar el proceso seguido y asegurarse de que todos los miembros superan sus dificultades antes de pasar a elaborar el producto de grupo. Posteriormente, se realizarán cuestiones similares a las anteriores con objeto de consolidar procesos y conocimientos.

Observaciones del profesor

- Se producirán durante el desarrollo de la actividad (al resolver cuestiones puntuales planteadas por el grupo) y al finalizar la presentación del producto, confirmando su autoevaluación siempre en términos positivos.

Valoración de las destrezas sociales

- La realizará el grupo y el profesor durante la realización de la actividad y al finalizar la presentación del producto. Las observaciones se efectuarán siempre en términos positivos, tanto las que se hagan en referencia al grupo, como a cada uno de sus miembros.

VALORACIÓN DE LA LECCIÓN

Una vez finalizado el proceso de aprendizaje implícito en el diseño de la lección, el profesor debe proceder a valorar su aplicación, comprobando el tratamiento concedido a los

elementos de aprendizaje cooperativo incluidos y el nivel de consecución de los objetivos académicos y sociales. Esta valoración permitirá identificar la nueva realidad educativa (situación de las relaciones interpersonales y cohesión del grupo, evolución de los conocimientos, complejidad de las estrategias puestas en juego, etc.) con que se afronta la aplicación del siguiente diseño y llevar a cabo las adaptaciones necesarias a fin de asegurar el progresivo desarrollo, personal y social de los alumnos.

Antes de trabajar los temas de un bloque de contenidos se presentaba una prueba similar a la que constituiría la evaluación final para determinar los conocimientos previos del alumno y determinar la mejora de su rendimiento.

La evaluación global de los resultados se efectuó por bloques de contenido, existiendo, por tanto, tres evaluaciones que fueron diseñadas por el Seminario de Matemáticas y eran comunes para los tres grupos de alumnos. El rango de las puntuaciones, tanto del pretest como del postest era (0-6).

Resultados

El diseño experimental es un clásico pretest-postest con la variable «grupo» como variable intersujetos, con dos niveles (experimental y control). La variable «bloque» actúa como variable intrasujetos, siendo las diferencias pretest-postest, para cada uno de los tres bloques las variables dependientes.

Los datos se analizaron mediante un MANOVA factorial mixto 2 (grupos) x 3 (bloques), con medidas parcialmente repetidas en el segundo factor.

Las diferencias entre las medias de los grupos experimental y control fueron siempre a favor de los grupos experimentales (ver Tabla 1).

Tabla 1: Media de las variables dependientes.

DF ₁	DF ₂	DF ₃
1.041	1.830	1.662

Los resultados del MANOVA arrojan, tanto diferencias significativas intersujetos ($p < .05$), como intrasujetos, es decir con respecto a los bloques de contenido ($p < .001$), siendo igualmente significativa la interacción bloques*grupo ($p < .001$), por lo que podemos afirmar que el comportamiento de los grupos es significativamente diferente para cada uno de los bloques (ver Tabla 2).

A continuación se realizaron todas las comparaciones post-hoc posibles (una contra una y una contra dos, aunque, evidentemente, las comparaciones que presentan más interés para nosotros son las comparaciones uno contra uno), en los tres niveles de medida (ver Tabla 3), encontrándose diferencias estadísticamente significativas en todas ellas ($p < .001$), excepción hecha de las comparaciones de los bloques 1 y 2 contra 3 ($p < .15$) y del bloque 2 contra el 3 ($p < .10$).

Tabla 2: MANOVA factorial.

Fuente	Sumas de Cuadrados	Grados de libertad	Medias Cuadráticas	Razón F	Valor de probabilidad
INTERSUJETOS					
Grupo	7.606	1	7.606	4.126	0.045
Error	184.363	100	1.844		
INTRASUJETOS					
Bloques	22.105	2	11.052	21.123	0.000
Bloques*grupo	15.077	2	7.538	14.407	0.000
Error	104.647	200	0.523		

Tabla 3: Comparaciones *post-hoc*.

Fuente	Sumas de Cuadrados	Grados de libertad	Medias Cuadráticas	Razón F	Valor de probabilidad
BLOQUES 1 y 2 contra 3					
Hipótesis	8.427	1	8.427	2.420	0.123
Error	348.295	100	3.483		
BLOQUES 1 y 3 contra 2					
Hipótesis	67.240	1	67.240	23.317	0.000
Error	288.375	100	2.884		
BLOQUES 2 y 3 contra 1					
Hipótesis	123.276	1	123.276	40.398	0.000
Error	305.155	100	3.052		
BLOQUES 1 contra 2					
Hipótesis	83.677	2	41.838	44.893	0.000
Error	93.196	100	0.932		
BLOQUES 2 contra 3					
Hipótesis	3.118	1	3.118	2.898	0.092
Error	348.295	100	3.483		
BLOQUES 1 contra 3					
Hipótesis	64.275	2	32.137	28.398	0.000
Error	113.169	100	1.132		

Finalmente se realizó una prueba de «t» para comprobar la significación de las diferencias entre medias de las variaciones pretest-postest, en cada uno de los tres bloques de contenidos, para los grupos dos grupos (experimentales y de control). Los resultados no arrojan valores significativos para el primer bloque de contenidos (numérico), pero sí para el segundo (algebraico) y tercero (esquemas formales), con valores de p inferiores al uno por mil en ambas comparaciones (ver Tabla 4).

Conclusiones y discusión

Los resultados obtenidos, considerados globalmente, vienen a confirmar la hipótesis de trabajo. En efecto, las variaciones encontradas entre el postest y el pretest indican, claramente, que se han producido diferencias significativas, en rendimiento, entre los grupos experimentales y el grupo control (siempre a favor de los experimentales). Una simple inspección visual a las medias de los distintos bloques de contenidos (Tabla 1) nos puede hacer ver que las diferencias se hacen más acusadas en los bloques de mayor dificultad conceptual. En efecto, el primer bloque hace referencia a la operatividad numérica, el segundo bloque es el de álgebra y, el tercero, es el de esquemas operacionales formales.

Tabla 4: Prueba de «t» para muestras independientes agrupadas por grupo.

SOBRE LA VARIABLE DEPENDIENTE DF ₁			
Grupo	N	M	Σ
1	65	0.924	0.845
2	37	1.246	0.996
Para varianzas separadas: $4 t_{65} = -1.658$ p = 0.102			
Para varianzas agrupadas: $t_{100} = -1.734$ p = 0.086			
SOBRE LA VARIABLE DEPENDIENTE DF ₂			
Grupo	N	μ	Σ
1	65	2.048	0.983
2	37	1.447	0.732
Para varianzas separadas: $8 t_{92} = 3.512$ p = 0.001			
Para varianzas agrupadas: $t_{100} = 3.244$ p = 0.002			
SOBRE LA VARIABLE DEPENDIENTE DF ₃			
Grupo	N	μ	Σ
1	65	1.918	1.289
2	37	1.213	0.750
Para varianzas separadas: $9 t_{99} = 3.491$ p = 0.001			
Para varianzas agrupadas: $t_{100} = 3.041$ p = 0.003			

A partir de esta diferenciación de contenidos, se puede observar que el primer bloque es inferior al segundo, en cuanto a nivel de dificultad se refiere, y esto por dos razones. En primer lugar, porque los contenidos del primer bloque suponen una actividad de repaso a conceptos que comenza-

ron a trabajarse desde el inicio de la escolaridad y de los que se han ido realizando sucesivas ampliaciones conforme el alumno iba conceptualizando y aplicando nuevas operaciones. En segundo lugar, no hay nada más que realizar un somero repaso por la historia de las matemáticas para comprobar que el álgebra no es sino un primer nivel de abstracción que permitió a los hombres liberarse de la obligada atadura hacia el estudio y resolución de problemas concretos, puesto que con este nuevo y eficaz instrumento se les permitía resolver, de golpe, toda una familia de problemas.

Las diferencias encontradas entre el primero y el tercer bloque vendrían explicadas por el hecho de que los contenidos de este último son, en realidad, esquemas formales básicos (Piaget e Inhelder, 1955) y si, como tales, no encierran mayor dificultad para su aplicación, sí que puede generarse un cierto problema en cuanto a su conceptualización y toma de conciencia. Es decir, los esquemas probabilísticos y combinatorios pueden presentar, en estos niveles de equilibración procesual o procedimental, ciertos problemas de ajuste pues es necesario separarlos parcialmente de sus contextos respectivos y, como ya dejó establecido Piaget (1976), el sistema procedimental (o Sistema II) presenta una autoorganización mucho más débil que la que rige el sistema estructural (o Sistema I). Por otra parte, si la constitución y desarrollo de estos esquemas formales facilitan la apropiación de aquellos saberes matemáticos que les son isomórficos, no podemos olvidar tampoco que la combinatoria y la probabilidad matemática, aunque son un caso particular de estos esquemas, se sitúan en un plano superior.

Finalmente, la no significatividad de las diferencias encontradas entre los bloques dos y tres se deduce claramente de lo expuesto con anterioridad, en la medida en que los contenidos de estos bloques son total o parcialmente novedosos y similares en dificultad, pero con la ventaja para el último (diferencia positiva entre las medias de estos bloques) de apoyarse unívocamente en un esquema cognitivo de carácter básico.

El análisis que podemos efectuar a partir del valor de la «F» ómnibus del MANOVA factorial, y que viene a confirmar la hipótesis de trabajo, nos remite a algunas interpretaciones que pueden resultar altamente ilustrativas.

En primer lugar, y dejando aparte, tanto el hecho de que las diferencias intersujetos sean significativas que, con ser un dato muy importante, era de todo punto esperado (sobre todo a la luz de los resultados obtenidos por otros investigadores en trabajos similares), como las diferencias intrasujetos encontradas entre los bloques, debido a las diferencias de contenido que conscientemente introdujimos en ellos y que han sido remarcadas en las comparaciones post-hoc, nos llama poderosamente la atención el hecho de las diferencias encontradas en la interacción de los tres bloques de contenido con los dos grupos establecidos en nuestra investigación. En efecto, esta alta significación de la interacción nos indica un claro comportamiento distinto de los grupos (experimentales y control) en relación a contenidos específicos dentro de la misma área. Por esta razón, realizamos una prueba de

«t» para comparar el rendimiento de los grupos en cada uno de los bloques de contenido. Los resultados obtenidos en esta prueba nos permiten establecer una serie de conclusiones relativas a la diferencia de rendimiento por bloques en cada uno de los grupos donde, a través de una simple inspección de las medias, se observa que mientras los sujetos del grupo control mantienen, por término medio, una mejora de rendimiento constante para cada uno de los bloques de contenido, los sujetos de los grupos experimentales manifiestan una mejora de rendimiento mucho más alta en los bloques cuyos contenidos, o eran novedosos, o habían sido trabajados poco anteriormente por tratarse de contenidos específicos de las operaciones formales y que, por lo tanto, sólo podían haberse abordado a partir de primero de la ESO (no olvidemos que sexto de EP es el curso de transición de las operaciones concretas a las operaciones formales).

En segundo lugar, cuando nos remitimos a la comparación entre las medias de los grupos, observamos cómo en el caso del primer bloque, en donde los contenidos estudiados prolongan, reorganizan y generalizan conceptos que comienzan a desarrollarse desde los albores de la escolarización, no se aprecian diferencias significativas en las mejoras de los rendimientos de los sujetos, independientemente de la metodología a la que estén sometidos. Por el contrario, en los bloques segundo y tercero, en donde los contenidos son total o parcialmente novedosos, las diferencias alcanzan un alto nivel de significación a favor de los sujetos sometidos a una disciplina de aprendizaje cooperativo.

Estas consideraciones nos permiten concluir que la utilización de una metodología cooperativa posibilita una mejora sustantiva del rendimiento académico en matemáticas, cuando se comparan sus resultados con las situaciones de aprendizaje tradicional que, normalmente, se desarrollan a partir de modelos individualistas y con una mayor o menor carga de competitividad. Estos resultados vienen a sumarse a los encontrados por otros investigadores (Springer, Stanne y Donovan, 1999) y, además apoyarían las conclusiones del primer meta-análisis del grupo de Minnesota (Johnson, Maruyama, Johnson, Nelson y Skon, 1981), en el que se determinaba que la cooperación favorecía más el rendimiento en tareas complejas. Sin embargo, no nos parece que la conclusión pueda ser tan simplista, por cuanto el primer bloque de contenidos que nuestros alumnos han manejado supone, en su culminación curricular de la Educación Obligatoria (4º de ESO), una conceptualización numérica que entronca con el propio análisis matemático y, por tanto, estamos hablando de contenidos de complejidad igual o mayor que la que presentan los de los bloques segundo y tercero.

Nuestra opinión es que los sujetos, a lo largo de su escolarización, utilizan determinadas estrategias de aprendizaje y las aplican a bloques específicos de contenidos de una misma área (o de distintas áreas) de conocimientos. Si estas estrategias les permiten tener resultados exitosos se "enquistan" y se tornan poco menos que inamovibles, de tal manera que se integran, únicamente, como saberes procedimentales (saber hacer) y no como saberes declarativo-estructurales

(comprender). Por otra parte, las posibilidades de estrategias que lleva aparejadas un modelo de aprendizaje cooperativo, son sustancialmente distintas a las utilizadas en los modelos competitivo e individualista. De cualquier forma, tanto unas como otras suelen ser las consecuencias de acciones que se han constituido en medios para conseguir fines específicos y resultan muy difíciles de abstraer de sus respectivos contextos por cuanto se refieren a situaciones particulares y heterogéneas.

Nosotros pensamos que la lectura de los rendimientos debe realizarse en este contexto y, por tanto, entendemos que en el primer bloque, que parte desde el propio inicio de la escolarización, se han ido creando unas estrategias y unas pautas de conducta que, siendo muy difíciles de extraer fuera del contexto numérico en el aula, se intentan generalizar a todas las situaciones que impliquen actividades de tipo numérico. Por el contrario, en los bloques segundo y tercero, los contenidos son total o parcialmente novedosos, es decir, o están en los inicios de su constitución (caso de las funciones y las ecuaciones) o están por construir (caso de las inecuaciones, combinatoria y probabilidad) y, por lo tanto, hay que crear nuevos procedimientos y estrategias para abordarlos, y aquí es donde se torna francamente efectivo un modelo de aprendizaje del tipo propuesto. En efecto, en estos nuevos contextos, las estrategias o no se han consolidado o no se han elaborado y, prácticamente, «está todo por hacer». Son, por tanto, los efectos del modelo los que han posibilitado la consecución de unas estrategias mucho más efectivas que han disminuido considerablemente el fracaso escolar que, habitualmente, se da en esta disciplina, como se puede comprobar en los distintos informes regionales (Rendimiento académico no universitario en la Región de Murcia, ICE), nacionales (INCE) e internacionales (TIMSS o Pisa) que sitúan el número de suspensos en torno al 50%. Estas previsiones de fracaso se mantiene en el grupo control, pero en

los grupos experimentales ha disminuido casi diez puntos, habiendo partido ambos grupos con puntuaciones muy similares en los pretest o, incluso, ligeramente ventajosas para el grupo control.

Las ventajas que genera la aplicación de un método cooperativo son, pues, evidentes. En efecto, dejando a un lado las innumerables y muy interesantes ventajas descritas desde el plano social (y que posibilitan, entre otras cosas, la integración de minorías étnicas y de sujetos afectados por deficiencias motóricas, sensoriales, psíquicas, etc.), desde una perspectiva eminentemente cognitiva estas ventajas no son menos interesantes.

En este sentido, no quisiéramos poner fin a estas conclusiones sin remitirnos a un bonito trabajo piagetiano (y por determinadas críticas efectuadas a este autor, nos parece que poco leído) en donde el eminente epistemólogo suizo plasma magistralmente esta idea de enriquecimiento cognitivo a través de la cooperación: "Cooperar en la acción viene a ser operar en común, es decir, el ajustar mediante nuevas operaciones (cualitativas o métricas) de correspondencia, reciprocidad o complementariedad, las operaciones realizadas por cada uno de los colaboradores. Y así sucede en todas las colaboraciones concretas: el seleccionar conjuntamente objetos según sus cualidades, el construir entre varios un esquema topográfico, etc., viene a ser coordinar las operaciones de cada colaborador en un sistema operatorio único, cuyos propios actos de colaboración constituyen las operaciones integrantes" (Piaget, 1965, p. 91).

Esperemos que la metodología cooperativa sea asumida rápidamente por los profesionales en activo y que, parafraseando a Max Planck, no ocurra que "una nueva teoría psicopedagógica no se instala definitivamente porque cambien aquellos que pensaban según patrones anteriores, sino porque se jubilan antes".

Referencias

- Bishop, A.J. (1992). International perspectives on research in mathematics education. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Education* (pp. 710-723). New York: Macmillan.
- Davidson, N. (1990a). Cooperative learning research in mathematics. Comunicación presentada a *International Convention on Cooperation in Education*. Baltimore, MD.
- Davidson, N. (1990b). *Cooperative learning in mathematics: A handbook for teachers*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.
- Ding, M., Li, X., Piccolo, D. y Kulm, G. (2007). Teacher interventions in cooperative-learning mathematics classes. *Journal of Educational Research*, 100(3), 162-175.
- Dubinsky, E., Mathews, D. y Reynolds, B.E. (Eds.) (1997). *Readings in cooperative learning for undergraduate mathematics*. Washington DC: The Mathematical Association of America.
- Ginsburg, B., Marika, D., Rohrbeck, C.A. y Fantuzzo, J.W. (2006). A meta-analytic review of social, self-concept, and behavioral outcomes of peer-assisted learning. *Journal of Educational Psychology*, 98(4), 732-749.
- Grassl, R. y Mingus, T.T.Y. (2007). Team teaching and cooperative groups in Abstract Algebra: Nurturing a new generation of confident mathematics teacher. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(5), 581-597.
- Johnson, D.W., Maruyama, G., Johnson, R.T., Nelson, D. y Skon, L. (1981). Effects of cooperative, competitive, and individualistic goal structures on achievement: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 89, 47-62.
- Ke, F. y Grabowski, B. (2007). Gameplaying for Maths learning: Cooperative or not? *British Journal of Educational Technology*, 38(2), 249-259.
- Kutnick, P., Ota, C. & Berdondini, L. (2008) Improving the effects of group working in classrooms with young school-aged children: facilitating attainment, interaction and classroom activity, *Learning and Instruction*, 18(1), 83-95.
- Mastín, M. (2007). Storytelling + Origami = Storigami Mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 14(4), 206-212.
- Mingote, A. y Sánchez, J.M. (2008). *¡Viva la ciencia!* Barcelona: Crítica.
- Moore, J. (2005). Improving retention in calculus through student-centered learning. *Journal of Student Centered Learning*, 2(2), 97-101.
- Piaget, J. (1965). *Etudes sociologiques*. Genève: Droz.
- Piaget, J. (1976). Le possible, l'impossible et le nécessaire. *Archives de Psychologie*, 44, 281-299.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1955). *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Pijls, M., Dekker, R. y Van Hout Wolters, B. (2007). Reconstruction of a collaborative mathematical learning process. *Educational Studies in Mathematics*, 65(3), 309-329.

- Robertson, L., Davidson, N. y Dees, R. (1994). Cooperative learning to support thinking, reasoning, and communicating in mathematics. En S. Sharan (Ed.), *Handbook of Cooperative Learning Methods* (pp. 245-266). London, Greenwood Press.
- Robitaille, D.F. y Travers, K.J. (1992). International studies of achievement in mathematics. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Education* (pp. 687-709). New York: Macmillan Publishing Co.
- Rubel, L.H. (2006). M&M's, Rhinos, Cockroaches, and Cooperative Learning in Mathematics classrooms. *Mathematics Teacher*, 100(2), 152-156.
- Secada, W.G. (1992). Race, ethnicity, social class, language, and achievement in mathematics. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Education* (pp. 623-660). New York: Macmillan.
- Serrano, J.M. y González-Herrero, M.E. (1996). *Cooperar para aprender. ¿Cómo implementar el aprendizaje cooperativo en el aula?* Murcia: DM/PPU Eds.
- Serrano, J.M., González-Herrero, M.E. y Martínez-Artero, M.C. (1997). *Aprendizaje cooperativo en matemáticas. Un método de aprendizaje cooperativo-individualizado para la enseñanza de las matemáticas*. Murcia: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia.
- Serrano, J.M., González-Herrero, M.E. y Pons, R.M. (2008). *Aprendizaje cooperativo en matemáticas. Diseño de actividades en Educación Infantil, Primaria y Secundaria*. Murcia: Editum.
- Serrano, J.M. y Pons, R.M. (2008). La concepción constructivista de la instrucción. Hacia un replanteamiento del triángulo interactivo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 38, 681-712.
- Slavin, R.E. (1997). When does cooperative learning increase student achievement? En B.E. Reynolds, E. Dubinsky y D. Mathews (Eds.), *Readings in cooperative learning for undergraduate mathematics* (pp. 71-84). Washington: The Mathematical Association of America.
- Souvignier, E. y Kronenberg, J. (2007). Cooperative learning in third graders' Jigsaw groups for Mathematics and Science with and without questioning training. *British Journal of Educational Psychology*, 77(4), 755-771.
- Springer, L., Stanne, M.E. y Donovan, S.S. (1999). Effects of small-group learning on undergraduates in science, mathematics, engineering, and technology: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 69(1), 21-51.
- Staples, M. (2007). Supporting whole-class collaborative inquiry in a secondary mathematics classroom. *Cognition and Instruction*, 25(2/3), 161-217.
- Tarim y Akdeniz, (2008). The effects of cooperative learning on Turkish elementary students' mathematics achievement and attitude towards mathematics using TAI and STAD methods. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 77-91.
- Webb, N.M. (1989). Peer interaction and learning in small groups. *International Journal of Educational Research*, 13, 21-39.
- Webb, N.M. y Mastergeorge, A. (2003). Promoting effective helping behavior in peer-directed groups. *International Journal of Educational Development*, 39(1/2), 73-97.

(Artículo recibido: 30-7-2008; aceptado: 1-9-2008)