

Acerca de la enseñanza de las matemáticas modernas: Un enfoque psicológico

*JOSE MANUEL SERRANO GONZALEZ-TEJERO
JULIO PEREZ LOPEZ
MARIA TERESA CALVO LLENA*

RESUMEN

El presente trabajo pretende dar una justificación psicológica de la enseñanza de la *matemática moderna* basándola en dos presupuestos fundamentales. En primer lugar por la imperiosa necesidad de adecuar las matemáticas a los progresos de la ciencia. En segundo lugar, por el hecho palpable de que las bases de estas matemáticas están más próximas que ninguna otra a las estructuras de pensamiento del sujeto.

SUMMARY

The aim of this paper is to provide a psychological justification to the *modern mathematics*' teaching, supported on two basic assumptions. First of all, because the need of adecuating the mathematics to the science's progress. Second, because the foundation of this mathematics are closer than any other one to the subject's thinking structures.

CIENCIA Y EDUCACION

«Todos nosotros cultivamos una orgullosa fantasía que dio comienzo unos cinco siglos antes de J.C. y que ha modelado el mundo: estoy hablando de la Ciencia». Este proceso dinámico descrito por Lichnerowicz¹ ha conducido a que, en la actualidad, nos encontremos inmersos en el seno de una crisis intelectual, de súbita, pero esperada, aparición, ligada a los progresos de la ciencia, que es el resultado directo de la adopción, por el hombre, de modos y métodos científicos (tanto de pensamiento como de acción) y que a tenor de sus consecuencias no tenemos más remedio que admitir su sintomático carácter de «mutación cultural» en el sentido y la dirección que marca esa parte básica —piedra angular— de nuestra actual cultura: *la ciencia*.

En efecto, aunque no seamos capaces de bosquejar con precisión qué modelo social surgirá como consecuencia de los cambios que esta crisis demanda (fundamentalmente, porque apenas han comenzado a efectuarse) sí que somos capaces de intuir con bastante claridad que, al cabo de muy pocas generaciones, la vida de nuestros semejantes será muy distinta a la nuestra, debido, principalmente, a que el hombre se ha dado cuenta de que la ciencia es un nuevo, potente y preciso instrumento de percepción y comprensión de las condiciones de su existencia.

Pero, como todo el mundo admite, los cambios provocados por la ciencia, han desbordado, con amplitud, la lenta y tardía evolución de los métodos y sistemas de enseñanza, estableciendo una barrera entre la primera y los últimos que se nos antoja infranqueable si no somos capaces de realizar un verdadero esfuerzo para conseguir que la educación se oriente hacia ese futuro inmediato, hacia ese mundo nuevo que está luchando por nacer y que, mejor o peor que el actual —¡quién lo sabe!—, es el que van a encontrar las generaciones venideras, por lo que, como magníficamente apunta Marshall Stone², «esta situación nos exige repensar todo nuestro sistema educativo, intentando buscar la verdad sobre nosotros mismos y sobre el mundo en que vivimos, a fin de poder incorporar esta verdad en lo que enseñamos y en la manera de enseñarlo».

Estos cambios no son pocos ni sencillos, pero la transformación es necesaria, puesto que como ya, en los albores de nuestro siglo, apuntaba A. Ferrière «el único medio de hacer progresar la práctica pedagógica es el de conformar su

1 Extraído del párrafo final de la *Comunicación a la Academia francesa de Ciencias* efectuada por A. Lichnerowicz el día 10 de enero de 1972.

2. STONE, M.: «The revolution in mathematics», en *Liberal Education*, The Bulletin of the Association of American Colleges, vol. XLVII, 1961, pp. 304-327 (p. 305).

acción al método científico, edificando una teoría justa basada en la experiencia práctica..., pero... ¿será preciso para ésto que transcurran diez, cien, mil años? Quien viva, verá»³. Pues bien, lo realmente cierto, es el hecho terrible de que ya hayan transcurrido más de setenta años desde que Ferrière se realizara esa pregunta y aún permanece sin respuesta concreta; aunque en honor a la justicia hemos de reconocer que la escuela, conocedora de sus limitaciones, trata, con todos los medios a su alcance, de corregir sus defectos y así hemos podido observar como, a partir de la aparición de una psicología sistematizada de la infancia, la pedagogía viene tratando de proporcionar una metodología coherente con el mundo real, intentando conseguir que los progresos de la ciencia puedan ser redescubiertos por los individuos más jóvenes de nuestra sociedad, y evitando, por tanto, que la escuela actual se convierta en un mero transmisor de saberes.

El problema que se plantea a posteriori⁴, es el de determinar, en función de los factores generales antes apuntados, qué conceptos deben ser objeto de descubrimiento o redescubrimiento en el ámbito escolar, o para ser más concretos, plantearémos claramente la pregunta en los términos que lo hace A. Markusievitch⁵, ¿cuáles son las materias que han de enseñarse en la escuela? Una vez obtenida una respuesta a estas cuestiones, deberíamos responder a un segundo grupo de preguntas que hacen referencia al cuándo y cómo hemos de plantear las tareas que conlleven a la reconstrucción o redescubrimiento de los conceptos previamente definidos. En el presente trabajo, haremos referencia, exclusivamente, a los conceptos matemáticos.

EL STATUS DE LAS MATEMÁTICAS EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

Podríamos preguntarnos, en primer lugar, por qué las matemáticas han venido ocupando un lugar preeminente, durante dos milenios y medio, en la educación, incluso en la más pura educación humanística. En segundo lugar, la pregunta a la que habríamos de responder es a la de si deben seguir ocupando este lugar de privilegio y por qué.

Algunos autores, como Lichnerowicz, Lehmann, etc., otorgan a la primera pregunta una contestación que se suele expresar en términos de prestigio y/o

³ FERRIERE, A.: *Transformemos la escuela*, Publicaciones de la Fraternidad Internacional de Educación, Barcelona, 1929, pp. 28 y 191.

⁴ Algunos verán un *a priori* donde nosotros vemos un *a posteriori*.

⁵ MARKUSIEVITCH, A.: «Certains problèmes de l'enseignement des mathématiques a l'école», en *Educational Studies in Mathematics*, 1979, pp. 279-289.

elitismo ⁶. En efecto, de una parte, las matemáticas han estado revestidas, a lo largo de la historia y desde los comienzos, de un halo de prestigio que era manifestado por la gente profana en la materia (y alguna no tan profana) con expresiones tales como: «En matemáticas no hay término medio, o se sabe o no se sabe», «Las matemáticas son una cosa 'seria'», etc. Por otra parte, las matemáticas (y en épocas pasadas, también el latín) daban un status que permitía el establecimiento de una clasificación dicotómica entre los individuos, a saber:

- a) Ciudadanos de primera clase que son los que valen para las matemáticas y constituyen una élite que monopoliza el poder porque tiene acceso al saber científico, y
- b) Ciudadanos de segunda clase que serían un rebaño de ilotas condenados a no entender nunca nada y que, por no dominar la lengua del mundo que les ha tocado vivir, tendrían que contentarse con seguir a los primeros.

Este carácter autoritario y dictatorial de la matemática (a pesar de no estar de acuerdo con esta postura hemos tenido que hablar alguna vez de «la dictadura de las matemáticas») ha sido descrito, muy especialmente, por P. Samuel ⁷ que admitiendo tácitamente que la educación está al servicio del poder, justifica el mantenimiento secular de las matemáticas en los planes de estudios «por ser de gran utilidad para los dirigentes» (discurso racional y no retórico); permitir de forma muy especial la «abstracción» (manteniendo perfectamente las distancias entre dirigentes y dirigidos); objetivizar «aparentemente la selección» de los individuos (el que vale, vale, puesto que las matemáticas son eminentemente objetivas) y, finalmente, por su carácter *disciplinante*. De igual forma, Samuel atribuye a las matemáticas un valor primordial como «instrumento de despersonalización» al servicio de las clases dirigentes, ya que no les puede atribuir otro valor al carecer de «aplicación inmediata».

Nosotros no podemos estar de acuerdo con estos planteamientos y nuestra opinión, que es bastante más moderada, busca justificaciones que se encuentren más en consonancia con el *plano racional* que con el *plano político*.

En primer lugar, porque a pesar de su carácter formal, la mayor parte de los hallazgos realizados en esta disciplina han tenido enorme importancia en el

⁶ Véase, por ejemplo, la conferencia pronunciada el 22-II-72 en La Sorbona por D. Lehman, director del I.R.E.M. de Lille, y que bajo el título de «Matemática y dogmática» viene recogida, íntegramente, en la compilación efectuada por Jesús Hernández y publicada por Alianza Editorial (AU) con el título de *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Madrid, 1978.

⁷ SAMUEL, P.: «Mathématiques, latin et sélection des élites», en R. Jaulin (ed.), *Pourquoi la mathématique?*, París, U.G.E., 10-18, 1974, pp. 147-171.

desarrollo de las ciencias fácticas (Física, Astronomía, Psicología, etc.) y, por lo tanto, no podemos estar de acuerdo con el carácter de no aplicabilidad. Más aún y aunque parezca paradójico, precisamente en el momento en que las matemáticas han llegado a su mayor nivel de abstracción, sus aplicaciones se han multiplicado con una proliferación realmente impresionante, de tal forma que una de las características más notables de la vida intelectual de nuestro siglo es la penetración de las matemáticas en una cantidad cada vez mayor de disciplinas científicas que incluyen, no sólo las ciencias naturales, sino también las ciencias de la conducta. La justificación de esta seudoparadoja viene determinada por el hecho de que al liberarse las matemáticas de las ataduras que las ligaban en el pasado a determinados aspectos particulares de la realidad, se han convertido en un poderoso instrumento (al hacerse más flexibles) que permite abrir nuevos caminos en zonas que han permanecido hasta ahora fuera del alcance de nuestra razón. Esto nos hace suponer que caminamos hacia una *teorización matemática*, cada vez más compleja, de todas las partes de la ciencia y que se debe, fundamentalmente, a la necesidad de formalización de las ciencias fácticas, es decir, de la tendencia general de las ciencias a expresar sus conceptos matemáticamente. En efecto, la formulación matemática de las ideas científicas presenta una doble ventaja, sobre todo si se compara con una formulación verbal: por una parte, porque obliga a los inventores a clarificar más sus conceptos y perfilar mejor sus hipótesis y, por otra, porque estas hipótesis son susceptibles de una mejor comprobación experimental cuando son expresadas en términos matemáticos. Opiniones autorizadas de distintos investigadores así lo atestiguan y, por ejemplo, S.S. Stevens⁸ dice que «la importancia de una ciencia es medida comúnmente por el grado según el cual hace uso de las matemáticas»; R.C. Atkinson, G.H. Bower y E.J. Crothers⁹ se expresan en términos similares cuando dicen que «es un hecho histórico familiar que a medida que la ciencia progresa, sus teorías se van haciendo más y más matemáticas en la forma» o, y para concluir, J. Amon que dice que «por regla general, las ciencias se han mantenido a un nivel meramente cualitativo en su infancia y han ido ascendiendo a niveles superiores cuantitativos al ir alcanzando su edad adulta»¹⁰.

En segundo lugar, nuestro desacuerdo estriba en un hecho que se suele tener poco en cuenta a la hora de determinar el status de las matemáticas en los planes de estudios, pero que es altamente clarificador: que el propio pensamiento está

8 STEVENS, S. S.: «Mathematics, Measurement and Psychophysics», en S. S. Stevens (ed.), *Handbook of Experimental Psychology*, pp. 1-49, John Wiley, New York, 1951 (p. 1).

9 ATKINSON, R. C.; BOWER, G. H., y CROTHERS, E. J.: *An Introduction to Mathematical Learning Theory*, John Wiley, New York, 1965 (p. 2).

10 AMON, J.: *Estadística para psicólogos. Volumen 1: Estadística descriptiva*, Editorial Pirámide, Madrid, 1978 (p. 19).

sujeto a leyes que pueden ser formuladas en términos lógico-matemáticos (grupo de los desplazamientos, agrupamientos de clases y relaciones, grupo de las cuatro transformaciones —INRC—, etc.)¹¹, puesto que como dice Jean Piaget en un bonito juego de palabras «es difícil admitir que la razón misma evolucione sin razón y que la razón de la evolución de la razón pueda ser otra cosa que racional»¹².

Por último, y como ya hemos apuntado con anterioridad, aunque estemos de acuerdo, al menos de alguna forma con el posible carácter dictatorial de esta disciplina, hemos de hacer la salvedad de que parte de este «autoritarismo» no corresponde exclusivamente a las matemáticas y que hemos de otorgar la parte que le corresponde a la organización general de la enseñanza.

A tenor de todo lo expuesto, creemos que es incuestionable el hecho de que las matemáticas no sólo mantienen su status, sino que escalan peldaños en el curriculum escolar, siendo muy sintomático el hecho de que el número de matemáticos en activo, medido en término de publicaciones, esté creciendo en los últimos años a un ritmo vertiginoso, por lo que no sería exagerado decir que «ante nosotros se abre todo un mundo nuevo de pensamiento cuya única llave son las matemáticas»¹³.

EL PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA EDUCACION MATEMATICA: LA RENOVACION DE LOS PROGRAMAS

Las matemáticas no pretenden, por tanto, ocupar una posición distinta a la que han venido ocupando hasta ahora, entre otras razones porque siempre han tenido un puesto de honor, lo que realmente se pretende en la actualidad es modificar su situación en la enseñanza de acuerdo con la importancia que han alcanzado en la vida intelectual de nuestros días. Desde este punto de vista, el problema fundamental que se plantea es el de:

A) *Por un lado*, delimitar un nuevo núcleo de la enseñanza matemática que incluya las ideas básicas y las técnicas más importantes de las matemáticas modernas, pues no olvidemos que si el status de las matemáticas viene determi-

¹¹ Confróntese, por citar alguna obra y a título de ejemplo, *Essai de logique opératoire*, de J. PIAGET, Dunod, París, 1971.

¹² PIAGET, J., y BETH, E. W.: *Epistemología matemática y psicología. Una indagación sobre las relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*, Ed. Crítica, Barcelona, 1980 (p. 218).

¹³ STONE, M.: obra citada en n. 2 (p. 312).

nado por el hecho concreto de servir de soporte formal a la tecnología y a la ciencia, la revolución científica y tecnológica debe conllevar una revolución de las ideas matemáticas, de tal forma, que las matemáticas de hoy sean útiles para los ingenieros, arquitectos, programadores, etc. del mañana, ya que, como parece obvio, los usuarios de los programas de matemáticas hoy, aplicarán intensamente sus contenidos algunos años después y, en este sentido, las matemáticas deben marchar por delante de la ciencia, y,

b) *Por otro*, organizar la enseñanza de las matemáticas y conceptos de ese núcleo fundamental, en un programa bien concebido, para lo cual deberá tener en cuenta las aportaciones que la psicología genética y las teorías sobre la formación de conceptos han realizado sobre el tema.

Esto ha supuesto un intento de renovación en los contenidos de las matemáticas y en su forma de llevarlas a la escuela, habiéndose podido observar que «de entre todas las disciplinas incluidas en los planes de estudios... han sido las matemáticas las que han visto modificados sus programas de manera más radical y espectacular durante los últimos años»¹⁴ y todo ello con el fin de encontrar una solución a las tensiones que, durante el presente siglo, ha venido provocando la confrontación entre una enseñanza casi petrificada de las matemáticas y unas ciencias en desarrollo —matemáticas incluidas— que utilizan nuevas, potentes y tecnificadas herramientas de trabajo. Pensemos que «ningún periodo de la historia ha contemplado una actividad matemática tan intensa y fructífera como la de la primera mitad de este siglo»¹⁵, lo que ha conducido a que «se hayan resuelto más problemas fundamentales en matemáticas desde 1940 hasta nuestros días que desde Tales de Mileto hasta 1940»¹⁶.

Parece existir una cierta coincidencia entre los distintos autores en fijar, un tanto convencionalmente, como fecha clave en el comienzo de esta renovación o reforma de los programas la del año de 1957 y M. Kline¹⁷, por ejemplo, otorga al lanzamiento por los soviéticos del primer «Sputnik» una importancia considerable en este sentido, ya que la puesta en órbita del satélite suscitó en los americanos un cierto miedo a quedarse rezagados en la carrera espacial, lo que sirvió de estímulo para el desarrollo de nuevos programas de matemáticas.

Estos nuevos programas o programas renovados han sido muchos y varia-

14 HERNANDEZ, J.: «Introducción», en *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid, 1978, pp. 13-55 (p. 13).

15 STONE, M.: obra citada en la nota 2 (p. 312).

16 Citado por J. HERNANDEZ en la Introducción de la obra citada en la nota N.º 14 (p. 16).

17 KLINE, M.: *Why Johnny Can't add: The Failure of the New Math*, New York, St. Martin's Press, 1973.

dos, puesto que como dice Rolf Nevanlinna¹⁸ «no es muy difícil hacer programas para la enseñanza en las escuelas» lo realmente difícil es «llevarlos a la práctica». De hecho, hemos podido constatar personalmente que existen varias formas de enseñar bien los conceptos, aunque como contrapartida existen bastantes más de enseñarlos mal y, lo que es peor, muchas más de enseñarlos de forma aburrida. Pues bien, una gran parte de los programas renovados de la enseñanza de las matemáticas que hemos podido analizar son coherentes tanto desde el punto de vista matemático (relativo a los conceptos que se pretenden instaurar) como psicológico (relativo al sujeto que los ha de asimilar), pero a la hora de constatar resultados empíricos observamos que éstos son escasos y de nula rentabilidad y una reforma que se justifica teóricamente por sí sola, debía de producir resultados inmediatos. Entonces, ¿dónde está el problema?

MATEMATICAS MODERNAS

Previamente habría que preguntarse ¿qué es lo que se renueva?:

- ¿la organización de los programas?
- ¿la terminología?
- ¿los métodos pedagógicos?
- ¿las ideas matemáticas?

o quizás

- ¿las propias matemáticas?

Pues bien, lo que se renueva es todo, absolutamente todo, debido a que todas estas cuestiones están inextricablemente unidas unas a otras y la modernización de las matemáticas afecta, no sólo a los programas y a sus contenidos sino, y lo que es más importante, a su forma de desarrollarlos. Por ésto, y contestando a una pregunta que el eminente matemático holandés Hans Freudenthal se realizara al comienzo de los años sesenta¹⁹ sobre si lo procedente era una enseñanza de las matemáticas modernas o una enseñanza moderna de las matemáticas, creemos que la respuesta a su cuestión y la solución al problema de la didáctica

¹⁸ NEVANLINNA, R.: «Reform in teaching mathematics», en *American Mathematical Monthly*, 1961, pp. 451-464 (p. 464).

¹⁹ FREUDENTHAL, H.: «Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?», en *L'Enseignement Mathématique*, 9, 1963, pp. 28-44.

en matemáticas pasa por *una enseñanza moderna de las matemáticas modernas*.

En efecto, la enseñanza de las matemáticas se fundamenta en dos premisas o condiciones necesarias, pero no suficientes:

1. Una teoría matemática lógicamente consistente, y
2. Una didáctica sobre la que se apoye esa teoría.

La didáctica tradicional era bastante consecuente con respecto a las matemáticas para las que fue creada, pero a lo largo de los años, y muy especialmente en los últimos veinte, han ido introduciéndose nuevos temas y conceptos en la enseñanza sin que los principios didácticos se fueran adecuando a ellos, y esto ha venido originando «la pavorosa degradación de la enseñanza de las matemáticas que estamos presenciando» en la actualidad ²⁰.

Nos encontramos así ante una renovación inútil. Se han realizado múltiples innovaciones en los programas de matemáticas que parecen desembocar en un callejón sin salida, porque la mayor parte de éstos ponen en evidencia un desprecio casi olímpico por los problemas didácticos, y aun en los pocos casos en que no es así, es siempre la didáctica de la enseñanza tradicional la que domina. Este problema ha sido, por fin, asumido por la C.I.E.M. ²¹ que a partir del congreso de Edimburgo, pero muy especialmente, cuatro años después, en el de Estocolmo, recomendó, con explícita claridad, la realización de investigaciones marcadamente didácticas. Nuestro primer y primordial paso será, por tanto, demostrar que la didáctica tradicional es incompatible con la esencia de lo que se ha venido en llamar matemáticas modernas, para lo cual trataremos de situar en el plano de lo concreto lo que nosotros entendemos por *matemáticas modernas*.

Aunque parecen existir diferentes sentidos en el uso del adjetivo «modernas» aplicado al sustantivo «matemáticas», podríamos tomar como versión más aceptada aquella que denomina matemáticas modernas (o matemática moderna) a un periodo de la historia de las matemáticas que, llegando hasta nuestros días, no tiene un origen demasiado claro pero que no se situaría nunca antes de Niels Henrik Abel (1802–1829); Agustín Louis barón de Cauchy (1789–1857); Karl Fiedrich Gauss (1777–1855) y Evaristo Galois (1811–1832). Con respecto a cuándo comenzó a utilizarse por primera vez el adjetivo, no parece existir una gran unanimidad entre los autores, y así, por ejemplo, nuestro eminente matemático Pedro Abellans ²² atribuye a Pasch la utilización de un adjetivo que hace

²⁰ FREUDENTHAL, H.: *ibid.*, p. 29.

²¹ «Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas».

²² ABELLANS, P.: «La matemática moderna en la enseñanza», en *Conceptos de Matemáticas*, N.º 31, 1974, pp. 27-32.

referencia a la idea de modernización en su obra «Vorlesungen über neue Geometrie» (Leipzig, 1882); Félix Klein, en su Programa de Erlangen (1872) utiliza la expresión «álgebra moderna»; Galois, un año antes de su muerte, escribe textualmente: «...cualquier progreso por ese camino se habría hecho imposible sin la elegancia que los 'geómetras modernos' han dado a su trabajo...»; Guérard des Lauriers²³ afirma que el adjetivo moderno fue introducido por primera vez en la obra en dos volúmenes de B.L. van der Waerden, «Moderne Algebra» (Berlín, Springer, 1930-31) y así podríamos encontrar otras opiniones sobre el origen y la paternidad del epíteto «moderno» que recaerían en Christian Huygens (1629–1695), Karl Gustav Jakob Jacobi (1804–1851), Blaise Pascal (1623–1662), etc. De cualquiera de las maneras no encontraremos un uso del término moderno en matemáticas antes del último tercio del siglo XVII, de ahí que algunos autores, como por ejemplo, William Schaaf²⁴, apliquen, al menos en algún sentido, el uso del término a un periodo de la historia de las matemáticas que comienza, prácticamente, con Isaac Newton (1642–1727) o, a lo sumo, con René Descartes (1596–1650).

Este período de las matemáticas, adjetivado como moderno, se distingue por:

a) una *mayor atención al rigor lógico* lo que conlleva, por ejemplo, ideas tales como términos no definidos, equivalencia lógica, recíproca, contraria, y contrarrecíproca de una proposición dada, insistencia explícita sobre el papel de las definiciones y de las hipótesis, condiciones de validez y verdad, diversos tipos de demostraciones formales, como por ejemplo, la de la multiplicación de los números negativos, significado de la implicación, etc.;

b) el *uso de un vocabulario distinto, se podría decir contemporáneo* que nos permite hablar de proposiciones abiertas, valores de verdad, dominio, rango, semirrectas, rayos, subconjuntos propios e impropios, anillo de integridad, etc.;

c) una *insistencia explícita sobre la precisión del lenguaje* que da lugar a distinciones muy sutiles y a definiciones formales que obligan a establecer diferencias entre números y numerales, raíces de una ecuación y conjunto de soluciones, funciones y relaciones, fracciones y números racionales, incógnitas y variables etc.;

d) una *modificación sustancial en las bases que sustentan los conceptos matemáticos* lo que altera profundamente su sistema de enseñanza y así, la suma

²³ GUERARD DES LAURIERS, M. L.: «La mathématique, les mathématiques, la mathématique moderne», París, Doin, 1972.

²⁴ SCHAAF, W. L.: «How modern is modern mathematics?», en *The Mathematics Teacher*, N.º 57, 1964, pp. 89-97.

aritmética se construye sobre la unión de conjuntos disjuntos, el algoritmo vertical clásico de la multiplicación es sustituido por un algoritmo de red, basado en el producto cartesiano, etc.;

e) una *mayor insistencia en las ideas abstractas, junto con la aparición de otras nuevas* como la noción de clausura, la de densidad del conjunto Q en R , la aritmética modular y la axiomática y la teoría de conjuntos, siendo estos dos últimos aspectos los más sobresalientes y destacados, sobre todo, a la hora de la elaboración de los programas. Nos detendremos un poco más en estos dos puntos, aunque volveremos a abordarlos posteriormente.

La axiomática es un método que parte de unos principios o proposiciones indemostrables (axiomas) que sirven de base a proposiciones posteriores sobre las que se fundamenta una ciencia. Parece ser que fue Herman von Helmholtz (1821–1894) el primero en utilizar la palabra axioma, pero fue David Hilbert (1862-1943) el que desarrolló lo que sería el primer gran ejemplo de axiomática moderna en su obra «Fundamentos de la Geometría».

Como cualquier método, el método axiomático ha tenido duros detractores, fundamentalmente, a partir de los resultados obtenidos por Godel con relación a la formalización, de ahí que, respecto a la concepción del rigor matemático, se observan tres actitudes posibles:

1. *La concepción formalista o axiomática* para la que una proposición es verdadera si puede ser deducida a partir de los axiomas del sistema formalizado al que pertenece, mediante un número finito de operaciones válidas en él.
2. *La concepción realista o platónica* para la que una proposición es verdadera cuando expresa una relación efectivamente existente entre las ideas.
3. *La concepción empirista o sociológica* para la que una demostración es considerada como rigurosa si los mejores especialistas en la materia no tienen nada que objetar.

Pero independientemente de la postura que se adopte, hay que reconocer que el «método axiomático de pensamiento» ha ejercido una influencia decisiva en los trabajos sobre los fundamentos de las matemáticas, ha marcado la expansión de las matemáticas contemporáneas y ha impregnado, desde principios de siglo, todas las ramas de las matemáticas, otorgándoles un carácter que, desbordando los límites de lo que se ha dado en llamar matemáticas puras, les ha permitido ocupar un lugar de privilegio en las disciplinas más diversas. Así, por ejemplo, los trabajos sobre el álgebra abstracta han permitido enormes progresos en física atómica, la axiomatización hilbertiana de la geometría condujo a la interpretación monumental del universo de Einstein-

Minkowski²⁵, la teoría clásica de Newton podría ser considerada, a la luz de esta posterior axiomatización, como una geometría de cuatro dimensiones con una métrica semidefinida, etc.

A pesar de ésto (o precisamente por ésto), es posible que el método axiomático, o mejor dicho, la escuela axiomática, esté pasando su factura a nivel didáctico, de tal forma que por prestar una mayor atención al rigor se deteriore la construcción del sentido y que como dice René Thom «el verdadero problema que se plantee en la enseñanza de las matemáticas... sea el de la 'justificación ontológica' de los objetos matemáticos»²⁶ y en lugar de darle una solución, lo que estemos haciendo sea introducir en nuestros programas «desarrollos formales de teorías insignificantes y carentes de interés»²⁷, pero no olvidemos que, el fin último de la enseñanza de las matemáticas en la Educación General Básica (y también en cualquier otro nivel) es conseguir que nuestros niños y jóvenes obtengan una sólida *intuición* de los entes matemáticos que maneja y todo avance por el camino que conduce a esa intuición «debe pasar necesariamente por un periodo de comprensión formal»²⁸ aunque sólo sea de un modo superficial, lo que no debe preocupar sobremedida a los amantes del rigor, puesto que, paulatinamente, irá siendo sustituido por otro más profundo, ajustado a las necesidades de manipulación de esos entes. La única restricción que le ponemos a esa «formalización» es que se adecúe a las características psicológicas de los sujetos a los que va dirigida, de tal forma que no se tenga que esperar a que, como dice René Thom, la luz del fin disipe las tinieblas del principio, puesto que el nivel de formalización debe arrojar luz desde el comienzo, por estar en perfecta armonía con el nivel evolutivo-cognitivo de los sujetos que deben asimilarlo. Además es de sentido común, y nadie discute, que el conocimiento va de lo particular a lo particular, de ésto a lo general y siempre desde lo concreto a lo abstracto, y por lo tanto, los niveles de formalización y abstracción en los programas de matemáticas deben de tener en cuenta los datos psicogenéticos a fin de que estos niveles no sobrepasen las potencialidades de aquéllos a quienes va dirigido.

El segundo de los puntos a los cuales hicimos referencia, con anterioridad, era la teoría elemental de conjuntos que se encuentra indisolublemente unida al

²⁵ Geometría de cuatro dimensiones con una métrica riemanniana.

²⁶ THOM, R.: «Mathématiques modernes et mathématiques de toujours», en *Pourquoi la mathématique?*, R. Jaulin (ed.), París, 10-18, 1974, pp. 39-56.

²⁷ THOM, R.: «Les mathématiques modernes: un erreur pédagogique et philosophique», en *L'Age de la Science*, 3, 1970, pp. 225-236.

²⁸ DIEUDONNE, J.: «Devons-nous enseigner les mathématiques modernes?», en *Bulletin de l'Association de Professeur de l'Enseignement Publique*, 292, 1974 (pp. 69-79).

genio del matemático ruso Georg Cantor (1845–1918). Es en 1873 cuando empieza Cantor a interesarse por los problemas de equipotencia, demostrando que el conjunto de los números racionales es numerable mientras que el de los reales no lo es. Algo más tarde se ocupa del problema de la medida y de la aritmética cardinal y ordinal ²⁹ para terminar planteándose y enunciando la *hipótesis del continuo*.

Aunque alguno de los resultados de Cantor no tuvieron prácticamente aplicaciones (los que se refieren a la aritmética ordinal, por ejemplo), la mayor parte de sus trabajos fueron objeto de diversas aplicaciones, básicamente en teoría de funciones y teoría de la medida, de ahí que pudiera decir, textualmente, Nicolás Bourbaki ³⁰ que «...hacia finales del siglo XIX, las concepciones esenciales de Cantor habían ganado la partida», aunque, como continúa más adelante, «...simultáneamente se abría una 'crisis de fundamentos' de una violencia considerable, que iba a conmover al mundo matemático durante más de treinta años...» y así, a finales de este mismo siglo, aparecen las primeras «paradojas» ³¹ encontradas por Richard, Burali-Forti, el propio Cantor, etc. Todo esto condujo a que la teoría cantoriana de conjuntos encontrara tantos entusiastas admiradores como acérrimos detractores, situación que permanece todavía puesto que la aceptación o negación de la hipótesis del continuo modifica la solución de determinados problemas, por ejemplo el de Whitehead, y de ahí que coexistan tanto las teorías de conjuntos cantorianas (obtenidas a partir de la aceptación de la hipótesis del continuo) como las no cantorianas (obtenidas a partir de su negación).

Pues bien, la teoría cantoriana de conjuntos constituye la base de los programas de matemáticas modernas y parece ser que éstas están mucho más cerca de las ideas espontáneas de los niños que las llamadas matemáticas tradicionales, al menos esa era la opinión de uno de los psicólogos más cualificados para opinar sobre el tema cuando se expresaba en estos términos: «Nosotros creemos que existe en función del desarrollo de la inteligencia en su conjunto, una construcción espontánea y gradual de las estructuras lógico-matemáticas elementales, y

²⁹ Sobre este punto encontramos una correspondencia entre CANTOR y DEDEKIND sumamente interesante y que es recogida por J. CAVAILLES en su obra *Philosophie Mathématique*, París, Herman, 1962.

³⁰ BOURBAKI, N.: Nombre adoptado por un equipo de grandes matemáticos franceses especialistas en las distintas ramas de las Ciencias exactas que se encuentra siempre en perpetua renovación de miembros para dar entrada a potentes cerebros jóvenes y cuya principal tarea consiste en unificar la Matemática, eliminando de ella los apriorismos, círculos viciosos y cualesquiera desarrollos estériles, aportando por otro lado a la misma sólidas y modernas bases para su fundamentación y didáctica.

³¹ Es una forma suave del término «contradicción» que se utiliza en teoría de conjuntos y que, en palabras de LEBESGUE, «es siempre menos inquietante».

que estas estructuras 'naturales' (en el sentido en que se habla de números naturales) están mucho más cerca de las utilizadas por las llamadas matemáticas modernas que de las que intervenían en la enseñanza tradicional»³².

De estos dos puntos (*axiomatización y rigor-matemáticas modernas*), y de su desarrollo en los programas, parten la mayor parte de los problemas (por no decir todos) que suscita la enseñanza de la matemática actual en nuestras escuelas e institutos.

HACIA UNA ENSEÑANZA MODERNA DE LAS MATEMATICAS MODERNAS

En el estudio del desarrollo histórico de las matemáticas se puede observar con nitidez «cómo a cada periodo de investigación en extensión ha seguido un periodo de síntesis en el que se elaboran una serie de métodos generales y se afirman los cimientos del edificio matemático... al tiempo que se envían al museo de las curiosidades anticuadas, conceptos, procedimientos de estudio, etc.»³³.

En la actualidad, como el número de matemáticos ha aumentado enormemente en los últimos años, ambas labores se simultanean y en esta misión hemos de destacar el trabajo de ese ente policéfalo que es Bourbaki y que se encuentra implicado hasta tal punto en el desarrollo de las matemáticas actuales que hay razones más que suficientes para pensar que sus trabajos deberán ser de gran utilidad a la hora de concebir una enseñanza de las matemáticas que, en todos sus niveles, se encuentre perfectamente adaptada a las necesidades de nuestra época.

La síntesis bourbakiana permite escapar a la dicotomía matemáticas tradicionales versus matemáticas modernas, puesto que para los Bourbaki no hay más que una única *Matemática*, siendo la herramienta fundamental utilizada para llegar a esta unidad, el *método axiomático*.

El sistema operativo nos lo describen los Bourbaki en los siguientes términos: «Cuando se trata de aplicar este método al estudio de una teoría el matemático 'disocia' los elementos fundamentales de todos los razonamientos que han sido utilizados ...para, posteriormente, combinarlos de nuevo... y estudiar el modo según el cual los unos actúan sobre los otros». Pues bien, los «elementos

³² PIAGET, J.: «Remarques sur l'éducation mathématique», en *Math. Ecole*, 58, 1973, pp. 1-7 (p. 1).

³³ CHOQUET, G.: «L'Analyse et Bourbaki», en *L'Enseignement Mathématique*, 8, 1962, pp. 109-135 (p. 110).

fundamentales de los razonamientos» son *las estructuras* que se podrían definir como sistemas de transformaciones de carácter muy general y en los que la naturaleza de sus elementos constitutivos es irrelevante, siendo sus relaciones, en tanto que sistema, lo realmente consustancial a ellas. Estas relaciones entre elementos vienen determinadas por *los axiomas* que definen la estructura. Por eso, no sólo una teoría puede presentar estructuras muy variadas³⁴ sino que, debido a ese carácter general, la misma estructura puede aparecer en distintas teorías³⁵.

Algunas de esas estructuras poseen una importancia fundamental porque aparecen en todas (o casi todas) las teorías y se designan con el nombre genérico de *estructuras madre*³⁶. Estas estructuras son, por esa razón, objeto de estudio y especial dedicación en nuestros programas de matemáticas. Como ejemplos podríamos citar las estructuras asociadas a una relación de equivalencia o de orden, las estructuras topológicas, las estructuras algebraicas (grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial...), etc.

Ahora bien, no introducimos estos conceptos en nuestros programas porque así lo dicte el capricho de unos cuantos matemáticos, sino porque la multivalencia, antes descrita, de los sistemas axiomáticos da lugar a un dinamismo interno que es una garantía de aplicabilidad y así, por ejemplo, la teoría cuántica de campos se interpreta mediante los espacios de Hilbert; el marco adecuado a la teoría general de la relatividad lo proporcionan, simultáneamente, la geometría de los espacios de Riemann y el cálculo diferencial, etc. Pero además de servir de marco adecuado a la ciencia actual, esta modificación de las «bases estructurales» de las matemáticas, pretende, así mismo, adaptar ese dinamismo de las relaciones a la estructura funcional del pensamiento y en esta línea los resultados que nos proporciona el análisis genético de las operaciones lógico-matemáticas en el niño así nos lo confirman: «Si nos preguntamos qué representan las estructuras más generales de las operaciones concretas que se constituyen hacia la edad de 7 años³⁷, tomando como criterios psicológicos su reversibilidad o su carácter involutivo y los invariantes a que dan lugar, encontramos, dentro de las clasificaciones espontáneas, seriaciones, correspondencias, productos carte-

³⁴ Por ejemplo, el conjunto de los números reales posee estructuras tan variadas como pueden ser las de grupo, cuerpo, espacio vectorial, orden, espacio topológico, etc.

³⁵ Por ejemplo, la estructura de grupo surge del estudio de los números reales, de los enteros módulo p , de los desplazamientos en el espacio, etc.

³⁶ Existen otras estructuras más complejas, como las estructuras múltiples o las estructuras encrucijada (carrefour), pero formadas, en lo esencial, por múltiples estructuras madre ligadas entre sí por ciertas condiciones de compatibilidad.

³⁷ Nosotros hemos observado que nuestros pequeños llegan a establecer principios de conservación en torno a los 5-6 años.

sianos, etc., tres grandes estructuras: las primeras, que podemos llamar *algebraicas*, en tanto que su reversibilidad se apoya en la inversión; las segundas que son las estructuras *de orden*, con una reversibilidad por reciprocidad; y las terceras, a las que se puede adjetivar de *topológicas*, en tanto que fundadas en los entornos y el continuo en vez de sobre las equivalencias (o no equivalencias) entre cantidades discretas independientes de su posición. Resultaría difícil no reconocer en lo anterior una prueba del carácter 'natural' de las tres *estructuras-madre* de los bourbakistas»³⁸.

Ahora bien, si el método axiomático tiene una justificación ontológica y un carácter riguroso, es porque utiliza unas herramientas perfectamente calibradas para actuar con una precisión envidiable en el momento justo, y el conocimiento y el manejo de estas herramientas es imprescindible para obtener la máxima rentabilidad en la aplicación del método. Permítasenos realizar un símil algo tosco: «En una instalación eléctrica, aunque lo importante es el 'esquema' o la 'estructura' de la instalación, la naturaleza o la forma de los hilos conductores de la misma juegan un papel que, si es menos importante, no por ello es menos necesario para un correcto funcionamiento del sistema». En esta misma línea debemos completar el método axiomático con sus herramientas y éstas son: los conjuntos, las aplicaciones, los morfismos, las categorías, los funtores, los diagramas, etc. Estas herramientas se encuentran igualmente próximas al desarrollo espontáneo o «natural» de las operaciones lógico-matemáticas en el niño y en el adolescente, puesto que en lo que se refiere al papel de estas herramientas «parece igualmente difícil negar el profundo parecido que existe entre sus operaciones constitutivas y las que aparecen en los principales agrupamientos³⁹ de clasificación, seriación, etc., que nos hemos visto llevados a distinguir dentro de la lógica de las *operaciones concretas* (es decir, las referidas a los objetos propiamente dichos) a partir de los 7/8 años⁴⁰. Por último y hacia los 11 ó 12 años, aparecen, con las operaciones proposicionales⁴¹ (aquéllas que ya no se refieren solamente a objetos, sino también a hipótesis), una combinatoria y el empleo (que no es en absoluto reflexivo o verbal, sino que se manifiesta en las mismas operaciones utilizadas) de una forma particular del *Vierergruppe* de Klein, con inversiones (N), reciprocidades (R), contrarrecíprocas o duales (C), y la transformación idéntica (I), lo que nos da $RC = N$; $NC = R$; $NR = C$; $NR-$

38 PIAGET, J.: «L'initiation aux mathématiques modernes, les mathématiques modernes et la psychologie de l'enfant», en *L'Enseignement mathématique*, 12, 1966, pp. 284-292 (pp. 289-290).

39 Parece ser la traducción más aceptada del término piagetiano de «groupement».

40 Ver la nota 37.

41 Debería decir operaciones interproposicionales (o formales) para distinguirlas de las intraproposicionales (o concretas).

$C = I$, aplicándose el conjunto conmutativamente a implicaciones, exclusiones, conjunciones, incompatibilidades, etc. ^{42,43}.

Como aclaración, tomemos, por ejemplo, el clásico problema del péndulo en donde el sujeto puede intentar modificar la velocidad del mismo mediante el acortamiento del hilo o la modificación del peso, y que nos permite analizar su competencia para operar formalmente (operación interproposicional). El sujeto se encuentra ante dos proposiciones «p» y «q», que podría enunciar así:

p = no acortar el hilo
q = no modificar el peso

En el planteamiento de las hipótesis que tiene que elaborar y verificar va a manejar dos funtores:

\wedge = conjunción
 \vee = disyunción

las dos proposiciones antes referidas

p y q

y sus respectivas negaciones, que designaremos por:

\bar{p} y \bar{q}

El conjunto de los elementos que le van a permitir el planteamiento y la verificación de sus hipótesis vendría definido en extensión así:

$$H = \{ \wedge, \vee, p, \bar{p}, q, \bar{q} \}$$

El Vierergruppe aplicado a H sería:

$$\begin{aligned} I(H) &= \{ \wedge, \vee, p, q, \bar{p}, \bar{q} \} \\ N(H) &= \{ \vee, \wedge, \bar{p}, \bar{q}, p, q \} \\ R(H) &= \{ \wedge, \vee, \bar{p}, \bar{q}, p, q \} \\ C(H) &= \{ \vee, \wedge, p, q, \bar{p}, \bar{q} \} \end{aligned}$$

⁴² Otras formas del grupo cuaternario aparecen ya a los 7 años (a la vez que los bi-grupos), como por ejemplo en las operaciones que permiten pasar de uno a otro de los cuatro recuadros de una tabla de doble entrada de la forma *ab*, *a no-b*, *no-a b* y *no-a no-b*.

⁴³ PIAGET, J.: Obra citada en la nota 2 de la p. 16 (p. 290).

y el razonamiento de nuestro sujeto podría aproximarse al siguiente: «Si *no acorto el hilo y no modifico el peso* no es posible modificar la velocidad del péndulo (I), pero es posible que se modifique si *acorto el hilo o modifico el peso* (N), comenzaré por simultanear ambas acciones: *acorto el hilo y modifico el peso* (R) con lo que constato que, efectivamente, se modifica la velocidad del péndulo. Pero debo «disociar los factores» para concluir si la modificación de las oscilaciones ha sido debida al hecho de acortar el hilo o al de modificar el peso, para lo cual voy a *no acortar el hilo o a no modificar el peso* (C), pero no ambas cosas a la vez. En primer lugar *acorto el hilo y no modifico el peso* constatando que la velocidad se modifica, en segundo lugar *no acorto el hilo y modifico el peso* constatando que la velocidad inicial del péndulo no sufre modificación alguna, por lo que puedo concluir que *el único factor que afecta las oscilaciones pendulares es la longitud*.

Este ejemplo nos permite ver, con cierta claridad, lo cerca que se encuentra el pensamiento natural de esas estructuras-madre descritas por los Bourbaki, puesto que el proceso descrito anteriormente no es, ni más ni menos, que un grupo cíclico:

	I	N	R	C
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

Ahora bien, el uso correcto de instrumentos poderosos supone una enorme ventaja y permite una gran rentabilidad que se acrecienta aún más si estos instrumentos están en consonancia con el pensamiento natural del individuo, pero su uso incorrecto o, lo que es más peligroso, su abuso pueden tener nefastas consecuencias. En este sentido, y ya lo apuntábamos más atrás, el método axiomático ha permitido elaborar una cantidad ingente de teorías, gran parte de las cuales tienen una aplicación insignificante, y en muchos casos absolutamente ninguna, y nosotros no podemos perder de vista que la misión de los programas de matemáticas en E.G.B. no es la de hacer precoces matemáticos o facilitar su reclutación, su exposición, tampoco está dirigida a matemáticos hechos y dere-

chos, es decir, exploradores del universo abstracto, sino a niños de sentidos muy despiertos y que se interesan sobre todo por la realidad que les rodea. La misión de estos programas es adecuar una materia, cuya inclusión en los planes de estudio ya ha sido justificada, y cuya evolución durante los últimos años ha sido inmensa, al pensamiento natural del niño, de tal manera que su enseñanza sea más racional, tanto desde el punto de vista matemático como psicológico y, en este sentido, la introducción del método axiomático, el análisis de los elementos fundamentales de los razonamientos (las estructuras) y el uso de sus herramientas (conjuntos, aplicaciones, morfismos, etc.) puede ser considerado como un acierto por parte de los psicopedagogos de las matemáticas. Pero, insistimos, aunque creemos firmemente que el uso del método axiomático puede ser útil y rentable en la enseñanza de las matemáticas, estamos, también, positivamente convencidos que su abuso puede provocar resultados catastróficos. Y cuando hablamos de abuso, no nos referimos sólo a la axiomatización por la axiomatización (pensamos que a nadie se le ocurre matar moscas a cañonazos)⁴⁴, ni siquiera nos referimos a esos planteamientos que siendo realmente rigurosos, vienen a destruir la sencillez y claridad que se debe exigir a la enseñanza-base de las matemáticas y que suelen dejar estupefactos a los alumnos⁴⁵, como, por ejemplo, la siguiente situación que presentaba un determinado libro de texto:

Dada la ecuación

$$f(x, y) = 3x - 2y = 1$$

determinar el conjunto

$$A = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{Z}, f(x, y) = 1\}$$

Desde luego, nosotros no alcanzamos a adivinar qué se pierde en claridad lógica si sustituimos el problema anterior por otro cuyo enunciado sea:

Determinar las posibles raíces enteras de la ecuación

$$3x - 2y = 1. \text{ }^{46}$$

⁴⁴ Expresión que hace referencia al uso de medios desproporcionados con los resultados que consiguen.

⁴⁵ Una axiomática demasiado perfecta que suponga desarrollos teóricos excesivamente largos debería evitarse, pues, a veces, es necesario perder en rigor para ganar en claridad.

⁴⁶ En este sentido hay que destacar una célebre frase de Jean LERAY y recogida en un artículo titulado «L'initiation aux mathématiques», en *L'enseignement mathématique*, 12, 1966, pp. 235-241, que reza así: «El lenguaje elaborado ... sólo debe emplearse para tratar cuestiones que presenten un interés real: emplearlo sin razón ... es ... caer en una 'preciosidad ridícula'».

Nuestra intención hace referencia y va encaminada hacia la justificación psicológica del método axiomático. En este sentido creemos que se puede confundir la iniciación a las matemáticas modernas con el entrar de lleno en su axiomática, sin tener demasiado en cuenta que lo único que se puede axiomatizar son los datos intuitivos previos y desde un punto de vista psicológico «una axiomática sólo tiene sentido en tanto que supone una toma de conciencia o una reflexión retroactiva, lo que implica toda una construcción proactiva anterior. El niño ... y el adolescente manipulan continuamente operaciones de conjuntos, de grupo, de espacio vectorial, etc., pero sin ser en absoluto conscientes de ello, puesto que se trata de esquemas fundamentales de comportamiento —y, después, de razonamiento— antes de poder llegar a convertirse en objetos de reflexión. Se hace, pues, indispensable toda una gradación para poder pasar de la acción al pensamiento representativo, y una serie no menos larga de transiciones para pasar del pensamiento operatorio a la reflexión sobre dicho pensamiento; el último escalón es entonces el paso de esta reflexión a la axiomática propiamente dicha»⁴⁷.

Si tenemos en cuenta todos estos datos a la hora de la elaboración de los programas de matemáticas, podemos admitir, sin temor a equivocarnos, que los radicales cambios en los contenidos de estos programas son rentables y necesarios. Pero la enseñanza de una matemática no se justifica por el hecho de que sea lógicamente consistente, ni siquiera por el hecho de estar muy próxima al pensamiento espontáneo o natural de los individuos que la han de asimilar, sino por algo que relaciona ambos hechos: *la explicación didáctica* en que se apoya. Entonces, ¿cómo hemos de enseñar esos nuevos contenidos?

La tradición nos dice que toda enseñanza debe realizarse de acuerdo con un cierto sistema que se obtendría como resultado de un análisis lógico de la materia correspondiente para, posteriormente, seguir el *proceso* inverso. En este sentido hemos querido subrayar el término «proceso» con el fin de pasar sobre la educación clásica que, adoptando un punto de vista estático, elabora sus programas de tal forma que ese análisis lógico efectuado en los dominios matemáticos considera los procesos como estados y éstos como «conocimientos fijados» en lugar de como actividades. Pero si, como dice Hans Freudenthal, «enseñar quiere decir iniciar una actividad, el análisis sobre el que debe apoyarse el método empleado no debe referirse a los productos terminados, sino a las actividades»⁴⁸.

Al centrar nuestra actividad didáctica en los procesos y no en los productos, encontramos, en la estructura del edificio matemático, una estratificación de los

47 PIAGET, J.: Obra citada en la nota número 38 (p. 292).

48 FREUDENTHAHL, H.: Obra citada en las notas números 19 y 20 (p. 36).

conocimientos que fue formulada en su *teoría de capas* por los Van Hiele hacia finales de los años cincuenta y que permitió determinar que las etapas mediante las cuales el proceso de aprendizaje avanza de un nivel a otro pueden ser distinguidas empleando criterios pedagógicos, pero, sin embargo, la relación entre un nivel y el siguiente es esencialmente lógica y psicológica y debe ser descubierta utilizando métodos lógicos⁴⁹, siendo la característica básica de la jerarquización de estos niveles el que la técnica concreta de las operaciones que a cierto nivel es puramente manipulativa, pasa a ser objeto de reflexión a un nivel superior, con lo que volvemos a encontrar de nuevo ese paralelismo entre estructuras lógico-matemáticas y estructuras psicológicas.

Esta *teoría de capas* está estrechamente ligada a la concepción moderna de las matemáticas consideradas como actividad y nos permite adecuar los conceptos lógico-matemáticos al pensamiento del sujeto que los ha de asimilar. Pero, ¿cuál debe ser ese proceso de asimilación?

En primer lugar, no podemos perder de vista que la orientación que se pretende dar a la educación matemática depende de:

- a) la interpretación que se acepte para la formación psicológica de conceptos o para la adquisición de las operaciones y de las estructuras lógico-matemáticas.
- b) la significación epistemológica que se le atribuya a esas operaciones y estructuras. Aunque esta dicotomización establecida para la orientación educativa en los dominios lógico-matemáticos es arbitraria, puesto que las cuestiones de la psicogénesis y la epistemología en estos dominios están estrechamente ligadas.

En segundo lugar, y con respecto a la adquisición de estructuras lógico-matemáticas, la interpretación más aceptada, nosotros diríamos que universalmente aceptada, de ese proceso de asimilación es la de que al tratar de adaptar la enseñanza de la ciencia a la nueva idea de ciencia, se debe presuponer que todo aprendizaje debe comprender períodos de invención dirigida, es decir, de invención desde la perspectiva del que aprende (por tanto, en sentido subjetivo y no objetivo) y los psicopedagogos hemos dado suficientes y convincentes razones en virtud de las cuales el proceso enseñanza-aprendizaje debe proceder según esa asimilación reinventiva⁵⁰, existiendo un unánime acuerdo en admitir que «la

⁴⁹ Dina VAN HIELE-GELDOF: *De didactiek van de Meetkunde in de eerste klas van het VMO*, Utrecht, 1957. VAN HIELE, P. M.: *De problematiek van het inzicht*, Utrecht, 1957.

⁵⁰ Debemos reconocer que ya numerosos matemáticos habían llegado a la conclusión (por simple introspección) de que la mejor manera de leer los trabajos de los demás consiste en volver a inventarlos.

enseñanza debe formar informando, hacer descubrir, y no profesar la verdad»⁵¹. Las divergencias parecen apuntar más hacia los caminos que esa reinención debe seguir y así parece admitirlo expresamente James Clerk Maxwell cuando afirmaba que «es muy útil para los estudiantes de cualquier tema leer los artículos originales sobre el mismo; la ciencia se asimila siempre más completamente en su etapa de formación»⁵². En este mismo sentido, es harto conocida la aseveración de Jean Leray de que «la enseñanza sólo puede tener éxito haciendo que la mente del niño reviva las etapas por las que ha pasado la mente humana, del mismo modo que ... en su vida prenatal, ha revivido como embrión toda la evolución de la especie. Pero lo ha hecho muy deprisa: ha sido protozooario unos instantes, ha tenido un parecido con las especies primitivas, pero nunca ha dejado de pertenecer a la especie humana»⁵³. Esto puede sugerir como principio general deductivo que «el mejor camino para guiar el desarrollo mental de un individuo es reconstruir el desarrollo mental de la raza; recordar sus líneas generales, naturalmente, y no los miles de errores de detalle»⁵⁴. Pero esta recapitulación del desarrollo ancestral que se lleva a cabo durante la embriogénesis, a la que hacía referencia Leray, y que puede ser aceptada en sus grandes líneas maestras, como lo hacen la mayor parte de los matemáticos norteamericanos, es discutida por varios e importantes científicos, fundamentalmente psicopedagogos de las matemáticas, sobre todo cuando el tema a abordar hace referencia a la construcción de las operaciones matemáticas. Ya Aristóteles decía que lo que ocupa el primer lugar en el orden de la génesis puede ir en el último en el de los análisis; la razón es porque «el descubrimiento de los resultados de una operación es muy anterior a la conciencia de su existencia y, sobre todo, de sus mecanismos: así, algunas operaciones muy primitivas —genéticamente hablando— pueden aparecer muy tardíamente en la historia de las ciencias, como por ejemplo la correspondencia biunívoca con Cantor»⁵⁵.

Si observamos, por ejemplo, la construcción del espacio en el niño, podemos detectar que esta construcción no sigue el orden histórico establecido (métrica euclídea → espacios proyectivos → estructuras topológicas), sino que se apro-

51 LERAY, J.: «L'initiation aux mathématiques», en *L'enseignement mathématique*, 12, 1966, pp. 235-241 (p. 235).

52 Manifiesto publicado por los matemáticos de la mayor parte de las Universidades norteamericanas y de los institutos de investigación de ese país en *American Mathematical Monthly* y *The Mathematics Teacher*, con el título de «On the mathematics curriculum for the High School», marzo de 1962.

53 LERAY, J.: *ibid.* (p. 235).

54 Tomado del manifiesto anterior (nota 52) y siguiendo la línea del profesor Ernst MACH, que para exponer una idea se refería a su génesis y reconstruía su formación histórica.

55 PIAGET, J.: obra citada en la nota número 38 (p. 285).

xima mucho más al orden teórico de construcción y así, las primeras intuiciones operatorias tienen un carácter topológico —sin duda alguna, euclidiano—, pero en el que prevaleciendo las relaciones de orden sobre cualquier tipo de métrica, se consideran únicamente los entornos, las fronteras, las vecindades, las características de abierto y cerrado, etc. Posteriormente llegarán a establecerse, de forma conjunta, las estructuras proyectivas y la métrica euclídea, en una construcción cuyo dato más significativo es el apoyo mutuo de ambos sistemas para llegar, finalmente, a la conquista del espacio circundante.

Esto supone una disonancia entre el pensamiento natural del niño y las matemáticas tradicionales, o mejor dicho, entre el pensamiento natural del niño y la enseñanza tradicional de las matemáticas que ha venido siendo demasiado tributaria de la historia. Ahora bien, existen muchos ensayos educativos, diríamos que demasiados, que incurren en la penosa contradicción de «pretender» enseñar «matemáticas modernas» con una metodología arcaica que sustituye la acción por el lenguaje⁵⁶ (más o menos formal) y la reinvención por la pura y simple transmisión y en lo que hace referencia a la educación matemática, caeríamos en un grave error si nos limitáramos al plano del lenguaje y dejáramos de lado el papel de las acciones, puesto que la «manipulación» de los objetos resulta totalmente indispensable para la comprensión de los entes matemáticos y sus relaciones. Se engañan, por tanto, quienes piensan que cualquier acción o experiencia material realizada sobre los objetos físicos puede constituir un estorbo o un problema para el desarrollo deductivo y racional de las matemáticas, ya que coexisten dos formas de experiencias, muy diferentes entre sí, ligadas a las acciones:

- a) las *experiencias físicas* que permiten descubrir propiedades en los objetos, pero que éstos ya poseían antes de ser manipulados, y
- b) las *experiencias lógico-matemáticas* que permiten extraer información a partir de las coordinaciones entre las acciones que el niño ejerce sobre los objetos.

Lo veremos más claro en el siguiente supuesto: «Si tenemos un conjunto de diez bolas, mi acción sobre ellas puede proporcionarme información sobre las propiedades físicas de las mismas (color, densidad, peso, tamaño, etc.), pero además podría observar, por ejemplo, que, tanto si las cuento de izquierda a derecha como de derecha a izquierda, estando éstas más separadas o más juntas, obtengo siempre diez, por lo que concluiría que el cardinal de un conjunto es

56 «Saber es hacer».

independiente de la disposición espacial de sus elementos, y esta propiedad no ha sido extraída de las bolas (objetos), sino de mi acción sobre ellas».

Ahora bien, este papel inicial de las acciones que originan las experiencias físicas y lógico-matemáticas, lejos de constituir un obstáculo para el desarrollo posterior de los procesos deductivos, es, precisamente, la preparación necesaria para llegar a ellos, y esto por dos razones. La primera es que esas deducciones ulteriores están constituidas por operaciones mentales que derivan de esas acciones mediante un proceso paulatino de interiorización. La segunda es que la coordinación de las acciones por un lado, y las experiencias lógico-matemáticas por otro, dan lugar, merced a ese proceso de interiorización, a la formación de una variedad de abstracción que corresponde, precisamente, a la abstracción lógica y matemática y que denominaremos «reflexiva»⁵⁷ porque 'refleja' en un plano superior de pensamiento o representación mental algo que procede de un plano inferior, como es el de las acciones, constituyendo a la vez, y por esta razón, una actividad de reorganización (reflexión).

Esto nos sugiere que la matemática podrá ser una ciencia eminentemente, pero no exclusivamente, deductiva y los argumentos inductivos y, por analogía, junto con los ejemplos intuitivos para cualquier conjetura imprevista, aunque sean procesos «informales» son, sin lugar a dudas, modos matemáticos de pensamiento y la renovación de la enseñanza de las matemáticas y de sus programas debe intentar conseguir, con todos los medios a su alcance, el establecimiento de un equilibrio consistente entre observación, experimentación y deducción⁵⁸.

Este predominio de la acción sobre el lenguaje en la elaboración y adquisición de conceptos lógico-matemáticos, permite establecer una primacía de la reinvención sobre la simple transmisión que pone una vez más de manifiesto las ingentes ventajas que pueden producir en el ámbito educativo la enseñanza de unas *matemáticas coherentes* (con el pensamiento del niño y la evolución de la ciencia), mediante una *enseñanza coherente* de las matemáticas. Recalcamos los aspectos de «matemáticas coherentes» y «enseñanza coherente» porque son complementarios e indisolubles en el proceso educativo.

En efecto, unas matemáticas coherentes suponen unas matemáticas *organizadas*, es decir, que estén de acuerdo consigo mismas, que se encuentren libres

⁵⁷ Distinguiremos esta abstracción de la abstracción aristotélica que parte de las propiedades físicas de los objetos y que denominaremos «abstracción empírica».

⁵⁸ Esta precisión sobre los procesos inductivos en matemáticas fue maravillosamente descrita por HADAMARD cuando decía que «el objeto del rigor matemático es confirmar y legitimar las conquistas de la intuición, y *nunca ha tenido otra finalidad*» (el subrayado es nuestro).

de contradicción con respecto a ellas. Una enseñanza coherente de las matemáticas supone una *adaptación* de esas matemáticas coherentes al pensamiento del sujeto que ha de asimilarlas y, mediante las cuales, podrá explicar el universo circundante, de tal forma que en su comprensión no viva algún tipo de contradicción que no pueda ser superada.

Ahora bien, organización y adaptación son los dos indisociables invariantes funcionales de la inteligencia y el isomorfismo establecido es tan evidente que nadie podrá negar la permanente comunión de las matemáticas y su enseñanza.

En conclusión, y parafraseando simultáneamente a tres grandes estudiosos del tema, como son Piaget, Dieudonne y Stone, si conseguimos poner de acuerdo las matemáticas modernas y los datos psicológicos, la pedagogía tiene ante sí un porvenir luminoso y podrá llegar un día en que exista una enseñanza coherente de las matemáticas que abarque desde la escuela maternal a la Universidad, con lo que habríamos conseguido una de las más altas metas educativas de nuestro tiempo: mostrar la unidad esencial del pensamiento humano.