anales de psicología
2008, vol. 24, nº 2 (diciembre), 201-212

ISSN edición impresa: 0212-9728. ISSN edición web (www.um.es/analesps): 1695-2294

TEMA MONOGRÁFICO: Psicología de las matemáticas

Me sobran cuatro y no sé qué hacer con ellos. Un estudio sobre los problemas de división con resto en alumnos de 1º de ESO

Mª Oliva Lago*, Purificación Rodríguez, Ileana Enesco, Laura Jiménez y Cristina Dopico

Universidad Complutense de Madrid

Resumen: Los problemas de división con resto son especialmente complejos, como han mostrado numerosos estudios. El objetivo de esta investigación era establecer si las dificultades de los estudiantes procedían de una representación inicial inapropiada o de una interpretación inadecuada de las respuestas numéricas. También queríamos determinar si los tipos de resto se podían agrupar en dos bloques, dependiendo de que la respuesta correspondiese directamente a los términos de la división o no. Evaluamos 49 estudiantes de secundaria con una edad media de 12 años;10 meses. Los participantes resolvieron problemas de Grupos Iguales Partitivos y de Medida con cuatro Tipos de Resto: Resto-no-Divisible, Resto-Divisible, Resto-Resultado y Reajustar-Cociente-Incrementándolo-Parcialmente. Nuestros datos mostraron que: (a) la elección de la división como procedimiento de resolución fue muy elevada en ambos Modelos de División, aunque los problemas Partitivos fueron más fáciles que los de Medida; (b) el porcentaje de interpretaciones correctas fue superior a los encontrados en otras investigaciones; y (c) cuando la respuesta consistía en el cociente o el resto el éxito fue superior que cuando había que Reajustar-Cociente-Incrementándolo-Parcialmente. Para finalizar, la principal dificultad de los estudiantes al resolver estos problemas parece girar en torno a la representación inicial deficitaria del problema.
Palabras clave: Problemas de división con resto; división partitiva; división de medida; problemas de Grupos Iguales; tipos de resto.

Title: *I have four left and don't know what to do with them.* A study on division with remainder problems in 1st of ESO pupils.
Abstract: Division-With-Remainder problems are particularly complex as suggested in many works. The aim of the present research was to establish whether students' difficulties in these problems came from an inadequate initial representation or from an inadequate final interpretation of the numerical answers. We also wanted to determine whether types of remainders could be grouped into two blocks depending on whether the answer was directly matched to one of the terms of the division or not. To this end, we tested forty-nine secondary students with a mean age of 12 years and 10 months. The participants solved Partitive and Quotitive Equal-Groups problems involving four Types of Remainder: Remainder-Not-Divisible, Remainder-Divisible, Remainder-as-the-Result, and Readjusted-Quotient-by-Partial-Increments. Our data showed that: (a) although the selection of division as the resolution procedure was very high in both Models of Division, Partitive problems were easier than Quotitive ones; (b) the percentage of correct interpretations was higher than the percentages reported in other researches; and (c) success in problems whose answers were the quotient or the remainder was higher than in Readjusted-Quotient-by-Partial-Increments problems. To conclude, the main difficulty of students when solving Division-With-Remainder problems seems to be in the inadequate initial representation of the problem.
Key words: Division-with-remainder problems; partitive division; quotitive division; Equal Groups problems; types of remainder.

Introducción

En los últimos años ha habido una amplia publicidad de los resultados de los informes internacionales (p.e., PISA. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos, 2006), en los que se aprecia que el rendimiento de nuestros alumnos en la asignatura de matemáticas es inferior al de otros países. Indudablemente son múltiples los factores responsables de este resultado, entre los que cabe mencionar, por ejemplo, las diferentes actitudes hacia la educación, la presión social, la importancia que se le otorga en el curriculum y uno de los más importantes: *qué se entiende por aprender matemáticas*. En relación con este último, los movimientos de reforma de enseñanza de las matemáticas han enfatizado reiteradamente la necesidad de que los estudiantes adquieran habilidades y actitudes de razonamiento y de resolución de problemas matemáticos, así como la aplicación de tales destrezas a situaciones de la vida real (p.e., Anghileri, Beishuizen y Van Putten, 2002; Gravemeijer, 2001; *Nacional Council of Teachers of Mathematics* – NCTM—2000; Van den Heuvel-Panhuizen, 2005; Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerebergh, Bogaerts y Ratinckx, 1999). *Aprender matemáticas* implicaría algo más que dotar a los estudiantes de una colección de procedimientos para realizar cálculos, aprender matemáticas supondría *aprender modos de pensar*, lo que conllevaría crear entornos educativos que brinden a los alumnos la oportunidad de construir ideas, expresarlas con símbolos matemáticos, justificarlas al compartirlas con los demás y transferirlas a situaciones nuevas (ver, por ejemplo, Carpenter, Franke y Levy, 2003; De Corte, Verschaffel y Masui, 2004).

En estas evaluaciones a gran escala (dentro y entre países) se han empleado, entre otras cosas, problemas no rutinarios complejos que expresado en términos de Mayer (2003) son problemas para los que los alumnos "no conocen inmediatamente un procedimiento de solución" (p. 71). En otras palabras, mientras que los problemas rutinarios pueden ser representados directamente por una operación aritmética (p.e., Un autobús militar puede transportar 36 soldados. Si hay que trasladar a 1116 soldados al centro de entrenamiento, ¿cuántos autobuses se necesitan?, la respuesta es 1116 ÷ 36 = 31 autobuses), en los problemas no-rutinarios el resultado de la operación aritmética tiene que ser considerado como una aproximación o tiene que ajustarse, dependiendo de la situación descrita en el problema (p.e., Un autobús mi-

* **Dirección para correspondencia** [Correspondence address]: Mª Oliva Lago. Facultad de Psicología. Universidad Complutense de Madrid. Campus de Somosaguas, 28223 Madrid (España).
E-mail: oliva@psi.ucm.es

litar puede transportar 36 soldados. Si hay que trasladar a 1128 soldados al centro de entrenamiento, ¿cuántos autobuses se necesitan? La respuesta correcta no es 31.3 autobuses, sino 32 autobuses para poder trasladar también a los 12 soldados del resto). Los problemas no rutinarios han sido utilizados también para evaluar programas de mejora de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (por ejemplo, el CLIA de De Corte, Verschaffel y Masui, 2004) y para crear entornos de aprendizaje que fomenten el pensamiento y la resolución de problemas (ver, por ejemplo, Verschaffel *et al.*, 1999; Verschaffel, Greer y De Corte, 2000). Aunque en ambos casos y en líneas generales, los rendimientos de los alumnos han sido pobres, recientemente el modelo CLIA parece mostrar diferencias a favor de los grupos entrenados en resolución de problemas, comparados con los que no habían recibido entrenamiento.

Uno de los problemas habituales en todos estos estudios son los de división con resto, cuyos resultados han sido persistentemente pobres ya desde el año 1983 (Nacional Assessment of Educational Progress) en que se destacaron como particularmente complicados. En efecto, una peculiaridad de los problemas de división con resto, como el que aparece en el párrafo anterior, consiste en que si bien los estudiantes no tienen dificultades para establecer que la división es el procedimiento de resolución correcto, tienden a responder incorrectamente 31.3 autobuses porque no interpretan la respuesta numérica en términos de la situación del problema.

Además, los problemas de división con resto no sólo merecen ser estudiados por la dificultad que plantean a los estudiantes en numerosas evaluaciones, sino porque al tratarse de problemas complejos exigen poner en marcha un conjunto de procesos de resolución. En concreto, De Corte, Verschaffel y Masui (2004), próximos al planteamiento de Pólya (1952), diferencian los siguientes pasos: (1) construir una representación mental del problema, (2) decidir cómo resolverlo, (3) ejecutar los cálculos necesarios, (4) interpretar el resultado y formular una respuesta y (5) evaluar la solución. Estos pasos no son secuenciales, sino circulares, y aunque los procesos cognitivos se presentan ordenados, la resolución de problemas suele conllevar iteraciones (ver, por ejemplo, Mayer, 2003; Verschaffel, Greer y De Corte, 2000). Evidentemente, la resolución de cualquier problema aritmético conlleva la aplicación de esos mismos procesos, pero debido a las demandas escolares las respuestas correctas en los problemas rutinarios no implican necesariamente su aplicación, sino que pueden ser el resultado de una ejecución mecánica propiciada por la familiaridad. Es el caso, por ejemplo, de los problemas de adición de cambio (p.e., "Juan tiene 5 canicas y su amiga Beatriz le ha regalado 7 canicas más, ¿cuántas canicas tiene Juan ahora?"), que resultan muy sencillos para los niños. Sin embargo, cuando los problemas de adición se formulan en términos de comparación, aunque exigen la misma competencia de cálculo, los rendimientos son muy bajos (p.e., "Beatriz tiene 5 canicas y Juan tiene 7 canicas más que ella, ¿cuántas canicas tiene Juan?") (p.e., Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994; Carpenter y Moser, 1984; Lago y Rodríguez, 1999; Lago, Rodríguez, Dopico y Lozano, 2001). Esta disparidad se ha atribuido a que la resolución de problemas en el contexto escolar se ha relegado a una mera función de práctica de las operaciones aritméticas recién aprendidas. De modo similar, cuando los estudiantes resuelven problemas de división sin resto y con un número entero como resultado, el rendimiento suele ser elevado, pero no cuando tienen que elaborar la respuesta teniendo en cuenta si es o no posible extraer decimales o si es necesario incorporar el resto a la solución. En efecto, uno de los beneficios de los estudios sobre los problemas de división con resto es que han puesto de manifiesto las grandes lagunas de los estudiantes para poner adecuadamente en marcha el mencionado proceso de resolución de problemas aritméticos. Como señalan Treffers, Moor y Feijs (1989, citado por Gravemeijer, 1997) la interpretación del resto depende de la situación en que ha de usarse el resultado de la división. Añaden que una enseñanza formal del resto ajena a sus aplicaciones, no permitirá a los estudiantes acceder a las múltiples interpretaciones del mismo. Igualmente, no basta con que se familiaricen con las diferentes interpretaciones, sino que deben aprender a "afinar" la interpretación del resto de acuerdo con la situación del problema, pero ¿por qué no lo hacen?, ¿por qué ofrecen respuestas alejadas del mundo real?

Tratando de desentrañar las dificultades de los problemas de división con resto: algunas propuestas explicativas

La explicación no es sencilla, numerosos autores sugieren que el fracaso de los estudiantes procede del hecho de que no interpretan correctamente los resultados numéricos, ya sea porque: (a) no aplican el conocimiento cotidiano a la hora de interpretar la respuesta, (b) no ofrecen interpretación alguna del resultado y/o describen simplemente el procedimiento seguido para hallar la solución y (c) ignoran el nivel de realismo permitido en sus interpretaciones dentro del contexto escolar (ver, por ejemplo, Cai y Silver, 1995; Cooper, 1992; Cooper y Harries, 2002; English, 1998; English y Halford, 1995; Gravemeijer, 1997; Greer, 1993; Greer, Verschaffel y De Corte, 2002; Li y Silver, 2000; Palm, 2008; Schoenfeld, 1991; Silver, Mukhopadhyay y Gabriele, 1992; Silver, Shapiro y Deutsch, 1993).

Silver y colaboradores propusieron un modelo hipotético referido a la ejecución correcta e incorrecta de los estudiantes al resolver problemas de división con resto en los que la respuesta era el cociente incrementado, como ocurría en el ejemplo de los autobuses presentado anteriormente (p.e., Cai y Silver, 1995; Li y Silver, 2000; Silver *et al.*, 1993). Una de las asunciones básicas que subyacía tanto al modelo de éxito como al de fracaso era la representación inicial adecuada de los problemas, lo que posibilitaba la identificación de procedimientos algoritmos apropiados. No obstante, los estudiantes que se comportaban de acuerdo al modelo de éxito regresaban a la representación inicial de la historia o situación descrita en el enunciado del problema (ver, Kintsch, 1986) para interpretar la respuesta numérica, mientras que los estudiantes que fracasaban no volvían a dicha representación inicial de problema, lo que les impedía interpretar correctamente la respuesta numérica. En este planteamiento, el éxito sólo era posible tras la vuelta a la representación inicial de la historia o situación descrita en el enunciado del problema. Desde nuestro punto de vista, los estudiantes pueden encontrar los procedimientos de resolución correctos por múltiples rutas, que no implican necesariamente representaciones iniciales adecuadas de los problemas de división con resto. Expresado en otros términos, algunos estudiantes podrían construir representaciones iniciales del problema inadecuadas y/o incompletas a partir de aspectos superficiales del texto tales como el orden de las cantidades, palabras o expresiones clave o incluso a partir de la familiaridad del problema, sin que eso les impidiese llegar a la solución algorítmica apropiada. Estas estrategias superficiales (ver, por ejemplo, Lester, Garofalo y Kroll, 1989; Palm, 2008; Sarrazy, 2002; Verschaffel y De Corte, 1997; Verschaffel, Greer y De Corte, 2000) cuestionarían la asignación de una representación inicial subyacente siempre apropiada y ofrecerían una explicación alternativa de las interpretaciones inapropiadas o de la ausencia de interpretaciones de las respuestas numéricas. Esto es, las respuestas numéricas sin sentido podrían ser entendidas como el resultado de una representación inicial deficiente que determina la interpretación final inadecuada o la falta de interpretación y no como el resultado de que los estudiantes no vuelven a la representación inicial de la historia o situación descrita en el enunciado del problema. Asimismo, las respuestas de los estudiantes basadas en la selección de un algoritmo incorrecto, excluidas tanto del modelo de éxito como del de fracaso, pueden ser tenidas en cuenta dentro de esta aproximación. La incorporación de diferentes tipos de Situaciones de División (p.e., problemas de *Comparación*: "Luis ha leído 14 libros, casi 5 veces más libros que Ana. Cuando Ana termine el libro que está leyendo ¿cuántos libros habrá leído?") en el estudio de los problemas de división con resto nos ha permitido observar en un estudio anterior (Rodríguez, Lago, Hernández, Jiménez, Guerrero y Caballero, en prensa) que la elección de los procedimientos de resolución correctos no era ni tan automática ni tan correcta como se venía defendiendo en los trabajos basados en problemas de división con resto de *Grupos Iguales* (p.e., el problema anteriormente citado de los autobuses) (p.e., Cai y Silver, 1995; Li y Silver, 2000; Silver *et al.*, 1993). La representación inicial inadecuada de los problemas se puso de manifiesto en: (1) la ausencia de éxito al resolver los problemas de división con resto de Comparación, que ni siquiera fueron identificados como problemas de división, (2) el elevado porcentaje de interpretaciones basadas en la información superficial de los problemas y (3) en el alto porcentaje de participantes que mostraron dificultades con los decimales.

Estudios empíricos

En general, los estudios sobre los problemas de división con resto convergen en tres aspectos. En primer lugar, giran en torno al significado y el tamaño del resto, así como el contexto en que son resueltos los problemas (p.e., Cooper y Harries, 2002; DeFranco y Curcio, 1997; Silver *et al.*, 1992; Silver *et al.*, 1993; Treffers, Moor y Feijs, 1989). Por ejemplo, Silver *et al.* (1992) encontraron que los diferentes Tipos de Resto no entrañaban la misma dificultad. En concreto, estos autores plantearon a los participantes un único problema con varias preguntas referidas a distintos Tipos de Resto en un formato de elección múltiple. Los resultados indicaron que los estudiantes resolvían mejor la pregunta en la que había que contestar con el resto de la división ("El profesor de ciencias de la Marie Curie School ha recibido 730 ranas. Las ranas se introducirán en depósitos. En cada depósito caben 50 ranas. Si todos los depósitos están llenos de ranas, ¿cuántas ranas sobrarán?" p. 33), seguida en orden de dificultad creciente por la pregunta relativa al cociente (*i.e.*, ¿Cuántos depósitos se pueden llenar completamente con las ranas?" p. 33) y finalmente por aquella en la que se requería la modificación del cociente incrementándolo (*i.e.*, "¿Cuántos depósitos se necesitan para guardar todas las ranas?" p.33). Sin embargo, este orden de dificultad no era permanente sino que cambiaba dependiendo del orden de presentación de los distintos Tipos de Resto, en el sentido de que la ejecución mejoraba cuando cualquiera de estas preguntas iba precedida por las otras dos.

Asimismo, Silver *et al.* (1993) encontraron que el tamaño del resto no desempeñaba un papel importante en las interpretaciones de los estudiantes cuando tenían que resolver problemas cuya respuesta era el resto incrementado. Aunque en este estudio pidieron a los participantes explícitamente que interpretaran la respuesta numérica, sólo un tercio de ellos fueron capaces de hacerlo adecuadamente, el 9% dieron interpretaciones inadecuadas y más de la mitad omitía la interpretación.

Finalmente, Cooper y Harries (2002), DeFranco y Curcio (1997) y Palm (2008) observaron que el rendimiento de los alumnos mejoraba considerablemente cuando los problemas se enmarcaban en contextos de la vida real y no en contextos escolares, más restrictivos.

En segundo lugar, otro elemento común en los trabajos sobre los problemas de división con resto se refiere a que se formulan como problemas de *Grupos Iguales* (*i.e.*, se divide la cantidad total por el número de elementos que hay en cada grupo para hallar el número de grupos que se pueden formar), sin tener en cuenta otras situaciones de división como, por ejemplo, las de *Comparación* (*i.e.*, las relaciones entre dos cantidades se describen en términos de cuántas veces es mayor una que la otra) que son mucho más complicadas, hasta el punto de que los alumnos no se dan cuenta de que también se trata de un problema de división, como ya hemos mencionado anteriormente (ver, por ejemplo, Dopico, 2001;

Lago y Rodríguez, 1999, para una clasificación de los problemas de división).

En tercer y último lugar, emplean problemas de *medida* y tan solo en alguna ocasión problemas *partitivos* (p.e., Davis, 1989; Treffers *et al.*, 1989; Verschaffel y De Corte, 1997). En la división de medida se establece cuántas veces una cantidad dada está contenida en otra mayor (p.e., "Un autobús de la armada puede trasladar a 36 soldados. Si tenemos que trasladar 1128 soldados a su lugar de entrenamiento, ¿cuántos autobuses necesitamos?"). En la división partitiva, que se conoce comúnmente como la aproximación del reparto, se forma un número dado de grupos equivalentes para determinar el número de cada grupo (p.e., "1128 soldados tienen que ser trasladados a su lugar de entrenamiento, si hay 31 autobuses ¿cuántos soldados tendremos que meter en cada autobús para que puedan ser trasladados todos a la vez?"). Es decir, en los problemas de medida los estudiantes tienen que determinar el número de conjuntos equivalentes que se pueden formar, mientras que en los partitivos tienen que establecer el tamaño de los conjuntos equivalentes (ver, por ejemplo, Lago, Rodríguez, Zamora, y Madroño, 1999). Aunque la diferenciación de estos dos Modelos de División se considera útil para crear un marco analítico de investigación, ambos modelos deben converger en algún momento del proceso de enseñanza-aprendizaje para que los estudiantes apliquen esta habilidad a la división de fracciones, decimales, expresiones algebraicas (ver, por ejemplo, Moyer, 2000; Treffers, Moor y Feijs, 1989, citado por Gravemeijer, 1997). Desde nuestro punto de vista, si la enseñanza de la división hace hincapié únicamente en el modelo partitivo, y nunca o casi nunca en el de medida, cuando se introducen otras propiedades de la división, como la relación de divisibilidad en la que necesariamente se ha de aludir al modelo de medida, los estudiantes difícilmente entenderán que se trata de una propiedad de la división y procederán a almacenar estos conocimientos de forma separada sin establecer relaciones, dificultando el acceso a un concepto de división más amplio e integrado.

La información sobre la dificultad relativa de ambos Modelos de División es heterogénea: (a) algunos autores defienden que los problemas de medida son más sencillos (p.e., Sato, 1984, citado por Brown, 1992; Zweng, 1964); (b) otros encuentran que lo son los problemas partitivos (p.e., Correa, Nunes y Bryant, 1998; Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985; Neuman, 1999); (c) otros advierten que no existen diferencias entre ambos modelos de división, aunque sugieren que cualquiera de estos modelos se puede convertir en el más asequible para los niños dependiendo de las condiciones de las tareas (p.e., Brown, 1992; Squire y Bryant, 2002, 2003). En general, estos datos proceden de investigaciones con niños a los que aún no se les ha enseñado a dividir, de hecho, como destacan Lago, Rodríguez, Zamora y Madroño (1999), cuando ya han recibido instrucción formal sobre la división, los estudiantes de 12 y 13 años sentían preferencia por uno de los Modelos de División. En efecto, en una tarea de plantear problemas, optaron por enunciar problemas partitivos (92.6 % y 89.6% de los ensayos, respectivamente en cada edad), que eran los más comunes en los libros de texto y los que habían practicado con frecuencia en el aula.

En resumen, las investigaciones precedentes con participantes de un amplio rango de edad ponen de manifiesto que no existe consenso respecto a la secuencia evolutiva en la adquisición de los dos Modelos de División, ni en qué medida el sistema educativo ha de poner más énfasis en uno u otro, ni tampoco cómo han de ser secuenciados en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, sí parece existir un cierto consenso en que a partir de una determinada edad ambos modelos tienen que ser igual de asequibles a los estudiantes. Por ejemplo, Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985) establecieron que alrededor de los 14 ó 15 años el rendimiento en el modelo de medida se equiparaba al del modelo partitivo.

Objetivos y planteamiento de este estudio

El objetivo del presente estudio era doble. En primer lugar, establecer si los participantes podían resolver los diferentes problemas de división con resto con independencia del Modelo de División subyacente. En este trabajo planteamos que, al tratarse de problemas formulados en términos de *Grupos Iguales*, la resolución incorrecta no procederá: (a) de la incapacidad para interpretar las respuestas numéricas cuando explícitamente se les pedía que lo hiciesen, ni tampoco (b) de la selección y ejecución de un algoritmo inapropiado de resolución. Por tanto, la resolución incorrecta de los problemas puede tener su origen en una representación inicial inadecuada, basada en la aplicación de estrategias superficiales como la búsqueda de semejanzas con otros problemas que conocen mejor y en los que son expertos (*i.e.*, Grupos Iguales planteados en términos partitivos) y las expresiones clave. Este análisis superficial, no permitiría al alumno advertir las demandas del problema como sacar o no decimales, identificar si la respuesta era o no el cociente o finalmente, si se ha de incrementar o no el tamaño del cociente. De ahí que si el rendimiento de los estudiantes de 1º de ESO desciende en los problemas de Medida en contraste con los Partitivos y este descenso no se debe a diferencias en la selección del algoritmo de solución apropiado, ni tampoco a la cuantía de las interpretaciones realizadas, entonces se pondría en tela de juicio la explicación comúnmente aceptada de que los alumnos siempre construyen una representación inicial del problema adecuada que les permite seleccionar la división como procedimiento de resolución y que fracasan porque no interpretan la respuesta numérica. Desde nuestro punto de vista, el conocimiento del mundo real no sólo es necesario, de manera particular, para interpretar la respuesta numérica final, sino para dar sentido a todo el proceso de resolución del problema en general.

El segundo objetivo consistía en determinar el orden de dificultad de los Tipos de Resto. En concreto, hemos analizado cuatro tipos: (1) Resto No Divisible –RND- (un problema de "sólo-cociente" conforme a Silver y sus colaboradores), (2) Resto Divisible –RD- (incluimos problemas RD, que no habían sido previamente examinados en la literatura sobre los problemas de división con resto, para establecer si los participantes llevaban a cabo un uso diferencial de los decimales, puesto que estos problemas conllevan la posibilidad de realizar una división exacta mediante un cociente decimal), (3) el Resultado es el Resto –RR—(un problema de "sólo resto" de acuerdo con Silver y sus colaboradores) y (4) Reajustar el Cociente Incrementándolo Parcialmente –RCIP—(un problema de "cociente-incrementado" expresado en términos de Silver y sus colaboradores).

Silver y colaboradores establecieron el siguiente orden de dificultad: (1) RR, (2) RND y (3) RCIP, sin embargo, en este estudio hemos planteado que los problemas RND, RD y RR implicarán el mismo grado de dificultad, ya que son problemas inherentemente rutinarios (*i.e.*, las respuestas se encuentran en uno de los términos de la división). Por el contrario, la respuesta a los problemas RCIP no se encuentra en el cociente o el resto de la división, sino que procede de la integración de ambos o de la modificación del cociente con o sin decimales, siendo por tanto más difíciles. Además, los decimales plantean una dificultad añadida porque los estudiantes pueden asumir erróneamente que 31.3 autobuses es equivalente a 31 autobuses completos y 1/3 de otro, en vez de 31 autobuses completos y 3/10 de otro.

Método

Participantes

Participaron en esta investigación 49 alumnos de 1º de E.S.O., de un colegio de nivel sociocultural medio-alto. Veinticuatro participantes resolvieron Problemas de División con Resto Partitivos (M = 12;10 años, abarcando un rango de edad entre los 12;5 a los 13;4 años) y 25 estudiantes (M = 12;10 años, con un rango de edad comprendido entre los 12;5 y los 13;3 años) solucionaron Problemas de División con Resto de Medida.

Material y procedimiento

Las pruebas fueron administradas colectivamente por los investigadores durante las horas lectivas del centro.

El material consistía en dos cuadernillos de 6 páginas (la primera mostraba el ejemplo y las restantes dos problemas cada una), que se entregaron a los estudiantes de acuerdo con el grupo al que fueron asignados.

Los estudiantes disponían de una hora para resolver los problemas, en el orden que deseasen, y tenían la posibilidad de releer los enunciados y sus respuestas las veces que considerasen oportuno. Además, se instruyó a los participantes para que siempre interpretasen sus cálculos numéricos, evitando así que decidiesen no hacerlo por falta de información explícita al respecto. Para asegurarnos de que comprendían las instrucciones, al comienzo se les proporcionaba un ejemplo resuelto de un problema aritmético, ajeno a la división, para mostrar interpretaciones apropiadas e inapropiadas. En cada problema disponían de dos recuadros, uno para ejecutar los cálculos numéricos y otro para interpretar la respuesta numérica. Además, los diferentes Problemas de División con Resto se presentaron como problemas independientes y no como un único problema con múltiples preguntas relacionadas, como venía siendo habitual en las investigaciones precedentes. Sólo mediante este procedimiento se podía llegar a alcanzar los objetivos de este estudio, sobre todo en lo que se refiere a las dificultades de los estudiantes a la hora de construir una representación inicial adecuada de los problemas.

Los problemas diferían en cuanto al Modelo de División que implicaban (*i.e.*, Partitivo *vs.* Medida), pero tenían en común: (a) el Tipo de Situación de División (*i.e.*, problemas de Grupos Iguales) y (b) los cuatro Tipos de Resto: (1) Resto No Divisible (RND), (2) Resto Divisible (RD), (3) Respuesta Resto (RR) y (4) Reajustar el Cociente Incrementándolo Parcialmente (RCIP). Cada participante resolvió dos ensayos de cada tipo de problema, resultando un total de 10, dos de los cuales eran problemas de multiplicación que actuaban como distractores. La Tabla 1 recoge uno de los ensayos utilizados en cada uno de los Modelos de División, en los diferentes tipos de resto.

El orden de presentación de los problemas se determinó al azar y se mantuvo constante para todos los participantes.

En cuanto al tamaño de las cantidades, a pesar del nivel escolar de los estudiantes, hemos utilizado divisiones con dos dígitos en el dividendo y uno en el divisor con objeto de reducir las demandas de ejecución inherentes a los cálculos (p.e., 42÷8, 31÷2).

Finalmente, las respuestas se consideraron correctas sólo cuando los cómputos numéricos y las interpretaciones eran apropiados (sólo los problemas RCIP admiten más de una respuesta válida). Con respecto al cómputo numérico, la selección de la división se catalogaba como correcta si, además de resolverla sin errores, la presencia o no de decimales era pertinente a las demandas del problema. En concreto, cuando extraían decimales en los problemas RND, RR o RCIP, las respuestas fueron codificadas como incorrectas porque se pedía a los participantes que resolvieran problemas (en los que las cantidades tenían un determinado significado) y no algoritmos (con elementos meramente abstractos). De la misma manera, en los problemas RD, las repuestas fueron codificadas como incorrectas cuando no extraían decimales en la división. Por último, en aquellos ensayos en los que recurrían a procedimientos alternativos a la división, sólo fueron codificados como correctos cuando eran ejecutados sin errores.

Por lo que se refiere a las interpretaciones, se analizaron las respuestas de los estudiantes teniendo en cuenta las categorías establecidas en un trabajo previo (ver, Rodríguez *et al.*, en prensa): (1) interpretaciones centradas en el algoritmo, (2) interpretaciones centradas en el problema y (3) interpretaciones centradas en el algoritmo y en el problema. La primera categoría consistía en la descripción del algoritmo, probablemente debido a que consideraban el enunciado del problema como un mero soporte de las cantidades o de los términos imprescindibles para resolver el problema, y a que sobrevaloran la respuesta numérica como una respuesta inherentemente válida (p.e., "He dividido el número de alumnos entre el número de equipos"). Todas las interpretaciones de esta categoría fueron consideradas incorrectas.

Tabla 1: Ejemplos de los problemas presentados en cada Modelo de División según los Tipos de Resto.

	Problemas Partitivos	Problemas de Medida
RND	El abuelo de Juan ha regalado una caja con 26 globos a sus 6 nietos para que se los repartan de forma que todos tengan el mismo número de globos. ¿Cuántos globos le tocarán a cada uno de sus nietos?	Mi primo Pedro y su madre van a preparar zumo para su fiesta de cumpleaños. Han comprado 13 kilos de naranjas. Tienen varias botellas iguales y saben que para llenar cada una de ellas necesitan 3 kilos de naranjas. ¿Cuántas de esas botellas pueden llenar con los 13 kilos?
RD	En la pizzería de mi barrio han preparado 21 kilos de masa para hacer pizzas. Con toda la masa han hecho 6 pizzas de tamaño mediano. ¿Cuánta masa han utilizado para hacer cada una?	Un coche de carreras va a competir en una prueba de 31 kilómetros. Si con cada litro de gasolina puede recorrer 2 kilómetros, ¿cuántos litros de gasolina necesita para completar la carrera?
RR	Es la fiesta de mi colegio y los 35 alumnos de 2º de ESO han celebrado una olimpiada deportiva con 4 equipos. Si todos los equipos tienen el mismo número de alumnos, ¿cuántos equipos podrán tener suplentes?	En la tienda de golosinas de mi amiga Paula tenemos que embolsar 17 caramelos. En cada bolsa podemos meter por lo menos 5 caramelos. ¿En cuántas bolsas podremos meter un caramelo más?
RCIP	Este fin de semana vamos a ir 19 amigos a montar en las barcas del Retiro. Si solamente hay 4 barcas, ¿cuántos tendremos que subir a cada barca para montar todos a la vez?	Los 34 niños y niñas de 1º de ESO de mi colegio están en el Parque de Atracciones y tienen que hacer grupos para entrar. Si en cada grupo puede haber 6 niños como máximo, ¿cuántos grupos se tienen que formar?

Las interpretaciones centradas en el problema eran respuestas que hacían alusión a: (a) la información estructural del problema (p.e., "Se dividen los kilos con los que entran en cada una") y (b) aquellas que procedían del procesamiento superficial del enunciado lo que les lleva a omitir parte de la información (p.e., "He dividido los 17 caramelos que tenemos que embolsar entre los 5 caramelos que podemos meter por lo menos en cada una. 3,4 bolsas – el cociente-- que podemos meter un caramelo más"). En el primer caso las respuestas fueron codificadas como correctas y en el segundo como incorrectas.

Por último, las interpretaciones centradas en el algoritmo y en el problema establecían una conexión explícita entre la respuesta numérica y la información estructural del problema (p.e., "He dividido 13 entre 3 para ver cuántos grupos de 3 kilos hay en 13 kilos, y pueden llenar 4 botellas"). Estas interpretaciones siempre fueron codificadas como correctas.

Análisis y discusión de resultados

El ANOVA mixto 2 (Modelo de División: Partitivo *vs.* Medida) * 4 (Tipos de Resto: RND *vs.* RD *vs.* RR *vs.* RCIP), con medidas repetidas en el último factor, indicó que eran significativos los efectos principales de los factores Modelo de División ($F(1,47) = 15.503$, $p < .01$, $\eta_p^2 = 0.25$) y Tipos de Resto ($F(3,141) = 7.249$, $p < .01$, $\eta_p^2 = 0.134$) (ver Tabla 2). La interacción de estos dos factores no fue significativa.

Tabla 2: Medias y Desviaciones Típicas (entre paréntesis) de las respuestas correctas en los Modelos de División, según los Tipos de Resto.

	Partitivo	Medida
RD	1.63	1.20
	(0.58)	(0.82)
RR	1.71	1.08
	(0.55)	(0.91)
RND	1.63	1.20
	(0.65)	(0.87)
RCIP	1.33	0.52
	(0.82)	(0.65)

La puntuación máxima posible es 2.00

Por lo que respecta al Modelo de División, conforme a lo esperado, los participantes no mostraron dificultades para identificar la división como el procedimiento de resolución correcto, aunque los problemas planteados en términos Partitivos (M = 1.57, SD = 0.65) fueron globalmente más sencillos que los de Medida (M = 1, SD = 0.81) (ver Tablas 2 y 3). En general, este resultado coincide parcialmente con lo encontrado por otros autores (p.e., Cooper y Harris, 2003; English y Halford, 1995; Greer, Verschaffel y De Corte, 2002; Li y Silver, 2000; Silver *et al.*, 1993), en el sentido de que las dificultades de los participantes no radicaban en la elección del algoritmo de división. No obstante, en los problemas de Medida el rendimiento descendía debido, en primer lugar, al uso incorrecto de los decimales (32% de los ensayos, ver Tabla 3). Expresado en otros términos, extraían decimales en los problemas RND, RCIP, RR y no en los problemas RD. Estos errores no pueden explicarse por la naturaleza de las cantidades, ya que eran muy semejantes en ambos Modelos de División y, sin embargo, sólo influían negativamente en el rendimiento de los problemas de Medida. En concreto, el 52% de los participantes que resolvieron estos problemas mostraron dificultades con los decimales debido a: (1) una ejecución errónea consistente (*i.e.*, 40% de los participantes) porque siempre (*i.e.*, 24% de los niños) o nunca (*i.e.*, 16% de los niños) extraían decimales a lo largo de los ocho ensayos y (2) una ejecución errónea inconsistente (*i.e.*, 12% de los participantes), ya que en 3 ó 4 de los 8 ensayos extraían decimales donde no era indicado y no los extraían donde sí lo era. Además, estos comportamientos indicaban que los participantes que sistemáticamente extraían decimales podrían estar obteniendo falsos positivos en RD, mientras que los que no extraían decimales sistemáticamente podrían estar obteniendo falsos positivos en RND, RR y RCIP. Este tipo de dificultades con los decimales también se observó en el hecho de que el 20% de los estudiantes que resolvieron los problemas de Medida interpretaron, en alguna ocasión, explícitamente la parte decimal aunque sólo dos lo hicieron correctamente cuando equivalía a 0.5 (*i.e.*, hacían referencia a "*la mitad*" de otra unidad). Por ejemplo, en el problema RND que figura en la Tabla 1 un estudiante respondió: *"Podemos llenar 4 botellas y 1/3 de otra botella porque tenemos 13 kilos y necesito 3 para llenar una botella, me sobra 1 y lleno 4, entonces con el que me queda lleno 1/3 de otra botella"*, pero la respuesta correcta era 4 botellas y en todo caso 3/10 de otra. Del mismo modo, en el problema RCIP que también aparece reflejado en la Tabla 1, otro participante después de realizar la operación 34÷6 y obtener el resultado 5.6 ofreció la siguiente interpretación: *"Para hallar los grupos habría que dividir los niños entre los niños que caben en un grupo. Habría que formar 5 grupos* (*i.e.*, la parte entera del cociente) *y repartir 6 entre ellos* (*i.e.*, la parte decimal del cociente)".

Tabla 3: Porcentaje de ensayos de los cómputos numéricos y las interpretaciones correspondientes a los Modelos de División.

	Partitivo	Medida
RESPUESTAS NUMÉRICAS		
Dividen - correcto	84.4	57
Dividen - incorrecto	3.6	5
Dividen - incorrecto por los decimales	6.2	32
No dividen - correcto	3.2	2.5
No divide - incorrecto	2.6	3.5
INTERPRETACIONES		
Centrado en el algoritmo	3.1	1.5
Centrado en el problema - correcto	0.5	2.5
Centrado en el problema - incorrecto	14.1	39.5
Centrado en el algoritmo-problema	79.7	56.5
Otras incorrectas	2.6	----

En segundo lugar, los datos del Modelo de Medida pusieron de relieve que el 20% de los participantes, en los problemas RR, tendían a confundir el cociente y el resto de la división. Por ejemplo: "*He dividido los 17 caramelos entre los 5 para hallar en cuántas bolsas podemos meter un caramelo más, sólo en 3 bolsas* (*i.e.*, el cociente)". Este comportamiento no responde a una representación adecuada del problema, sino a una representación superficial que permitía a los estudiantes identificar la división como el procedimiento de resolución y una vez hecho esto, sólo quedaba responder con el elemento convencional, esto es, "el cociente". Sin embargo, con independencia del Modelo de División subyacente a los problemas, los participantes identificaban sin ningún género de dudas el cociente en el algoritmo y también el resto, aunque no siempre supieron responder con uno u otro dependiendo de las demandas de los problemas de medida. Además, a esta edad, los errores no son atribuibles al desconocimiento del significado o a la relación entre los términos de una división.

En cuanto a las interpretaciones de las respuestas numéricas, diversos autores han sugerido que las dificultades para responder correctamente a los problemas de división con resto procedían de que la mayoría de los participantes no interpretaban la respuesta numérica o daban interpretaciones sin sentido en el mundo real (p.e., Cai y Silver, 1995; Cooper, 1992; Greer, 1993; Silver *et al.*, 1993). Sin embargo, en el presente estudio todos los estudiantes explicaron la respuesta numérica y tan sólo en el 3.13% de los ensayos en el Modelo Partitivo y en el 1.5% en el Modelo de Medida eran respuestas en las que se limitaban a describir el algoritmo. Además, los datos obtenidos indicaron que el porcentaje de interpretaciones correctas en ambos Modelos de División fue elevado, especialmente en el Modelo Partitivo (*i.e.*, 80.21% *vs.* 59% de los ensayos, respectivamente para los problemas partitivos y de medida). Por ejemplo, en uno de los problemas RND del Modelo Partitivo (*i.e.*, "A mi clase han llegado 31 libros nuevos y hay 8 niños que quieren leerlos. El profesor de lengua les ha dicho que pueden llevárselos a casa, con la condición de que ningún niño se lleve más libros que sus compañeros. ¿Cuántos libros podrá llevarse cada niño a casa?") ningún participante respondió "*3.85 libros*". Los alumnos no extraían decimales sino que respondían apropiadamente, por ejemplo: *"Que cada uno se lleve 3 libros y que los que sobren se los lleven otros días o que los lea el profesor si es que le da tiempo"*. En la misma línea, el 83.3% de los estudiantes no extrajeron decimales en el otro ensayo del problema RND del Modelo Partitivo que figura en la Tabla 1, siendo su respuesta habitual: *"4 globos y sobran 2"*. Este resultado concordaba con los hallados por Rodríguez *et al.* (en prensa), Greer (1993), Reusser y Stebler (1997) y Palm (2008), pero no con los obtenidos por Verschaffel *et al.* (1994) y Yoshida, Verschaffel y De Corte (1997) (ver Tabla 4). Asimismo, en los problemas RCIP encontramos un elevado nivel de éxito en el Modelo Partitivo (66.7% de los ensayos) y lo atribuimos al hecho de que en nuestro país los estudiantes están más familiarizados con este modelo. Sin embargo, el porcentaje descendía notablemente en el Modelo de Medida (24% de los ensayos), situándose próximo a los porcentajes encontrados por Silver *et al.* (1993) y por Cai y Silver (1995), si bien en el caso de estos estudios los participantes estaban más familiarizados con el modelo de Medida (ver Tabla 4).

Tabla 4: Porcentaje de respuestas categorizadas como realistas en diferentes estudios en un problema RND partitivo y otro RCIP de medida.

	RND partitivo	RCIP medida
Reusser & Stebler (1997)	75	49
Verschaffel *et al.* (1994)	59	49
Yoshida *et al.* (1997)	52	62
Palm (2008)	67	63
Cai y Silver (1995)	---	20
Greer (1993)	85	63
Silver *et al.* (1993)	---	33.3
Rodríguez *et al.* (en prensa)	88	---
Lago *et al.*	83.3	24

En general, las interpretaciones inadecuadas proliferaron en el modelo de Medida, en especial, la que consistía en omitir parte de la información del enunciado (*i.e.*, 39.5% de los ensayos) (ver Tabla 3). Un ejemplo de este tipo de interpretaciones lo encontramos en el problema de Medida RD de la Tabla 1 en el que uno de los alumnos apuntó: *"He dividido los kilómetros que se dan entre los kilómetros que hace cada litro y los que me da son los litros de gasolina que necesita, pero en el resto le sobra un kilómetro"*. Esta respuesta era obviamente incorrecta porque al coche le faltaría gasolina para *completar* la carrera, tal y como se especifica en el enunciado del problema. En contraposición, en los problemas RD del Modelo Partitivo la representación inicial adecuada les permitía responder correctamente, por ejemplo, en el problema de la Tabla 1: *"Pues he dividido 21 Kg de masa entre las 6 pizzas que habían hecho. Si dividimos como lo he hecho yo nos dará 3'5 kg que es la porción de masa de cada pizza"*.

Las respuestas de los estudiantes también mostraron que la aplicación de procedimientos de resolución correctos solía ir acompañada de interpretaciones correctas y esto se puso claramente de manifiesto, tanto si consideramos el factor Modelo de División como los Tipos de Resto (ver Tablas 3 y 4). En concreto, encontramos interpretaciones correctas en el 75.52% de los ensayos correctos de división en el Modelo Partitivo y en el 58% de los ensayos correctos de división en el Modelo de Medida (ver Tabla 3). Por ejemplo, en el problema RCIP de Medida que aparece en la Tabla 1 uno de los participantes, después de dividir 34÷6 y obtener 5 de cociente y 4 de resto realizó la siguiente interpretación: "*He dividido los niños de la clase entre los que podían entrar en cada grupo de máximo y el resultado lo he sumado con 1* -- grupo -- *de los cuatro que me han dado de resto para que un grupo vaya con cuatro y los demás con 6*". También, a modo de ejemplo, uno de los estudiantes que resolvió los problemas partitivos indicó lo siguiente en el problema RCIP de la Tabla 1 después de dividir 19÷4 y obtener 4 de cociente y 3 de resto: "*He dividido los amigos entre las barcas y entran 4 niños en cada barca y sobran 3 entonces irán 5 niños en cada barca pero en una de ellas irán 4 personas*".

En resumen, hasta aquí los datos parecen indicar que los participantes de este estudio tenían un concepto de la división fundamentalmente Partitivo. Por ese motivo, cuando se enfrentaron a problemas de Medida el rendimiento descendió notablemente. En este caso, pueden haber suplido la falta de familiaridad con estos problemas llevando a cabo un análisis superficial del enunciado que los conducía a buscar semejanzas con otros problemas, probablemente los Partitivos. A pesar de que identificaban correctamente el algoritmo de resolución, la representación construida a partir de elementos superficiales no les ha permitido tener en cuenta aspectos esenciales de la información contenida en el enunciado, cometiendo errores tales como: (1) extraer indebidamente decimales en los problemas RND, RCIP y RR, y no en los problemas RD, con las consiguientes interpretaciones incorrectas del resultado numérico, (2) responder con el cociente en lugar del resto en los problemas RR y (3) ofrecer explicaciones incorrectas *centradas en el problema* en RCIP.

En cuanto al factor Tipos de Resto (ver Tabla 5), analizamos si el orden de dificultad de los Tipos de Resto se correspondía con el propuesto por Silver *et al.* (1992) (*i.e.*, (1) RR, (2) RND y (3) RCIP, respectivamente de menor a mayor dificultad) o el encontrado en Rodríguez *et al.* (en prensa; ver también Lago, Rodríguez, Hernández y Jiménez, 2005) (*i.e.*, (1) RD, RND, RR y (2) RCIP). El análisis de las comparaciones múltiples mostró que sólo había contrastes significativos entre RCIP ($M = 1.33$, $SD = 0.82$) y los otros Tipos de Resto ($M = 1.63$, $SD = 0.58$; $M = 1.71$, $SD = 0.55$ y $M = 1.63$, $SD = 0.65$, respectivamente en RD, RR y RND) ($p < .01$, en todos los casos). Este resultado pone de manifiesto que los problemas RD, RR y RND formaban un bloque claramente diferenciado de los problemas RCIP, coincidiendo con los resultados de Rodríguez *et al.* (en prensa). El hecho de que los problemas RND, RD y RR se identificasen fácilmente como problemas de división, que la respuesta fuese el cociente o el resto y que tuviesen el mismo grado de dificultad sugiere que se trata de problemas inherentemente rutinarios. Igualmente, estos resultados parecen indicar que los problemas RCIP, que los estudiantes también identificaron fácilmente como problemas de división, fueron "rutinizados". De acuerdo con Mayer (2003), aunque estos problemas pudieran tener demandas diferentes a las de un problema rutinario (*i.e.*, división exacta), si el alumno no las percibe como tales responderá a ellos como si se tratase de un problema rutinario. Por lo tanto, como defendían Rodríguez *et al.* (en prensa) parece más apropiado hablar de las dificultades de los problemas RCIP que de los problemas de división con resto en general.

Tabla 5: Porcentaje de ensayos de las respuestas numéricos y las interpretaciones en los diferentes Tipos de Resto.

	RD	RR	RND	RCIP
RESPUESTAS NUMÉRICAS				
Dividen - correcto	70.4	72.4	74.5	64.3
Dividen - incorrecto	3.1	2	5.1	7.1
Dividen – incorrecto por los decimales	22.4	13.3	20.4	21.4
No dividen - correcto	----	8.2	----	3
No dividen - incorrecto	4.1	4.1	----	4.1
INTERPRETACIONES				
Centrado en el algoritmo	3.1	3.1	2	1
Centrado en el problema - correcto	2	3.1	----	1
Centrado en el problema - incorrecto	24.5	18.4	22.4	42.9
Centrado en el algoritmo-problema	70.4	72.4	75.5	53.1
Otras incorrectas	----	3.1	----	2

También hemos aplicado la prueba de McNemar, empleando como criterio que la resolución e interpretación fueran acertadas en los dos ensayos para que la ejecución fuera codificada como correcta y los resultados indicaron que en ningún caso aparecían diferencias significativas entre la habilidad de los participantes para seleccionar y ejecutar un procedimiento de resolución apropiado y el éxito a la hora de interpretar la respuesta numérica (empleando la distribución binomial, $p = .5$, $p = .6$, $p = .7$ y $p = .06$, respectivamente para RD, RR, RND y RCIP). En suma, estos datos ponen de relieve que el principal obstáculo para resolver correctamente los problemas de división con resto no es la ausencia de interpretaciones o las interpretaciones erróneas como habitualmente se sostiene en la literatura sobre los problemas de este tipo.

Conclusiones

A menudo se ha argumentado que las dificultades de los niños en los problemas no-rutinarios, como los de división con resto, se deben a que ejecutan el algoritmo mecánicamente sin tener en cuenta las demandas del mundo real (p.e., Cooper y Harris, 2003; Inoué, 2005; Verschaffel, Greer y De Corte, 2000) y que este comportamiento puede provenir, por ejemplo, de ciertas creencias y hábitos sobre las matemáticas (p.e., lo importante es ejecutar los cálculos, sin recapacitar sobre el significado de los mismos en el mundo real) o su percepción de que la resolución de problemas ha de adaptarse a las demandas habituales del aula. Desde nuestro punto de vista, esta reflexión, válida para la mayoría de los problemas no rutinarios, necesitaría ser matizada en el caso de los problemas de división con resto. En efecto, los resultados de este trabajo ponen en tela de juicio la idea, generalmente aceptada, de que los niños construyen representaciones iniciales siempre adecuadas de los problemas de división con resto y que las dificultades radican en que las interpretaciones de la respuesta numérica carecen de sentido en el mundo real o, simplemente, en que no hay interpretación. Los participantes de esta investigación interpretaron siempre la respuesta numérica, siendo el porcentaje de interpretaciones correctas elevado (especialmente en los problemas partitivos) y la presencia de interpretaciones centradas en el algoritmo fue prácticamente nula, lo que indica que los alumnos no se limitaron a describir simplemente la operación realizada sino que hicieron un verdadero esfuerzo para justificar sus respuestas de acuerdo con el mundo real. El problema residió en que las representaciones iniciales del problema no siempre eran adecuadas, de ahí que sus interpretaciones no fueran correctas. Esto es, no tuvieron dificultades en la selección del algoritmo apropiado de resolución, independientemente de que los problemas fueran partitivos o de medida, pero en estos últimos el rendimiento descendió porque la representación inicial del problema se basó en la aplicación de una estrategia superficial del análisis del enunciado que bien pudiera consistir en buscar un problema análogo a otro conocido (*i.e.* partitivo). Aunque esta estrategia facilitó la identificación del algoritmo apropiado de resolución, les llevó a pasar por alto información muy relevante, como el hecho de que había que completar una carrera o que las botellas debían estar llenas y esto se tradujo, por ejemplo, en el uso indebido de los decimales. De acuerdo con esto, nuestra visión está próxima a la de los autores que consideran que el modo en que los estudiantes representan inicialmente el problema guía todo el proceso de resolución, incluyendo la interpretación (p.e., Carpenter *et al.*, 1999; Greer, 1993; Hegarty, Mayer y Monk, 1995; Mayer, 2003; Mayer y Wittrock, 1996; Nesher, 1992; Palm, 2008; Rodríguez *et al.*, en prensa). Expresado en otras palabras, una vez que resuelven el problema, interpretan el resultado en términos de su comprensión inicial y, sin un entrenamiento metacognitivo explícito, muy probablemente consideren redundante volver a las fases iniciales del proceso de resolución de problemas (p.e., leer de nuevo el problema) para explicar el resultado. Y aunque así lo hicieran eso no redundaría en una mejora del rendimiento, ya que leer y releer simplemente el problema no garantiza que comprendan la situación descrita en el problema, sino que por el contrario podrían confirmar una y otra vez sus planteamientos iniciales erróneos. En este sentido, diversos trabajos han puesto de relieve que los estudiantes no recuerdan directamente el texto del problema, sino que recuerdan el modelo del problema que han construido a partir de ese texto (ver, por ejemplo, Kintsch, 1986), lo que provoca la aparición de distorsiones cada vez mayores a medida que se incrementa su dificultad.

Como mencionamos en la introducción, la resolución de problemas conlleva la aplicación de una serie de pasos (*i.e.*, representación, planificación, ejecución, interpretación y evaluación de la respuesta) pero la enseñanza suele hacer hincapié en las fases de selección y ejecución del algoritmo, a pesar de que las dificultades de los alumnos, como hemos visto en este y otros muchos estudios (ver, por ejemplo, Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999; Carpenter, Franke y Levy, 2003; Kintsch, 1986; Mayer y Wittrock, 1996; Nesher, 1992; Rodríguez *et al.*, en revisión; Verschaffel, Greer y De Corte, 2000), surgen en la fase de comprensión y representación de la información descrita en el enunciado del problema y no en la de ejecución. De ahí que la estrategia más común entre nuestros alumnos consista en el análisis superficial del enunciado para determinar y ejecutar rápidamente el algoritmo de resolución.

Es importante ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de la necesidad de comprender y analizar la información del enunciado antes de seleccionar el procedimiento de resolución, así como la de establecer nexos entre el resultado numérico y la interpretación y evaluación del mismo. Sin lugar a dudas, eso requeriría diseñar nuevos entornos de enseñanza-aprendizaje en el aula. Y no sólo planteando situaciones más auténticas (ver, por ejemplo, Palm 2006) o realistas (p.e., Van den Heuvel-Panhuizen, 2005), sino sobre todo fomentando la reflexión y la creación de nuevos nexos entre los pasos del proceso de resolución de problemas. A modo de ejemplo, las tareas de *plantear problemas* capacitan a los alumnos para detenerse en los rasgos importantes de éstos, realizar abstracciones a partir de los que han resuelto previamente y concebirlos como organizados en clases relacionadas (ver, por ejemplo, Ellerton y Clarkson, 1996; Verschaffel *et al.*, 1999). Asimismo, estas tareas pueden ser graduadas en niveles de dificultad: se puede comenzar con situaciones estructuradas (p.e., se presenta un problema parcialmente completo que el estudiante ha de completar), siguiendo con las semi-estructuradas (p.e., dado un algoritmo construir un problema que se resuelva con el algoritmo dado) y terminar con la situación abierta (p.e., plantea un problema que sea difícil de resolver para un compañero). En suma, estas tareas podrían allanar a los alumnos la comprensión del significado de interpretar y verificar la respuesta numérica como algo más que asignarle una etiqueta (*i.e.*, "x *personas*", "y *globos*"), convirtiéndose en un elemento destacado a la hora de compartir y discutir, entre otras cosas, las ideas matemáticas con los otros.

De nuestro trabajo se desprende que parece más apropiado hablar de las dificultades de los RCPI que de los problemas de división con resto en general, ya que los problemas RD, RND y RR constituían un bloque y no parecían imponer más demandas a los alumnos que los problemas rutinarios. No obstante, todos ellos (*i.e.*, RD, RND, RR y RCIP) podrían ser empleados para ampliar la comprensión de los estudiantes, ya que son los que habitualmente alcanzan los porcentajes de éxito más elevados dentro de los problemas realistas (ver, por ejemplo, Greer, 1993; Reusser y Stebler, 1997; Verschaffel, De Corte y Borghart, 1997; Verschaffel, De Corte y Lasure, 1999; Yoshida *et al.*, 1997). En esta misma línea, Verschaffel *et al.* (1999) emplearon problemas RD, RND, RR y RCIP en la *lección* de su programa dedicada a la interpretación del resultado y formulación de la respuesta.

Desde el punto de vista educativo, queremos insistir en que los conceptos matemáticos tienen que ser percibidos como útiles en la vida real y que en las clases de matemáticas se ha de favorecer la comprensión y la reflexión. Esto no ha de traducirse obviamente en una búsqueda de problemas aritméticos idénticos a las situaciones reales como señala Palm (2006). Sería insensato pretender que todos los días en el aula se planteasen situaciones en las que los propios alumnos tuvieran que ser protagonistas directos (p.e., organizar los preparativos de una excursión, …). Creemos, como la mayoría de los autores, que las dificultades de nuestros alumnos tienen su origen en un sistema educativo que relega los problemas a una mera función de práctica de los algoritmos recién aprendidos, que en vez de desarrollar habilidades hace a los alumnos expertos en la resolución de un tipo determinado de problema (*i.e.*, problemas de Grupos Iguales de división partitiva) o que fomenta la creencia, por ejemplo, de que todo problema tiene una respuesta única correcta. Con respecto a esto último, resulta ilustrativo el estudio de Inoue (2005) en el que recoge distintas respuestas de los estudiantes al siguiente problema: "Tienes que llegar al aeropuerto internacional JFK a las 7 de la tarde para recoger a un amigo. A las 4 sales para el aeropuerto que está a 180 millas. Conduces a 60 millas por hora. Tu amigo te llama y te pregunta si vas a llegar a tiempo. ¿Qué le respondes?". Numerosos alumnos respondieron afirmativamente tras realizar la división, otros lo hicieron negativamente aludiendo a que las condiciones del tráfico podían impedir que el conductor mantuviera siempre la misma velocidad. Sin embargo, el dato más interesante fue que en la entrevista algunos estudiantes que habían respondido afirmativamente, justificaban la respuesta indicando que el conductor podía conocer rutas alternativas o que podía ser *domingo* y que entonces el tráfico era menor.

Para finalizar, volviendo a los datos del presente estudio, resulta desalentador que el rendimiento de los alumnos de ESO descienda cuando los problemas de división con resto se formulan con la estructura de Grupos Iguales (*i.e.*, la más familiar) en términos de medida; así como que no sepan identificar la división como algoritmo de resolución cuando se plantean en términos de Comparación, tal y como hemos hallado en un estudio anterior (Rodríguez *et al.*, en prensa). Queremos insistir de nuevo en que en la enseñanza de la división es importante que los alumnos tengan la oportunidad de ver múltiples ejemplos de división partitiva y de medida, porque ambas concepciones son necesarias para aplicarlas en la vida real y para comprender conceptos posteriores como la división de fracciones. Si los estudiantes tienen la oportunidad de practicar ambos tipos de división, aprenderán más rápidamente a reconocer esta operación en sus múltiples manifestaciones y a ver la división como una operación matemática única y sencilla. Del mismo modo, hemos de evitar que los alumnos se conviertan en expertos en la resolución de un único tipo de problema, presentando sistemáticamente en el aula problemas con distintas estructuras semánticas (p.e., Grupos Iguales, Comparación, Producto Cartesiano).

Referencias

Anghileri, J., Beishuizen, M. y Van Putten, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: Mind the gap! *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 149-170.

Bermejo, V., Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1994). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. *Cognitiva*, *2*(6), 159-174.

Brown, S. (1992). Second-grade children's understanding of the division process. *School Science and Mathematics, 92*(2), 92-95.

Cai, J. y Silver, E. A. (1995). Solution processes and interpretations of solutions in solving a division-with-remainder story problem: Do Chinese and U.S. students have similar difficulties?. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 491-497.

Carpenter, T.P., Franke, M.L. y Levy, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T.P. y Moser, J. (1984). The acquisition of addition and substraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*, 179-202.

Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M., Levi, L. y Empson, S. (1999). *Children's arithmetics. Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Cooper, B. (1992). Testing National Curriculum Mathematics: Some critical comments on the treatment of "real" context for mathematics. *The Curriculum Journal*, *3*, 231-243.

Cooper, B. y Harries, A.V. (2003). Children's use of realistic considerations in problem solving: Some English evidence. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 451-465.

Cooper, B. y Harries, T. (2002). Children's responses to contrasting "realistic" mathematics problems: Just how realistic are children ready to be?. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 1-23.

Correa, J., Nunes, T. y Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, *90*, 321–329.

Davis, R. B. (1989). The culture of mathematics and the culture of schools. *Journal of Mathematical Behavior*, *8*, 143-160.

De Corte, E., Verschaffel, L., y Masui, C. (2004). The CLIA-model: A framework for designing powerful learning environments for thinking and problem solving. *European Journal of Psychology of Education*, *XIX* (4), 365-384.

DeFranco, T. C. y Curcio, F. R. (1997). A division problem with a remainder embedded across two contexts: Children's solutions in restrictive versus real-world settings. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *19*, 58-72.

Dopico, C. (2001). *Adquisición y desarrollo del concepto de división en la educación primaria: sentencias numéricas y problemas verbales*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Ellerton, N. y Clarkson, P. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. En A. J. Bishop *et al.* (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 987-1034). Dordrecht: Kluwer.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 83-106.

English, L. D. y Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S. y Marino, M.S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 315-345). Hove, UK: Psychology Press.

Gravemeijer, K. (2001). Fostering a dialectic relation between theory and practice. En J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp. 147-161). Buckingham: Open University Press.

Greer, B. (1993). The modeling perspective on wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*, 239-250.

Greer, B., Verschaffel, L., y De Corte, E. (2002). "The answer is really 4.5": Beliefs about word problems. En G. C. Leder, E. Pehkonen, y G. Törner (Eds.), *A hidden variable in mathematics education?* (pp. 271-292). London: Kluwer Academic Pusblishers.

Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychologhy*, *87*, 18-32.

Inoue, N. (2005). The realistic reasons behind unrealistic solutions: the role of interpretive activity in word problem solving. *Learning and Instruction*, *15*, 69-83.

Kintsch, W. (1986). Learning from text. *Cognition and Instruction*, *3*, 87-108.

Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1999). Procesos psicológicos implicados en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la instrucción II* (pp.75-95). Madrid: Síntesis.

Lago, M.O., Rodríguez, P., Dopico, C. y Lozano, M.J. (2001). La reformulación de los enunciados del problema: un estudio sobre las variables que inciden en el éxito infantil en los problemas de comparación. *Suma*, *37*, 55-62.

Lago, M. O., Rodríguez, P., Hernández, M. L. y Jiménez, L. (2005). *Secondary pupils' understanding of DWR problems: Are semantic structure and model of the division important?* Poster presentado en la 9TH European Conference of Psychology. Granada, España.

Lago, M. O., Rodríguez, P., Zamora, A., y Madroño, L. (1999). Influencia de los modelos intuitivos en la comprensión de la multiplicación y la división. *Anuario de Psicología*, *30*, 71-89.

Lester, F., Garofalo, J. y Kroll, D. (1989). Self-Confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem solving behavior. En D. McLeod y V.Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 75-88). NY: Springer-Verlag.

Li, Y. y Silver, E. A. (2000). Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. *Journal of Mathematical Behavior*, *19*, 233-246.

Mayer, R. (2003). Mathematical problem solving. En J. Royer (Ed.), *Mathematical Cognition* (pp. 69-92). Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing.

Mayer, R. y Wittrock, M. (1996). Problem-solving transfer. En C. Berliner y R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 47-62). NY: Simon and Schuster Macmillan.

Moyer, P.S. (2000). A remainder of one: Exploring partitive division. *Teaching Children Mathematics*, *6* (8), 517.

Nacional Assessment of Educational Progress (1983). *The Third National Mathematics Assessment: Results trends and issues*. Denver, CO: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Neuman, G. (1999). Early learning and awareness of division: A phenomenographic approach. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 101-128.

Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. En G. Leindhardt, R. Putnam y R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp., 189-218). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Palm, T. (2006). Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, *26*(1), 42-47.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 37-58.

PISA. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (2006). *Revista de Educación*, *número extraordinario*.

Pólya, G. (1952). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Reusser, K. y Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. *Learning and Instruction*, *7*, 309-328.

Rodríguez, P., Lago, M.O., Hernández, L., Jiménez, L., Guerrero, S. y Caballero, S. (en prensa). How do types of division situations affect to division with remainder problems? Some Spanish evidence. *European Journal of Psychology of Education*.

Sarrazy, G. (2002). Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem-solving among pupils of 9-10 years. *European Journal of Psychology of Education*, *XVII (4)*, 321-341.

Schoenfeld, A. (1991). On mathematics as sense-making: an informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. En J. Voss, D. Perkins, y J. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education*. Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Silver, E. A., Mukhopadhyay, S., y Gabriele, A. J. (1992). Referential mappings and the solution of division story problems involving remainders. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *14*, 29-39.

Silver, E. A., Shapiro, L. J., y Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problem involving remainders: An examination of middle school students' solution processes and their interpretations of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 117-135.

Squire, S. y Bryant, P. (2002). From sharing to dividing: The development of children's understanding of division. *Developmental Science*, *5*, 452–466.

Squire, S. y Bryant, P. (2003). Children's models of division. *Cognitive Development 18*, 355–376.

Treffers, A., Moor, E., y Feijs, E. (1989). *Proeve van een national programma voor het reken-wiskundeonderwiss*. Tilburg: Zwijsen.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 2*(2), 2-9.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 69-97). Hove, UK: Psychology Press.

Verschaffel, L., De Corte, E., y Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school problems. *Learning and Instruction*, *7*, 339-359.

Verschaffel, L., De Corte, E., y Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction*, *4*, 273-294.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerebergh, G., Bogaerts, H. y Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(3), 195-229.

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Yoshida, H., Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction*, *7*(4), 329–338.

Zweng, M. J. (1964). Division problems and the concept of rate. *Arithmetic Teacher*, *11*, 547–556.

(Artículo recibido: 8-4-2008; aceptado: 15-5-2008)